超ローレンツ群

中嶋 慧

2019 年 1 月 7 日 (2023 年 7 月 1 日改訂)

Abstract

このノートでは、超ローレンツ群についてまとめる。超ローレンツ群には 2 つある。1 つは、(ローレンツベクトル, ローレンツスピノール, ローレンツスカラー) の 3 つ組の内積を保つ変換である。もう 1 つは、超リー群の生成子の交換関係から定義されるものである。

このノートでは、まず前者について書き、§7 で後者について述べる。前者の観点からは、不定定数 A, B と不定行列 $\kappa(=1$ または $\gamma_{-1})$ は決まらないが、後者の観点では、$A^2 = B^2 = 1$, $\kappa = \gamma_{-1}$ とするべきと分かる。

Contents

1　ガンマ行列

ガンマ行列 $\{\gamma_a\}_{a=-1,0,1,2,3}$ を、

$$\gamma_a\gamma_b+\gamma_b\gamma_a=2\eta_{ab}\,,\quad \eta_{ab}=\mathrm{diag}(-1,-1,1,1,1) \tag{1.1}$$

で定義し、実反対称行列 $\bar{\gamma}$ を、

$$\bar{\gamma}\gamma_a\bar{\gamma}^{-1}={}^t\gamma_a\,,\quad \det(\bar{\gamma})=1 \tag{1.2}$$

で定義する。これより、

$$\bar{\gamma}=\pm\gamma_{-1}\gamma_0=\pm\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{1.3}$$

である。ここで、

$$\gamma_{-1}=\pm\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{1.4}$$

を用いた。γ を、

$$\gamma\overset{\mathrm{def}}{=}\bar{\gamma}\gamma_{-1} \tag{1.5}$$

で定義する。γ は反対称行列である。また、γ_{-1},γ_0 は反対称行列で、$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ は対称行列である。

γ^a の成分 $(\gamma^a)^\alpha{}_\beta$ と書く。$\alpha,\beta=1,2,\cdots,2^{[D/2]}=4$ である ($[A]$ はガウス記号, 今は $D=5$)。また、$\bar{\gamma}$ の成分を $(\bar{\gamma})_{\alpha\beta}$ と書く。よって、γ の成分は、$(\gamma)_{\alpha\beta}$ と書かれる。$({}^t\gamma_a)_\alpha{}^\beta=(\gamma_a)^\beta{}_\alpha$ である。

例えば、

$$\gamma_{-1}=i\sigma_2\times\sigma_3, \tag{1.6}$$
$$\gamma_0=i1\times\sigma_2, \tag{1.7}$$
$$\gamma_1=1\times\sigma_1, \tag{1.8}$$
$$\gamma_2=\sigma_1\times\sigma_3, \tag{1.9}$$
$$\gamma_3=\sigma_3\times\sigma_3, \tag{1.10}$$
$$\bar{\gamma}=i\sigma_2\times\sigma_1 \tag{1.11}$$

である。

以下、a,b などのラテン添え字は $0,1,2,3$ を表す。

また、

$$\boldsymbol{G}_{ab}\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{4}[\gamma_a,\gamma_b]=\frac{1}{4}(\gamma_a\gamma_b-\gamma_b\gamma_a) \tag{1.12}$$

とする。$\gamma\boldsymbol{G}_{ab}$ は対称行列である。

なお、γ_a は実行列に取ることが出来る。以下ではこれを仮定する。

2　超ローレンツ変換

$$X^A \stackrel{\text{def}}{=} (X^a, \chi^\alpha, X) \tag{2.1}$$

とする。ここで、X^a はローレンツベクトルで、χ^α はスピノールでグラスマン数で、X はローレンツスカラーである。超ローレンツ変換

$$X'^A = X^B \Lambda_B^{\ A} \tag{2.2}$$

は、2 次形式

$$\tilde{\eta}(X,Y) \stackrel{\text{def}}{=} X^A \tilde{\eta}_{AB} Y^B \stackrel{\text{def}}{=} X^a \eta_{ab} Y^a - i\chi^\alpha (\gamma)_{\alpha\beta} \psi^\beta - XY \tag{2.3}$$

を不変にする [1]。ここで、$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ である。また、$Y^A = (Y^a, \psi^\alpha, Y)$ である。上式を不変にする $\Lambda_B^{\ A}$ の集合を $\mathrm{O}(3,1|4)$ と書く。

今、

$$|a| = |\bullet| = 0, \quad |\alpha| = 1 \tag{2.4}$$

とすると、

$$\tilde{\eta}_{BA} = (-1)^{|A|\cdot|B|} \tilde{\eta}_{AB} \tag{2.5}$$

である。

微小の実パラメーター $\varepsilon^{ab} (= -\varepsilon^{ba})$ と微小のグラスマン数パラメーター ξ^α を用いて、微小変換

$$\delta X^a = X^b \varepsilon^a_{\ b} + A\frac{i}{2}\chi^\alpha (\gamma\kappa\gamma^a)_{\alpha\beta} \xi^\beta, \tag{2.6}$$

$$\delta\chi^\alpha = \frac{1}{2}(\boldsymbol{G}_{ab})^\alpha_{\ \beta} \chi^\beta \varepsilon^{ab} + A\frac{1}{2} X^a (\kappa\gamma_a)^\alpha_{\ \beta} \xi^\beta + B\frac{1}{\sqrt{2}} X\xi^\alpha, \tag{2.7}$$

$$\delta X = -B\frac{i}{\sqrt{2}}\chi^\alpha (\gamma)_{\alpha\beta} \xi^\beta \tag{2.8}$$

を考えると、これは (2.3) を保つ[1][1]。$\varepsilon^a_{\ b} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_{bc}\varepsilon^{ac}$, $\gamma^a \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{ab}\gamma_b$ である。η^{ab} は η_{ab} の逆である。また、[1] によると $\kappa = \gamma_{-1}$ である ($\kappa = 1$ でも良いのではないか？)。A, B は複素定数である。[1] では $A = B = 1$ であった[2]。

3　不変性の確認

3.1　ローレンツ不変性

(2.3) の不変性を確かめる。

[1] しかし、これは (2.3) を保つ一般の変換ではない。一般の場合は § 4 で議論する。

[2] § 7.3 で、標準超ローレンツ群の生成子の交換関係からは、$A^2 = B^2 = 1$, $\kappa = \gamma_{-1}$ とすべきだと分かる。

まず、ローレンツ不変性を確かめる。この場合は、X^a, χ^α, X はそれぞれ独立に変換する。(2.3) の第 1, 3 項のローレンツ不変性は明らかなので、第 2 項の不変性を確かめる。

スピノールの変換則は、以下である。ローレンツ変換 $\Lambda^a{}_b$ に対して、

$$\boldsymbol{T}\gamma_a\boldsymbol{T}^{-1} = \Lambda^b{}_a\gamma_b, \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{T}^\dagger\beta = \beta\boldsymbol{T}^{-1} \quad (\beta = i\gamma^0) \tag{3.2}$$

を満たす $\boldsymbol{T}$ によって、スピノールは、

$$\chi'^\alpha = (\boldsymbol{T})^\alpha{}_\beta\chi^\beta \tag{3.3}$$

と変換される。この時、

$$\bar{\chi} \stackrel{\text{def}}{=} \chi^\dagger\beta \tag{3.4}$$

は、

$$\bar{\chi}' = \bar{\chi}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{3.5}$$

と変換される。無限小変換は、

$$\boldsymbol{T} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\boldsymbol{G}_{ab} \tag{3.6}$$

である。

(3.3), (3.5) より、

$$-i(\chi^\alpha)^*(\gamma)_{\alpha\beta}\psi^\beta = \pm\bar{\chi}_\alpha\psi^\alpha \tag{3.7}$$

はローレンツ不変である ($-i\gamma = \pm\beta$ である)。

ところで、(3.6) を一般化すると、

$$\boldsymbol{T} = \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\boldsymbol{G}_{ab}\right) \tag{3.8}$$

である。今、γ_a は実行列と仮定しているので、

$$\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{T} \tag{3.9}$$

である。よって、$(\chi^a)^*$ と χ^a とは同じ変換則を満たす。従って、(3.7) の不変性より、

$$-i\chi^\alpha(\gamma)_{\alpha\beta}\psi^\beta \tag{3.10}$$

もローレンツ不変である。

3.2 超ローレンツ不変性

今、

$$\delta_L X^a \overset{\text{def}}{=} X^b \varepsilon^a{}_b, \tag{3.11}$$

$$\delta_A X^a \overset{\text{def}}{=} A\frac{i}{2}\chi^\alpha(\gamma\kappa\gamma^a)_{\alpha\beta}\xi^\beta, \tag{3.12}$$

$$\delta_L \chi^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\boldsymbol{G}_{ab})^\alpha{}_\beta \chi^\beta \varepsilon^{ab}, \tag{3.13}$$

$$\delta_A \chi^\alpha \overset{\text{def}}{=} A\frac{1}{2}X^a(\kappa\gamma_a)^\alpha{}_\beta \xi^\beta, \tag{3.14}$$

$$\delta_B \chi^\alpha \overset{\text{def}}{=} B\frac{1}{\sqrt{2}}X\xi^\alpha, \tag{3.15}$$

$$\delta_B X \overset{\text{def}}{=} -B\frac{i}{\sqrt{2}}\chi^\alpha(\gamma)_{\alpha\beta}\xi^\beta, \tag{3.16}$$

$$\delta_B X^a \overset{\text{def}}{=} 0, \quad \delta_L X \overset{\text{def}}{=} \delta_A X \overset{\text{def}}{=} 0 \tag{3.17}$$

と置く。また、

$$\delta X^A = \delta_L X^A + \delta_A X^A + \delta_B X^A \tag{3.18}$$

と置く。この時、

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\eta}(X,Y) &= \delta X^A \tilde{\eta}_{AB} Y^B + X^A \tilde{\eta}_{AB}\delta Y^B \\ &= \sum_{S=L,A,B}(\delta_S X^A \tilde{\eta}_{AB} Y^B + X^A\tilde{\eta}_{AB}\delta_S Y^B) \\ &\equiv \sum_{S=L,A,B}\delta_S\tilde{\eta}(X,Y)\end{aligned} \tag{3.19}$$

である。

前小節でローレンツ不変性を示したので、

$$\delta_L\tilde{\eta}(X,Y) = 0 \tag{3.20}$$

は明らかである。

次に、

$$\delta_A\tilde{\eta}(X,Y) = \delta_A X^a \eta_{ab} Y^b + X^a\eta_{ab}\delta_A Y^b + \delta_A\chi^\alpha(-i\gamma)_{\alpha\beta}\psi^\beta + \chi^\alpha(-i\gamma)_{\alpha\beta}\delta_A\psi^\beta \tag{3.21}$$

を調べる。これは、

$$\begin{aligned}&\delta_A\tilde{\eta}(X,Y) \\ &\quad = A\Big[\frac{i}{2}\chi^\alpha(\gamma\kappa\gamma^a)_{\alpha\beta}\xi^\beta\eta_{ab}Y^b + X^a\eta_{ab}\frac{i}{2}\psi^\alpha(\gamma\kappa\gamma^b)_{\alpha\beta}\xi^\beta \\ &\qquad + \frac{1}{2}X^a(\kappa\gamma_a)^\alpha{}_\gamma\xi^\gamma(-i\gamma)_{\alpha\beta}\psi^\beta + \chi^\alpha(-i\gamma)_{\alpha\beta}\frac{1}{2}X^a(\kappa\gamma_a)^\beta{}_\gamma\xi^\gamma\Big]\end{aligned} \tag{3.22}$$

である。第 1,4 項はキャンセルする。また、第 3 項は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}X^a(\kappa\gamma_a)^\alpha{}_\gamma\xi^\gamma(-i\gamma)_{\alpha\beta}\psi^\beta &= \frac{1}{2}X^a(\kappa\gamma_a)^\alpha{}_\gamma\xi^\gamma(i\gamma)_{\beta\alpha}\psi^\beta \\ &= \frac{1}{2}X^a(i\gamma\kappa\gamma_a)_{\beta\gamma}\xi^\gamma\psi^\beta \\ &= -\frac{1}{2}X^a(i\gamma\kappa\gamma_a)_{\beta\gamma}\psi^\beta\xi^\gamma \end{aligned} \tag{3.23}$$

なので、第 2 項とキャンセルする。よって、

$$\delta_A\tilde{\eta}(X,Y) = 0 \tag{3.24}$$

である。

最後に、

$$\delta_B\tilde{\eta}(X,Y) = \delta_B\chi^\alpha(-i\gamma)_{\alpha\beta}\psi^\beta + \chi^\alpha(-i\gamma)_{\alpha\beta}\delta_B\psi^\beta - \delta_BXY - X\delta_BY \tag{3.25}$$

を調べる。これは、

$$\begin{aligned}&\delta_B\tilde{\eta}(X,Y) \\ &\quad= B\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}X\xi^\alpha(-i\gamma)_{\alpha\beta}\psi^\beta + \chi^\alpha(-i\gamma)_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{2}}Y\xi^\beta \\ &\qquad+\frac{i}{\sqrt{2}}\chi^\alpha(\gamma)_{\alpha\beta}\xi^\beta Y + X\frac{i}{\sqrt{2}}\psi^\alpha(\gamma)_{\alpha\beta}\xi^\beta\Big]\end{aligned} \tag{3.26}$$

である。第 2,3 項はキャンセルする。第 4 項は、

$$\begin{aligned}X\frac{i}{\sqrt{2}}\psi^\alpha(\gamma)_{\alpha\beta}\xi^\beta &= -X\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma)_{\alpha\beta}\xi^\beta\psi^\alpha \\ &= X\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma)_{\beta\alpha}\xi^\beta\psi^\alpha\end{aligned} \tag{3.27}$$

なので、第 1 項とキャンセルする。よって、

$$\delta_B\tilde{\eta}(X,Y) = 0 \tag{3.28}$$

である。

以上より、(2.3) の不変性が示された。

3.3 超ローレンツ変換の特殊化

$B = 0$ の場合を考える。この時、$X^A = (X^a, \chi^\alpha)$ に対して、

$$\tilde{\eta}_0(X,Y) \stackrel{\text{def}}{=} X^A\tilde{\eta}_{AB}Y^B \stackrel{\text{def}}{=} X^a\eta_{ab}Y^a - i\chi^\alpha(\gamma)_{\alpha\beta}\psi^\beta \tag{3.29}$$

が不変となる。微小変換は、

$$\delta X^a = X^b\varepsilon^a{}_b + A\frac{i}{2}\chi^\alpha(\gamma\kappa\gamma^a)_{\alpha\beta}\xi^\beta, \tag{3.30}$$

$$\delta\chi^\alpha = \frac{1}{2}(\boldsymbol{G}_{ab})^\alpha{}_\beta\chi^\beta\varepsilon^{ab} + A\frac{1}{2}X^a(\kappa\gamma_a)^\alpha{}_\beta\xi^\beta \tag{3.31}$$

である。

4　一般の超ローレンツ変換

独立なグラスマン数パラメーター ξ^α, θ^α を導入して、$A\xi^\alpha$ と $B\xi^\alpha$ を $A'\xi^\alpha$, $B'\theta^\alpha$ に置き換えることが出来る。A', B' は複素定数である。ε^{ab} はローレンツ変換のパラメーター, ξ^α はベクトルとスピノールとの間の回転のパラメーター, θ^α はスピノールとスカラーとの間の回転のパラメーターである。更に、ベクトルとスカラーとの間の回転を、実パラメーター λ^a を導入して表す事が出来る：

$$\delta X^a = X^b\varepsilon^a{}_b + A'\frac{i}{2}\chi^\alpha(\gamma\kappa\gamma^a)_{\alpha\beta}\xi^\beta + X\lambda^a, \tag{4.1}$$

$$\delta\chi^\alpha = \frac{1}{2}(\boldsymbol{G}_{ab})^\alpha{}_\beta\chi^\beta\varepsilon^{ab} + A'\frac{1}{2}X^a(\kappa\gamma_a)^\alpha{}_\beta\xi^\beta + B'\frac{1}{\sqrt{2}}X\theta^\alpha, \tag{4.2}$$

$$\delta X = -B'\frac{i}{\sqrt{2}}\chi^\alpha(\gamma)_{\alpha\beta}\theta^\beta + X^a\lambda_a. \tag{4.3}$$

今、

$$\delta_\lambda X^\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} X\lambda^a, \quad \delta_\lambda X \stackrel{\mathrm{def}}{=} X^a\lambda_a, \quad \delta_\lambda\chi^\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0 \tag{4.4}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\delta_\lambda\tilde{\eta}(X,Y) &= \delta_\lambda X^a\eta_{ab}Y^b + X^a\eta_{ab}\delta_\lambda Y^b - \delta_\lambda XY - X\delta_\lambda Y \\ &= X\lambda^a\eta_{ab}Y^b + X^a\eta_{ab}Y\lambda^b - X^a\lambda_aY - XY^a\lambda_a \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.5}$$

である。

5　$O(3,1|4)$

Δ を、

$$\Delta(X^A) = (-1)^{|A|} \tag{5.1}$$

で定義する。Δ の引数がグラスマン偶なら 1 で、グラスマン奇なら -1 である。このとき、

$$\Delta(X^B\Lambda^A{}_B) = \Delta(X^B)\Delta(\Lambda^A{}_B) = \Delta(X^A) \tag{5.2}$$

なので、

$$\Delta(\Lambda^A{}_B) = (-1)^{|A|-|B|} \tag{5.3}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}X^B\Lambda^A{}_B &= (-1)^{(|A|-|B|)|B|}\Lambda^A{}_BX^B \\ &= (-1)^{(|A|-1)|B|}\Lambda^A{}_BX^B\end{aligned} \tag{5.4}$$

となる。従って、O$(3,1|4)$ は、

$$\mathrm{O}(3,1|4) = \{\Lambda^A{}_B|\Lambda^C{}_A\tilde{\eta}_{CD}(-1)^{(|D|-1)|B|}\Lambda^D{}_B = \tilde{\eta}_{AB}\} \tag{5.5}$$

である。

6　$\delta\Lambda^A{}_B$ の対称性

無限小の超ローレンツ変換を $\Lambda^A{}_B = \delta^A{}_B + \delta\Lambda^A{}_B$ と書く。ただし、$X^{A=\bullet} = X$ とする。このとき、

$$
\begin{aligned}
\delta\Lambda^a{}_b &= \varepsilon^a{}_b, &(6.1)\\
\delta\Lambda^a{}_\alpha &= \frac{i}{2}(\gamma\kappa\gamma^a)_{\alpha\beta}\xi^\beta, &(6.2)\\
\delta\Lambda^a{}_\bullet &= \lambda^a, &(6.3)\\
\delta\Lambda^\alpha{}_a &= \frac{1}{2}(\kappa\gamma_a)^\alpha{}_\beta\xi^\beta, &(6.4)\\
\delta\Lambda^\alpha{}_\beta &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{G}_{ab})^\alpha{}_\beta\varepsilon^{ab}, &(6.5)\\
\delta\Lambda^\alpha{}_\bullet &= \frac{1}{\sqrt{2}}\theta^\alpha, &(6.6)\\
\delta\Lambda^\bullet{}_a &= \lambda_a, &(6.7)\\
\delta\Lambda^\bullet{}_\alpha &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma)_{\alpha\beta}\theta^\beta, &(6.8)\\
\delta\Lambda^\bullet{}_\bullet &= 0 &(6.9)
\end{aligned}
$$

となる。また、

$$
\lambda_{AB} \overset{\text{def}}{=} \tilde{\eta}_{AB}\delta\Lambda^A{}_B \tag{6.10}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
\lambda_{ab} &= \varepsilon_{ab}, &(6.11)\\
\lambda_{a\alpha} &= \frac{i}{2}(\gamma\kappa\gamma_a)_{\alpha\beta}\xi^\beta, &(6.12)\\
\lambda_{a\bullet} &= \lambda_a, &(6.13)\\
\lambda_{\alpha a} &= -\frac{i}{2}(\gamma\kappa\gamma_a)_{\alpha\beta}\xi^\beta, &(6.14)\\
\lambda_{\alpha\beta} &= -\frac{i}{2}(\gamma\boldsymbol{G}_{ab})_{\alpha\beta}\varepsilon^{ab}, &(6.15)\\
\lambda_{\alpha\bullet} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma)_{\alpha\beta}\theta^\beta, &(6.16)\\
\lambda_{\bullet a} &= -\lambda_a, &(6.17)\\
\lambda_{\bullet\alpha} &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma)_{\alpha\beta}\theta^\beta, &(6.18)\\
\lambda_{\bullet\bullet} &= 0 &(6.19)
\end{aligned}
$$

となる。対称性は、

$$
\lambda_{AB} = -(-1)^{|A|\cdot|B|}\lambda_{BA} \tag{6.20}
$$

となる。

7　超ローレンツ群の生成子

7.1　生成子の交換関係

標準超ローレンツ群を、その群の生成子が以下の交換関係を満たすものとして定める。ローレンツ群の生成子を G_{ab} とすると、標準超ローレンツ群の生成子は、G_{ab}, G_α であり、交換関係は、

$$[G_{ab}, G_{cd}] = \eta_{ad}G_{bc} + \eta_{bc}G_{ad} - \eta_{ac}G_{bd} - \eta_{bd}G_{ac} \tag{7.1}$$

および、

$$[G_{ab}, G_\alpha] = G_\beta(\boldsymbol{G}_{ab})^\beta{}_\alpha, \tag{7.2}$$

$$\{G_\alpha, G_\beta\} = \frac{i}{2}G_{ab}(\gamma\boldsymbol{G}^{ab})_{\alpha\beta} \tag{7.3}$$

である [1, 2]。

これは、(2.6) から (2.8) で A, B および κ が、

$$A^2 = B^2 = 1\,, \quad \kappa = \gamma_{-1} \tag{7.4}$$

の場合であることを§7.3 で確かめる。

7.2　随伴表現

今、

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}G_{ab} + G_\alpha\xi^\alpha\right) \tag{7.5}$$

とし、その $X^A = X^{ab}(= -X^{ba}), \chi^\alpha(X^{ab}$ は反対称ローレンツテンソル) による表現 (随伴表現) を考える。このとき、

$$X'^A = (T)^A{}_B X^B \tag{7.6}$$

である。微小変換では、

$$(T)^A{}_B = \delta^A{}_B + \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}(G_{ab})^A{}_B + (G_\alpha)^A{}_B\xi^\alpha \tag{7.7}$$

である。まず、

$$(G_{ab})^{ef}{}_{cd} = 4\eta_{g[b}\delta^{[e}_{a]}\delta^{f]}_{[d}\delta^g_{c]}, \tag{7.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}(G_{ab})^{ef}{}_{cd}X^{cd} &= 2\varepsilon^{ab}\eta_{gb}\delta^{[e}_a\delta^{f]}_d\delta^g_c X^{cd} \\ &= \varepsilon^{eb}\eta_{cb}X^{cf} - \varepsilon^{fb}\eta_{cb}X^{ce} \\ &= \varepsilon^e{}_c X^{cf} + \varepsilon^f{}_c X^{ec}\end{aligned} \tag{7.9}$$

である。また、

$$(G_{ab})^{\alpha}{}_{\beta} = (\boldsymbol{G}_{ab})^{\alpha}{}_{\beta} \tag{7.10}$$

で、G_{ab} の他の成分は 0 である。次に、

$$(G_{\alpha})^{ab}{}_{\beta} = \frac{i}{2}(\gamma \boldsymbol{G}^{ab})_{\alpha\beta}, \tag{7.11}$$
$$(G_{\alpha})^{\beta}{}_{ab} = -(\boldsymbol{G}_{ab})^{\beta}{}_{\alpha} \tag{7.12}$$

である。よって、

$$\delta X^{ef} = \varepsilon^{e}{}_{c} X^{cf} + \varepsilon^{f}{}_{c} X^{ec} - \chi^{\beta} \frac{i}{2}(\gamma \boldsymbol{G}^{ef})_{\alpha\beta} \xi^{\alpha}, \tag{7.13}$$
$$\delta \chi^{\alpha} = \frac{1}{2} \chi^{\beta} (\boldsymbol{G}_{ab})^{\alpha}{}_{\beta} \varepsilon^{ab} - X^{ab} (\boldsymbol{G}_{ab})^{\alpha}{}_{\beta} \xi^{\beta} \tag{7.14}$$

を得る。[1] では、

$$\delta X^{ef} = \varepsilon^{e}{}_{c} X^{cf} + \varepsilon^{f}{}_{c} X^{ec} + \chi^{\beta} i(\gamma \boldsymbol{G}^{ef})_{\alpha\beta} \xi^{\alpha}, \tag{7.15}$$
$$\delta \chi^{\alpha} = \frac{1}{2} \chi^{\beta} (\boldsymbol{G}_{ab})^{\alpha}{}_{\beta} \varepsilon^{ab} - \frac{1}{2} X^{ab} (\boldsymbol{G}_{ab})^{\alpha}{}_{\beta} \xi^{\beta} \tag{7.16}$$

となっているが…。

7.3　3 つ組による表現

3 つ組 $X^{A} = (X^{a}, \chi^{\alpha}, X)$ による表現を考える。

7.3.1　生成子の行列成分

明らかに、

$$(G_{ab})^{c}{}_{d} = \delta^{c}_{a} \eta_{bd} - \delta^{c}_{b} \eta_{ad}, \tag{7.17}$$
$$(G_{ab})^{\alpha}{}_{\beta} = (\boldsymbol{G}_{ab})^{\alpha}{}_{\beta} \tag{7.18}$$

で、G_{ab} の他の成分は 0 である。(2.6) から (2.8) より、

$$(G_{\beta})^{a}{}_{\alpha} = -A \frac{i}{2} (\gamma \kappa \gamma^{a})_{\alpha\beta}, \tag{7.19}$$
$$(G_{\beta})^{\alpha}{}_{a} = A \frac{1}{2} (\kappa \gamma_{a})^{\alpha}{}_{\beta}, \tag{7.20}$$
$$(G_{\beta})^{\alpha}{}_{\bullet} = B \frac{1}{\sqrt{2}} \delta^{\alpha}_{\beta}, \tag{7.21}$$
$$(G_{\beta})^{\bullet}{}_{\alpha} = B \frac{i}{\sqrt{2}} (\gamma)_{\alpha\beta} \tag{7.22}$$

であり、G_{α} の他の成分は 0 である。

7.3.2 $\{G_\alpha, G_\beta\}$

まず、

$$(G_\alpha G_\beta)^A{}_B = (G_\alpha)^A{}_c (G_\beta)^c{}_B + (G_\alpha)^A{}_\gamma (G_\beta)^\gamma{}_B + (G_\alpha)^A{}_\bullet (G_\beta)^\bullet{}_B \tag{7.23}$$

であり、これより、

$$(G_\alpha G_\beta)^a{}_\gamma = 0 \tag{7.24}$$

であり、

$$\begin{aligned}(G_\alpha G_\beta)^a{}_\bullet &= (G_\alpha)^a{}_\gamma (G_\beta)^\gamma{}_\bullet \\ &= -A\frac{i}{2}(\gamma\kappa\gamma^a)_{\gamma\alpha} B\frac{1}{\sqrt{2}}\delta^\gamma_\beta \\ &= -AB\frac{i}{2\sqrt{2}}(\gamma\kappa\gamma^a)_{\beta\alpha}\end{aligned} \tag{7.25}$$

である。よって、

$$(\{G_\alpha, G_\beta\})^a{}_\bullet = -AB\frac{i}{2\sqrt{2}}[(\gamma\kappa\gamma^a) + {}^t(\gamma\kappa\gamma^a)]_{\beta\alpha} \tag{7.26}$$

である。$\kappa = 1$ の時、

$$\begin{aligned}{}^t(\gamma\kappa\gamma^a) &= -\sigma_{(a)}\gamma^a\gamma \\ &= \gamma\gamma^a\end{aligned} \tag{7.27}$$

である。ここで、$\sigma_{(a)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \eta_{aa}$ であり、

$${}^t\gamma_a = \sigma_{(a)}\gamma_a, \tag{7.28}$$

$$\gamma_a\gamma = -\sigma_{(a)}\gamma\gamma^a \tag{7.29}$$

を用いた。また、$\kappa = \gamma_{-1}$ の時、

$$\begin{aligned}{}^t(\gamma\kappa\gamma^a) &= \sigma_{(a)}\gamma^a\gamma_{-1}\gamma \\ &= -\sigma_{(a)}\gamma^a\gamma\gamma_{-1} \\ &= \gamma\gamma^a\gamma_{-1} \\ &= -\gamma\gamma_{-1}\gamma^a\end{aligned} \tag{7.30}$$

である。よって、

$$(\{G_\alpha, G_\beta\})^a{}_\bullet = 0 \tag{7.31}$$

のためには、

$$\kappa = \gamma_{-1} \tag{7.32}$$

である必要がある。以下、これを仮定する。
　また、

$$
\begin{aligned}
(G_\alpha G_\beta)^a{}_b &= (G_\alpha)^a{}_\gamma (G_\beta)^\gamma{}_b \\
&= -A\frac{i}{2}(\gamma\kappa\gamma^a)_{\gamma\alpha} A\frac{1}{2}(\kappa\gamma_b)^\gamma{}_\beta \\
&= -A^2\frac{i}{4}[-(\gamma\kappa\gamma^a)_{\alpha\gamma}](\kappa\gamma_b)^\gamma{}_\beta \\
&= \frac{i}{4}A^2(\gamma\kappa\gamma^a\kappa\gamma_b)_{\alpha\beta} \qquad (7.33)
\end{aligned}
$$

よって、

$$
(\{G_\alpha, G_\beta\})_{ab} = \frac{i}{4}A^2[(\gamma\kappa\gamma_a\kappa\gamma_b) + {}^t(\gamma\kappa\gamma_a\kappa\gamma_b)]_{\alpha\beta} \qquad (7.34)
$$

である。ところで、

$$
\begin{aligned}
\gamma\kappa\gamma_a\kappa\gamma_b &= \gamma\gamma_{-1}\gamma_a\gamma_{-1}\gamma_b \\
&= -\gamma\gamma_{-1}^2\gamma_a\gamma_b \\
&= \gamma\gamma_a\gamma_b, \qquad (7.35) \\
{}^t(\gamma\kappa\gamma_a\kappa\gamma_b) &= -\sigma_{(a)}\sigma_{(b)}\gamma_b\gamma_a\gamma \\
&= -\gamma\gamma_b\gamma_a \qquad (7.36)
\end{aligned}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
(\{G_\alpha, G_\beta\})_{ab} &= \frac{i}{4}A^2(\gamma[\gamma_a, \gamma_b])_{\alpha\beta} \\
&= iA^2(\gamma\boldsymbol{G}_{ab})_{\alpha\beta} \qquad (7.37)
\end{aligned}
$$

である。ところで、(7.3) より、

$$
\begin{aligned}
(\{G_\alpha, G_\beta\})_{ab} &= \frac{i}{2}(G_{cd})_{ab}(\gamma\boldsymbol{G}^{cd})_{\alpha\beta} \\
&= \frac{i}{2}(\eta_{ca}\eta_{bd} - \eta_{cb}\eta_{ad})(\gamma\boldsymbol{G}^{cd})_{\alpha\beta} \\
&= i(\gamma\boldsymbol{G}_{ab})_{\alpha\beta} \qquad (7.38)
\end{aligned}
$$

なので、

$$
A^2 = 1 \qquad (7.39)
$$

であるべき。
　また、

$$
\begin{aligned}
(G_\alpha G_\beta)^\gamma{}_\delta &= (G_\alpha)^\gamma{}_a (G_\beta)^a{}_\delta + (G_\alpha)^\gamma{}_\bullet (G_\beta)^\bullet{}_\delta \\
&= A\frac{1}{2}(\kappa\gamma_a)^\gamma{}_\alpha(-A)\frac{i}{2}(\gamma\kappa\gamma^a)_{\delta\beta} + B\frac{1}{\sqrt{2}}\delta^\gamma_\alpha B\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma)_{\delta\beta} \\
&= -\frac{i}{4}A^2(\kappa\gamma_a)^\gamma{}_\alpha(\gamma\kappa\gamma^a)_{\delta\beta} + B^2\frac{i}{2}\delta^\gamma_\alpha(\gamma)_{\delta\beta} \qquad (7.40)
\end{aligned}
$$

である。

　また、

$$(G_\alpha G_\beta)^\gamma{}_\bullet = 0 \tag{7.41}$$

であり、

$$\begin{aligned}(G_\alpha G_\beta)^\bullet{}_a &= (G_\alpha)^\bullet{}_\gamma (G_\beta)^\gamma{}_a \\ &= B\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma)_{\gamma\alpha} A\frac{1}{2}(\kappa\gamma_a)^\gamma{}_\beta \\ &= -AB\frac{i}{2\sqrt{2}}(\gamma)_{\alpha\gamma}(\kappa\gamma_a)^\gamma{}_\beta \\ &= -AB\frac{i}{2\sqrt{2}}(\gamma\kappa\gamma_a)_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{7.42}$$

である。よって、

$$(\{G_\alpha, G_\beta\})^\bullet{}_a = 0 \tag{7.43}$$

である。

　また、

$$(G_\alpha G_\beta)^\bullet{}_\gamma = 0 \tag{7.44}$$

であり、

$$\begin{aligned}(G_\alpha G_\beta)^\bullet{}_\bullet &= (G_\alpha)^\bullet{}_\gamma (G_\beta)^\gamma{}_\bullet \\ &= B\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma)_{\gamma\alpha} B\frac{1}{\sqrt{2}}\delta^\gamma_\beta \\ &= B^2\frac{i}{2}(\gamma)_{\beta\alpha}\end{aligned} \tag{7.45}$$

であり、

$$(\{G_\alpha, G_\beta\})^\bullet{}_\bullet = 0 \tag{7.46}$$

となる。

　以上より、(7.3) は、${}^\gamma{}_\delta$ 成分以外は確かめられた。

7.3.3　B の決定

　(7.40) より、

$$\begin{aligned}(\{G_\alpha, G_\beta\})^\gamma{}_\delta = &-\frac{i}{4}A^2[(\kappa\gamma_a)^\gamma{}_\alpha(\gamma\kappa\gamma^a)_{\delta\beta} + (\kappa\gamma_a)^\gamma{}_\beta(\gamma\kappa\gamma^a)_{\delta\alpha}] \\ &+B^2\frac{i}{2}[\delta^\gamma_\alpha(\gamma)_{\delta\beta} + \delta^\gamma_\beta(\gamma)_{\delta\alpha}]\end{aligned} \tag{7.47}$$

である。$\gamma = \beta$ として、

$$
\begin{aligned}
(\{G_\alpha, G_\beta\})^\beta{}_\delta = -\frac{i}{4}A^2[(\kappa\gamma_a)^\beta{}_\alpha(\gamma\kappa\gamma^a)_{\delta\beta} + (\kappa\gamma_a)^\beta{}_\beta(\gamma\kappa\gamma^a)_{\delta\alpha}] \\
+B^2\frac{i}{2}[\delta^\beta_\alpha(\gamma)_{\delta\beta} + D(\gamma)_{\delta\alpha}]
\end{aligned} \tag{7.48}
$$

である。$\gamma_{-1}\gamma_a + \gamma_a\gamma_{-1} = 0$ より、$(\kappa\gamma_a)^\beta{}_\beta = 0$ である。よって、

$$
\begin{aligned}
(\{G_\alpha, G_\beta\})^\beta{}_\delta &= -\frac{i}{4}A^2(\gamma\kappa\gamma^a\kappa\gamma_a)_{\delta\alpha} + B^2\frac{i}{2}(D+1)(\gamma)_{\delta\alpha} \\
&= -\frac{iD}{4}A^2(\gamma)_{\delta\alpha} + B^2\frac{i}{2}(D+1)(\gamma)_{\delta\alpha} \\
&= i(\gamma)_{\delta\alpha}\Big[-\frac{D}{4}A^2 + \frac{B^2}{2}(D+1)\Big]
\end{aligned} \tag{7.49}
$$

である。一方、(7.3) より、

$$
(\{G_\alpha, G_\beta\})^\gamma{}_\delta = \frac{i}{2}(\boldsymbol{G}_{ab})^\gamma{}_\delta(\gamma\boldsymbol{G}^{ab})_{\alpha\beta} \tag{7.50}
$$

なので、

$$
(\{G_\alpha, G_\beta\})^\beta{}_\delta = \frac{i}{2}(\gamma\boldsymbol{G}^{ab}\boldsymbol{G}_{ab})_{\alpha\delta} \tag{7.51}
$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}^{ab}\boldsymbol{G}_{ab} &= \frac{1}{8}\gamma^a\gamma^b(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a) \\
&= \frac{1}{8}(\gamma^a\gamma^b\gamma_a\gamma_b - \gamma^a\gamma^b\gamma_b\gamma_a) \\
&= \frac{1}{8}(\gamma^a\gamma^b\gamma_a\gamma_b - D^2) \\
&= \frac{1}{8}(\gamma^a\gamma^b(2\eta_{ab} - \gamma_b\gamma_a) - D^2) \\
&= \frac{1}{4}(D - D^2)
\end{aligned} \tag{7.52}
$$

なので、

$$
(\{G_\alpha, G_\beta\})^\beta{}_\delta = \frac{1}{8}(D^2 - D)i(\gamma)_{\delta\alpha} \tag{7.53}
$$

となる。よって、

$$
-\frac{D}{4}A^2 + \frac{B^2}{2}(D+1) = \frac{1}{8}(D^2 - D), \tag{7.54}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{B^2}{2}(D+1) &= \frac{1}{8}(D^2 - D) + \frac{D}{4}A^2 \\
B^2\frac{5}{2} &= \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}, \\
B^2 &= 1
\end{aligned} \tag{7.55}
$$

となる。

7.3.4 $[G_{ab}, G_\alpha]$

$$(G_{ab}G_\beta)^A{}_B = (G_{ab})^A{}_c(G_\beta)^c{}_B + (G_{ab})^A{}_\gamma(G_\beta)^\gamma{}_B + (G_{ab})^A{}_\bullet(G_\beta)^\bullet{}_B, \tag{7.56}$$
$$(G_\beta G_{ab})^A{}_B = (G_\beta)^A{}_c(G_{ab})^c{}_B + (G_\beta)^A{}_\gamma(G_{ab})^\gamma{}_B + (G_\beta)^A{}_\bullet(G_{ab})^\bullet{}_B \tag{7.57}$$

である。よって、

$$(G_{ab}G_\alpha)^c{}_d = 0, \tag{7.58}$$
$$(G_\alpha G_{ab})^c{}_d = 0 \tag{7.59}$$

である。また、

$$\begin{aligned}(G_{ab}G_\beta)^c{}_\alpha &= (G_{ab})^c{}_d(G_\beta)^d{}_\alpha \\ &= (\delta^c_a\eta_{bd} - \delta^c_b\eta_{ad})(-A)\frac{i}{2}(\gamma\kappa\gamma^d)_{\alpha\beta} \\ &= -A\frac{i}{2}[\delta^c_a(\gamma\kappa\gamma_b)_{\alpha\beta} - \delta^c_b(\gamma\kappa\gamma_a)_{\alpha\beta}]\end{aligned} \tag{7.60}$$

であり、

$$\begin{aligned}(G_\beta G_{ab})^c{}_\alpha &= (G_\beta)^c{}_\gamma(G_{ab})^\gamma{}_\alpha \\ &= -A\frac{i}{2}(\gamma\kappa\gamma^c)_{\gamma\beta}(\boldsymbol{G}_{ab})^\gamma{}_\alpha \\ &= A\frac{i}{2}(\gamma\kappa\gamma^c)_{\beta\gamma}(\boldsymbol{G}_{ab})^\gamma{}_\alpha \\ &= A\frac{i}{2}(\gamma\kappa\gamma^c\boldsymbol{G}_{ab})_{\beta\alpha}\end{aligned} \tag{7.61}$$

である。よって、

$$([G_{ab}, G_\beta])^c{}_\alpha = -A\frac{i}{2}[\delta^c_a(\gamma\kappa\gamma_b)_{\alpha\beta} - \delta^c_b(\gamma\kappa\gamma_a)_{\alpha\beta} + (\gamma\kappa\gamma^c\boldsymbol{G}_{ab})_{\beta\alpha}] \tag{7.62}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\gamma^c\boldsymbol{G}_{ab} &= \gamma^c\frac{1}{4}(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a) \\ &= \frac{1}{4}[(2\delta^c_a - \gamma_a\gamma^c)\gamma_b - (2\delta^c_b - \gamma_b\gamma^c)\gamma_a] \\ &= \frac{1}{4}[2\delta^c_a\gamma_b - \gamma_a\gamma^c\gamma_b - 2\delta^c_b\gamma_a + \gamma_b\gamma^c\gamma_a] \\ &= \frac{1}{4}[2\delta^c_a\gamma_b - 2\delta^c_b\gamma_a + \gamma_a\gamma_b\gamma^c - 2\delta^c_b\gamma_a + 2\delta^a_c\gamma_b - \gamma_b\gamma_a\gamma^c] \\ &= \delta^c_a\gamma_b - \delta^c_b\gamma_a + \boldsymbol{G}_{ab}\gamma^c\end{aligned} \tag{7.63}$$

である。また、

$$\begin{aligned}{}^t(\gamma\kappa\gamma^c\boldsymbol{G}_{ab}) &= -\sigma_{(a)}\sigma_{(b)}\sigma_{(c)}\boldsymbol{G}_{ab}\gamma^c\gamma_{-1}\gamma \\ &= \sigma_{(a)}\sigma_{(b)}\sigma_{(c)}\boldsymbol{G}_{ab}\gamma^c\gamma\gamma_{-1} \\ &= -\gamma\boldsymbol{G}_{ab}\gamma^c\gamma_{-1} \\ &= \gamma\gamma_{-1}\boldsymbol{G}_{ab}\gamma^c\end{aligned} \tag{7.64}$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
(\gamma\kappa\gamma^c \boldsymbol{G}_{ab})_{\beta\alpha} &= (\gamma\gamma_{-1}\boldsymbol{G}_{ab}\gamma^c)_{\alpha\beta} \\
&= (\gamma\gamma_{-1}\gamma^c \boldsymbol{G}_{ab})_{\alpha\beta} - \delta^c_a(\gamma\kappa\gamma_b)_{\alpha\beta} + \delta^c_b(\gamma\kappa\gamma_a)_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{7.65}
$$

であり、

$$
([G_{ab}, G_\beta])^c{}_\alpha = -A\frac{i}{2}(\gamma\kappa\gamma^c \boldsymbol{G}_{ab})_{\alpha\beta} \tag{7.66}
$$

である。一方、

$$
\begin{aligned}
(G_\gamma)^c{}_\alpha(\boldsymbol{G}_{ab})^\gamma{}_\beta &= -A\frac{i}{2}(\gamma\kappa\gamma^c)_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{G}_{ab})^\gamma{}_\beta \\
&= -A\frac{i}{2}(\gamma\kappa\gamma^c \boldsymbol{G}_{ab})_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{7.67}
$$

である。よって、

$$
([G_{ab}, G_\beta])^c{}_\alpha = (G_\gamma)^c{}_\alpha(\boldsymbol{G}_{ab})^\gamma{}_\beta \tag{7.68}
$$

となる。

(7.2) の他の成分も同様に確かめられるだろう。

References

[1] Bryce DeWitt, “Supermanifolds”(Cambridge University Press, 2 版, 1992 年).

[2] 中嶋慧「超リー群」
http://physnakajima.html.xdomain.jp/super_Lie.pdf