$\tan x$ の n 階導関数

中嶋 慧

December 10, 2022

Abstract

このノートは日曜数学 Advent Calendar 2022 の 10 日目の記事である。$\tan x$ の n 階導関数を $\tan x$ の多項式で表す式を解説する。

Contents

0　イントロ

この節では、私と $\tan x$ の n 階導関数との 2 度の出会いについて述べる。

私が高等専門学校 (高専) の 3 年生のとき、次の問題に出会った：

問題 (数研 1 級の問題集)

$\tan x$ を x^7 までマクローリン展開せよ。

当時はまだテーラー展開に慣れていなかった[1)]ので、$\tan x$ を 7 階微分しようとしたが、難しくて諦めた。これが $\tan x$ の高階微分との最初の出会いだった。なお、模範解答は以下のようであった。まず、

$$\tan x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \cdots \tag{0.1}$$

とおく。これと $\tan x \cos x = \sin x$ から、

$$\begin{aligned} &\Big(x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \cdots\Big)\Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots\Big) \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots \end{aligned} \tag{0.2}$$

であり、これより、a_3, a_5, a_7 を求めればよい[2)] 。

しばらくして、$(\tan x)^{(n)}$ が $\tan x$ の多項式で書けることを知った。本記事ではこの表式を解説する。

2021 年に、私の非平衡統計力学の研究で、以下の発散級数に出会った [1]：

$$\tilde{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma^n} \frac{d^n}{dt^n} f(W + Vt), \quad f(x) := \frac{1}{e^x + 1}. \tag{0.3}$$

$f(x)$ は物理ではフェルミ分布として知られている。関係式

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \tanh\frac{x}{2}) \tag{0.4}$$

より、$\tanh x$ の n 階導関数が分かればよい。それは $\tan x$ の n 階導関数から導かれる。ここで $\tan x$ の n 階導関数に再会した[3)]。

---

1) 多くの高専の 3 年生ではテーラー展開や多変数の微積分, 常微分方程式を習う。また行列の対角化なども習う。

2) 答えは、

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + O(x^9)$$

である。§ 3.2 で x^{11} までの展開を与える。

3) なお、発散級数 $\tilde{F}$ のボレル和 F は、

$$F = f \cdot {}_2F_1(1, 1; T + 1; 1 - f), \quad T := \frac{\gamma}{V}$$

となる [1]。${}_2F_1$ は超幾何関数である。また、F を T について漸近展開すると $\tilde{F}$ となる。詳しくは付録 A を参照。

Table 1: 第 2 種スターリング数 $S(n,k)$. 空白の部分は 0 である。

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1											
1	0	1										
2	0	1	1									
3	0	1	3	1								
4	0	1	7	6	1							
5	0	1	15	25	10	1						
6	0	1	31	90	65	15	1					
7	0	1	63	301	350	140	21	1				
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1			
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1		
10	0	1	511	9330	31405	42525	22827	5880	750	45	1	
11	0	1	1023	28501	145750	246730	179487	63987	11880	1155	55	1

1　第 2 種スターリング数

まず第 2 種スターリング数 $S(n,k)$ について解説する。それは、

$$S(n+1,k) = kS(n,k) + S(n,k-1), \tag{1.1}$$
$$S(n,0) = \delta_{n0}, \tag{1.2}$$
$$S(0,n) = \delta_{n0} \tag{1.3}$$

で定義される[4)]。$k > n$ のとき、$S(n,k) = 0$ である。$n = 11$ までの第 2 種スターリング数を Table 1 に示す。例えば、以下の公式が成り立つ：

$$S(n,1) = 1 \quad (n \geq 1), \tag{1.4}$$
$$S(n,n) = 1 \quad (n \geq 0), \tag{1.5}$$
$$S(n,2) = 2^{n-1} - 1 \quad (n \geq 1), \tag{1.6}$$
$$S(n,n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \quad (n \geq 1). \tag{1.7}$$

また、

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{z^n}{n!} S(n,k) = \frac{(e^z-1)^k}{k!} \tag{1.8}$$

が成り立つ[5)] [2]。(1.8) は § 4 と § A.4 で用いる。

---

4) δ_{n0} はクロネッカーのデルタで、$n = 0$ で 1, $n \neq 0$ で 0 である。

5) 左辺を $\mathcal{S}_k(z)$ とすると、(1.1) より、

$$\mathcal{S}'_k(z) \; = \; k\mathcal{S}_k(z) + \mathcal{S}_{k-1}(z) \quad (k \geq 1)$$

となる。また、$\mathcal{S}_0(z) = 1$, $\mathcal{S}_k(0) = 0$ $(k \geq 1)$ である。これを解いて (1.8) を得る。

2 $g(x) = 1/(1-e^{-x})$ の n 階導関数を $g(x)$ で表す

2.1 $1/(1-e^{-x})$ の n 階導関数

定理 1 [3]

$n \geq 0$ に対して、

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{\mu_{n,k}}{(1-e^{-x})^k}, \tag{2.1}$$

$$\mu_{n,k} = (-1)^{k+1}(k-1)!S(n+1,k) \tag{2.2}$$

である。ここで $S(n,k)$ は第 2 種スターリング数である。

これを示す。(2.1) を微分することで、

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\frac{1}{1-e^{-x}} &= \sum_{k=1}^{n+1}\mu_{n,k}\frac{d}{dx}\frac{1}{(1-e^{-x})^k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}k\mu_{n,k}\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^{k+1}}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}k\mu_{n,k}\Big[-\frac{1}{(1-e^{-x})^{k+1}}+\frac{1}{(1-e^{-x})^k}\Big]\\ &= \sum_{k=2}^{n+2}\frac{-(k-1)\mu_{n,k-1}}{(1-e^{-x})^k}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k\mu_{n,k}}{(1-e^{-x})^k} \qquad (2.3)\end{aligned}$$

を得る。これより、

$$\mu_{n+1,1} = \mu_{n,1}, \tag{2.4}$$

$$\mu_{n+1,n+2} = -(n+1)\mu_{n,n+1}, \tag{2.5}$$

$$\mu_{n+1,k} = k\mu_{n,k} - (k-1)\mu_{n,k-1} \quad (1 \leq k \leq n+1) \tag{2.6}$$

を得る。(2.4), (2.5) と $\mu_{0,1} = 1$ より、

$$\mu_{n,1} = 1, \tag{2.7}$$

$$\mu_{n,n+1} = (-1)^n n! \tag{2.8}$$

となる。(2.6) の漸化式は、

$$A(-1)^k(k-1)!S(N_n,k) \tag{2.9}$$

のそれと一致する。これと、例えば (2.8), (1.5) より、$N_n = n+1,\ A = -1$ が分かる [3]:

$$\mu_{n,k} = (-1)^{k+1}(k-1)!S(n+1,k). \tag{2.10}$$

3 $\tan x$ の n 階導関数を $\tan x$ で表す

3.1 $\tan x$ の n 階導関数

(2.1) で $x = -\alpha t + \beta$, $\lambda := e^{-\beta}$ とおいて、

$$\frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{1-\lambda e^{\alpha t}} = (-\alpha)^n \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!S(n+1,k)}{(1-\lambda e^{\alpha t})^k} \tag{3.1}$$

を得る。$\lambda = -1$, $\alpha = 2i$ として、

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{1+e^{i2x}} = (-2i)^n \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!S(n+1,k)}{(1+e^{i2x})^k} \tag{3.2}$$

である。これと、

$$\tan x = \frac{2i}{1+e^{i2x}} - 2i, \quad \frac{1}{1+e^{i2x}} = \frac{1}{2}(1 - i\tan x) \tag{3.3}$$

より、

$$(\tan x)^{(n)} = (-1)^{n-1} i^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n-k+1}(k-1)!S(n+1,k)(i\tan x - 1)^k \tag{3.4}$$

を得る ($n \geq 1$)。x が実数のときは $(\tan x)^{(n)}$ は実数であるから、(3.4) より次の定理が得られる [4]：

定理 2 [4]

$n \geq 1$ に対して、

$$\begin{aligned}
(\tan x)^{(n)} &= \sum_{j=0}^{n+1} c_{n,j} \tan^j x, && (3.5)\\
c_{n,j} &= (-1)^{j+1} \cos\left(\frac{n+1+j}{2}\pi\right) C_{n,j}, && (3.6)\\
C_{n,j} &:= \sum_{k=\max\{1,j\}}^{n+1} (-1)^{n-k} 2^{n-k+1} (k-1)! S(n+1,k) \binom{k}{j} && (3.7)
\end{aligned}$$

である。ここで $S(n,k)$ は第 2 種スターリング数である。

$n = 2m+1 = 1, 3, 5, \cdots$ のときは、

$$c_{2m+1,1} = c_{2m+1,3} = \cdots = c_{2m+1,2m+1} = 0 \tag{3.8}$$

である。また、$n = 2m = 2, 4, 6, \cdots$ のときは、

$$c_{2m,0} = c_{2m,2} = \cdots = c_{2m,2m} = 0 \tag{3.9}$$

である。$\cos(\frac{n+1+j}{2}\pi) = 0$ のときは $C_{n,j} = 0$ となる。これは§4 で示す。$C_{n,j}$ の具体的な表式は得られるか？[5]

$(\tan x)^{(n)}$ を $n=1$ から $n=10$ まで書くと、

$$
\begin{aligned}
(\tan x)^{(1)} &= 1+\tan^2 x, && (3.10)\\
(\tan x)^{(2)} &= 2\tan x+2\tan^3 x, && (3.11)\\
(\tan x)^{(3)} &= 2+8\tan^2 x+6\tan^4 x, && (3.12)\\
(\tan x)^{(4)} &= 16\tan x+40\tan^3 x+24\tan^5 x, && (3.13)\\
(\tan x)^{(5)} &= 16+136\tan^2 x+240\tan^4 x+120\tan^6 x, && (3.14)\\
(\tan x)^{(6)} &= 272\tan x+1232\tan^3 x+1680\tan^5 x+720\tan^7 x, && (3.15)\\
(\tan x)^{(7)} &= 272+3968\tan^2 x+12096\tan^4 x+13440\tan^6 x+5040\tan^8 x, && (3.16)\\
(\tan x)^{(8)} &= 7936\tan x+56320\tan^3 x+129024\tan^5 x\\
&\quad +120960\tan^7 x+40320\tan^9 x, && (3.17)\\
(\tan x)^{(9)} &= 7936+176896\tan^2 x+814080\tan^4 x\\
&\quad +1491840\tan^6 x+1209600\tan^8 x+362880\tan^{10} x, && (3.18)\\
(\tan x)^{(10)} &= 353792\tan x+3610112\tan^3 x+12207360\tan^5 x\\
&\quad +18627840\tan^7 x+13305600\tan^9 x+3628800\tan^{11} x && (3.19)
\end{aligned}
$$

である。$c_{n,1}=c_{n+1,0}$ であることを§4.2 で示す。

$c_{n,0}$ は、

$$
c_{n,0} = -\cos(\frac{n+1}{2}\pi)C_{n,0}\,, \quad C_{n.0} = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n-k}2^{n-k+1}(k-1)!S(n+1,k) \qquad (3.20)
$$

である。(1.1) を代入すると、

$$
\begin{aligned}
C_{n.0} &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n-k}2^{n-k+1}k!S(n,k)+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n-k}2^{n-k+1}(k-1)!S(n,k-1)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}2^{n-k+1}k!S(n,k)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}2^{n-k+1}k!S(n,k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}2^{n-k}k!S(n,k) && (3.21)
\end{aligned}
$$

である。$k>n$ で $S(n,k)=0$ であることと、$S(n,0)=0$ $(n\geq 1)$ を用いた。よって、

$$
c_{n,0} = -\cos(\frac{n+1}{2}\pi)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}2^{n-k}k!S(n,k) \quad (n\geq 1) \qquad (3.22)
$$

である。

3.2 $\tan x$ のマクローリン展開

$\tan x$ のマクローリン展開は、

$$
\begin{aligned}
\tan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tan y)^{(n)}}{n!}\bigg|_{y=0} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n,0}}{n!} x^n \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

である。$c_{n,0}$ はタンジェント数とも呼ばれる。x^{11} までの展開は、

$$
\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + O(x^{13}) \qquad (3.24)
$$

である。

3.3 書き換え

(3.4) に (2.6) を代入して、

$$
\begin{aligned}
(\tan x)^{(n)} &= (-1)^{n-1} i^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n-k+1} k! S(n,k)(i\tan x - 1)^k \\
&\quad + (-1)^{n-1} i^{n+1} \frac{1}{2}(i\tan x - 1) \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n-k+2}(k-1)! S(n,k-1)(i\tan x - 1)^{k-1} \\
&= (-1)^{n-1} i^{n+1} \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k+1} k! S(n,k)(i\tan x - 1)^k \\
&\quad + (-1)^{n-1} i^{n+1} \frac{1}{2}(i\tan x - 1) \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k+1} k! S(n,k)(i\tan x - 1)^k \\
&= (-1)^{n-1} i^{n+1} (i\tan x + 1) \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} k! S(n,k)(i\tan x - 1)^k \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

を得る。$k > n$ で $S(n,k) = 0$ であることと、$S(n,0) = 0$ $(n \geq 1)$ を用いた。また、

$$
-(\tan x)^{(n)} = (\tan(-x))^{(n)} = (-1)^n (\tan y)^{(n)}\big|_{y=-x} \qquad (3.26)
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
(\tan x)^{(n)} &= i^{n+1}(-i\tan x + 1) \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}(-1)^k k! S(n,k)(i\tan x + 1)^k \\
&= (\tan x + i) \sum_{k=1}^{n} (2i)^{n-k} k! S(n,k)(\tan x - i)^k \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

を得る (これは [4] の (2.10) である)。

4 $(\tan x)^{(n)}$ の $\tan^j x$ の係数の母関数

$$(n+j)\text{ が偶数のとき } C_{n,j} = 0 \tag{4.1}$$

となることを示す (私が考えた証明なので、あまり上手くないかもしれない)。

(3.21), (3.7) より、

$$C_{n,0} = (-2)^n \sum_{k=1}^{\infty} \Big(-\frac{1}{2}\Big)^k k! S(n,k), \tag{4.2}$$

$$C_{n,j} = 2(-2)^n \sum_{k=j}^{\infty} \Big(-\frac{1}{2}\Big)^k (k-1)! S(n+1,k) \binom{k}{j} \quad (j \geq 1) \tag{4.3}$$

である。$k > n$ で $S(n,k) = 0$ であることを用いた。いま、

$$G_0(z,x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} x^k k! S(n,k), \tag{4.4}$$

$$G_j(z,x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=j}^{\infty} x^k (k-1)! S(n+1,k) \binom{k}{j} \quad (j \geq 1) \tag{4.5}$$

を考える。$x = -1/2$ のとき、

$$G_0(z, -\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{C_{n,0}}{(-2)^n}, \tag{4.6}$$

$$G_j(z, -\frac{1}{2}) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{C_{n,j}}{(-2)^{n+1}} \tag{4.7}$$

なので、もし、$G_0(z, -1/2)$ が z の奇関数ならば (4.1) が示される。同様に、$G_j(z, -1/2)$ の偶奇から (4.1) を示せる。

4.1 $C_{n,0}$ について

(1.8) より、

$$\begin{aligned} G_0(z,x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (e^z - 1)^k x^k \\ &= \frac{(e^z-1)x}{1-(e^z-1)x} \end{aligned} \tag{4.8}$$

である。以下、z は十分小さいとする。よって、

$$G_0(z, -\frac{1}{2}) = -\frac{e^z - 1}{e^z + 1} = -\tanh\frac{z}{2} \tag{4.9}$$

であり、これは奇関数なので (4.1) が示された。

4.2 $C_{n,j}$ について

(1.8) より、

$$G_j(z,x) = \sum_{k=j}^{\infty}(e^z-1)^k x^k \frac{1}{k}\binom{k}{j}$$
$$= \frac{1}{j}(e^z-1)^j x^j (1-(e^z-1)x)^{-j} = \frac{1}{j}\Big[G_0(z,x)\Big]^j \tag{4.10}$$

である。ここで、

$$\sum_{k=j}^{\infty} y^k \frac{1}{k}\binom{k}{j} = \frac{y^j}{j}(1-y)^{-j} \tag{4.11}$$

を用いた。実際、

$$(1-y)^{-j} = 1 + jy + \frac{1}{2}j(j+1)y^2 + \cdots + \frac{1}{n!}j(j+1)\cdots(j+n-1)y^n + \cdots, \tag{4.12}$$
$$y^j(1-y)^{-j} = y^j + \cdots + \frac{j}{k}\binom{k}{j} y^k + \cdots \tag{4.13}$$

である。(4.10) より、

$$G_j(z,-\frac{1}{2}) = \frac{1}{j}\Big(-\tanh\frac{z}{2}\Big)^j = \frac{1}{j}\Big[G_0(z,-\frac{1}{2})\Big]^j \tag{4.14}$$

である。j が奇数のときは $G_j(z,-\frac{1}{2})$ は奇関数, j が偶数のときは $G_j(z,-\frac{1}{2})$ は偶関数であり、(4.1) が示された。

$j=1$ として、

$$C_{n,1} = -C_{n+1,0} \tag{4.15}$$

を得る。これより、

$$c_{n,1} = c_{n+1,0} \tag{4.16}$$

となる。

$C_{n,0}$ はタンジェント数と符号しか違わないので (4.9) が成立するのは分かるが、(4.14) や (4.10) の意味は何か？(例えば $\{C_{n,0}\}$ だけ知っていれば $C_{n,j}$ が分かる、ということだが...)

A　フェルミ分布 $f(x) = 1/(e^x + 1)$ の n 階導関数を $f(x)$ で表す

A.1　ボーズ分布 $B(x) = 1/(e^x - 1)$ の n 階導関数

$B(x) := 1/(e^x - 1)$ とする。(3.1) で $\lambda = 1$, $\alpha = 1$ とすると、

$$B^{(n)} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)! S(n+1, k) [B(x)]^k \tag{A.1}$$

を得る。(1.1) より、

$$\begin{aligned} B^{(n)} &= (-1)^n \sum_{k=1}^{n} k! S(n, k) [B(x)]^k + (-1)^n B \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)! S(n, k-1) [B(x)]^{k-1} \\ &= (-1)^n [B + 1] \sum_{k=1}^{n} k! S(n, k) [B(x)]^k \end{aligned} \tag{A.2}$$

を得る。また、

$$B(-x) = -[B(x) + 1] \tag{A.3}$$

より、

$$B^{(n)} = B \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k! S(n, k) [B(x) + 1]^k \tag{A.4}$$

を得る。

A.2　$\tanh x$ の n 階導関数

$$\tan(ix) = i \tanh x \tag{A.5}$$

を (3.25) に代入して、

$$(\tanh x)^{(n)} = -(1 - \tanh x) \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} (-1)^k k! S(n, k) (\tanh x + 1)^k \tag{A.6}$$

を得る。(3.27) からは、

$$(\tanh x)^{(n)} = (-1)^n (\tanh x + 1) \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} k! S(n, k) (\tanh x - 1)^k \tag{A.7}$$

を得る。

A.3 フェルミ分布 $f(x) = 1/(e^x+1)$ の n 階導関数

$$f(x) := \frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{2}(1-\tanh\frac{x}{2}), \quad \tanh\frac{x}{2} = 1-2f(x) \tag{A.8}$$

なので、(A.6) より、

$$f^{(n)}(x) = f(x)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k! S(n,k)[1-f(x)]^k \tag{A.9}$$

を得る。また、(A.7) より、

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}[1-f(x)]\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k! S(n,k)[f(x)]^k \tag{A.10}$$

を得る。

A.4 イントロの発散級数

§0 で紹介した発散級数

$$\tilde{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\gamma^n}\frac{d^n}{dt^n}f(W+Vt) \tag{A.11}$$

を考える。これは、

$$\tilde{F} = f + f\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{T^n}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k! S(n,k)(1-f)^k, \quad T := \frac{\gamma}{V} \tag{A.12}$$

である。(1.8) を用いて、$\tilde{F}$ のボレル和[6] F を計算すると、

$$F = f \cdot {}_2F_1(1,1;T+1;1-f) \tag{A.13}$$

となる。${}_2F_1$ は超幾何関数である。また、F を T について漸近展開すると $\tilde{F}$ となる。

[6] 級数 $\tilde{S}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)$ に対して、(i) ボレル変換 $\mathcal{B}[\tilde{S}(t)](s) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(t)}{n!}s^n$ が有限の収束半径を持ち、解析関数に収束し、それが実数軸の正の部分全体を含む領域に解析接続できるとする。このとき、(ii) $S(t) := \int_0^{\infty} ds\ e^{-s}\mathcal{B}[\tilde{S}(t)](s)$ が well defined ならば、$S(t)$ は $\tilde{S}(t)$ のボレル和と呼ばれる。

References

[1] S. Nakajima and Y. Utsumi, “Asymptotic expansion of the solution of the master equation and its application to the speed limit”, Phys. Rev. E **104**, 054139 (2021).

[2] 荒川 恒男, 伊吹山 知義, 金子 昌信『ベルヌーイ数とゼータ関数』牧野書店, 2001 年 (または共立出版から 2022 年に出た新装版).

[3] Bai-Ni Guo and Feng Qi, “Some identities and an explicit formula for Bernoulli and Stirling numbers”, Journal of Computational and Applied Mathematics **255**, 568 (2014).

[4] Ai-Min Xu and Zhong-Di Cen, “Closed formulas for computing higher-order derivatives of functions involving exponential functions”, Applied Mathematics and Computation **270**, 136 (2015).

[5] Feng Qi and Bai-Ni Guo, “An explicit formula for derivative polynomials of the tangent function”, Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, **9**, 348 (2017).