# 超リー群

中嶋 慧

2019 年 1 月 7 日 (2023 年 6 月 30 日改訂)

**Abstract**

このノートでは、リーの構造定数から超リー群の構造定数を作る方法についてまとめる。応用例として、超ド・ジッター群, 超ポアンカレ群, 超ポアンカレ群についてまとめた。

このノートは文献 [1] を参考にした。

# Contents



# 1 一般の超リー群の場合

リー群 $G$ の各元が、$n$ 個の実パラメーターで特徴付けられるように、超リー群 $\tilde{G}$ の各元は、$n$ 個の実パラメーター $\varepsilon^a$ と、$q$ 個のグラスマン数パラメーター $\xi^\alpha$ で特徴付けられる。まとめて、

$$\varepsilon^A = (\varepsilon^a, \xi^\alpha) \tag{1.1}$$

と書く。

$$|a| \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad |\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} 1 \tag{1.2}$$

と置く。

$\varepsilon^A = 0$ が単位元に対応するとする。$\tilde{G}$ のうち、$\xi^\alpha = 0$ とした部分分がリー群 $G$ になるとする。

超リー群 $\tilde{G}$ の超多様体 $\Phi$ への作用を考える。$\Phi$ の座標を $\phi^i$ と書く。$\phi^i$ が実数のとき $|i|=0$, $\phi^i$ がグラスマン数のとき $|i|=1$ とする。微分可能な写像 $R:\tilde{G}\times\Phi\to\Phi$ は、

$$R(e,\phi)=\phi, \tag{1.3}$$

$$R(xy,\phi)=R(x,R(y,\phi)) \tag{1.4}$$

を満たすとする。$e$ は $\tilde{G}$ の単位元である。特に、

$$R^i(x,\phi)=D^i{}_j(x)\phi^j \tag{1.5}$$

の場合、$D(x)=(D^i{}_j(x))$ は表現行列となる：

$$D(e)=1, \tag{1.6}$$

$$D(xy)=D(x)D(y). \tag{1.7}$$

さて、単位元の付近で、

$$D^i{}_j(x(\varepsilon))=\delta^i{}_j+(-1)^{|A|\cdot|j|}G^i{}_{Aj}\varepsilon^A+\mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{1.8}$$

で書けるとする。または、

$$G^i{}_{Aj}\stackrel{\text{def}}{=}(-1)^{|A|\cdot|j|}D^i{}_j(x(\varepsilon))\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\varepsilon^A}\Big|_{\varepsilon^A=0} \tag{1.9}$$

である。ここで、$\varepsilon^A$ の関数 $f(\varepsilon)$ について、

$$f(\varepsilon+\delta\varepsilon)=f(\varepsilon)+f\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\varepsilon^A}\delta\varepsilon^A=f(\varepsilon)+\delta\varepsilon^A\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\varepsilon^A}f \tag{1.10}$$

で、偏微分を定義した。

$G^i{}_{Aj}$ に対して、

$$G^i{}_{Ak}G^k{}_{Bj}-(-1)^{|A|\cdot|B|}G^i{}_{Bk}G^k{}_{Aj}=(-1)^{|j|(|A|+|B|-|C|)}G^i{}_{Cj}c^C{}_{AB} \tag{1.11}$$

が成り立つ。ここで、$c^C{}_{AB}$ は $\tilde{G}$ の構造定数で、

$$c^C{}_{AB}=-(-1)^{|A|\cdot|B|}c^C{}_{BA} \tag{1.12}$$

とヤコビ恒等式

$$c^D{}_{AE}c^E{}_{BC}+(-1)^{|A|(|B|+|C|)}c^D{}_{BE}c^E{}_{CA}+(-1)^{|C|(|A|+|B|)}c^D{}_{CE}c^E{}_{AB}=0 \tag{1.13}$$

を満たす。

今、

$$G_A\stackrel{\text{def}}{=}(G^i{}_{Aj}) \tag{1.14}$$

とし、

$$[G_A,G_B\}\stackrel{\text{def}}{=}G_AG_B-(-1)^{|A|\cdot|B|}G_BG_A \tag{1.15}$$

とすると、(1.11) は、

$$([G_A,G_B\})^i{}_j=(-1)^{|j|(|A|+|B|-|C|)}(G_C)^i{}_jc^C{}_{AB} \tag{1.16}$$

となる。

## 2　構造定数が複素数の場合

以下では、

$$c^{C}{}_{AB} = 0 \quad (|A| + |B| - |C| \equiv 1 \bmod 2) \tag{2.1}$$

の場合を考える。この場合、(1.16) は、

$$[G_A, G_B\} = G_C c^{C}{}_{AB} \tag{2.2}$$

となる。

今、

$$(c_A)^B{}_C \stackrel{\mathrm{def}}{=} (c^{B}{}_{AC}) \tag{2.3}$$

とすると、(2.1) より、

$$c_a = \begin{pmatrix} c^{b}{}_{ac} & 0 \\ 0 & c^{\beta}{}_{a\gamma} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$$c_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & c^{b}{}_{\alpha\gamma} \\ c^{\beta}{}_{\alpha c} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

となる。また、(1.13) は、

$$[c_A, c_B\} = c_C c^{C}{}_{AB} \tag{2.6}$$

となる。(2.6) より、

$$[c_a, c_b] = c_c c^{c}{}_{ab} \tag{2.7}$$

である[1)]。今、

$$(\boldsymbol{G}_a)^\beta{}_\gamma \stackrel{\mathrm{def}}{=} c^{\beta}{}_{a\gamma} \tag{2.8}$$

とすると、(2.7) より、

$$[\boldsymbol{G}_a, \boldsymbol{G}_b] = \boldsymbol{G}_c c^{c}{}_{ab} \tag{2.9}$$

を得る。これは、$\boldsymbol{G}_a$ はリー群 $G$ の生成子の表現である。

また、

$$c^{\beta}{}_{\alpha c} = -c^{\beta}{}_{c\alpha} = -(\boldsymbol{G}_c)^\beta{}_\alpha \tag{2.10}$$

である。

以下で考えるのは、リー群 $G$ の構造定数 $c^{c}{}_{ab}$ から、超リー群のそれ $c^{C}{}_{AB}$ を作る方法である。

---

[1)] ここで、$[a, b] \stackrel{\mathrm{def}}{=} ab - ba$ である。以下、$\{a, b\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} ab + ba$ も使う。

まず、$\boldsymbol{G}_a$ を与える。つまり、${c^\beta}_{a\gamma}$ を与える。すると、(2.10) から ${c^\beta}_{\alpha c}$ が定まる。残りは、${c^b}_{\alpha\gamma}$ を求めればよい。ただし、これらの構造定数は、ヤコビ恒等式 (1.13) より、以下を満足する必要がある：

$$
\begin{aligned}
{c^d}_{ae}{c^e}_{bc} + {c^d}_{be}{c^e}_{ca} + {c^d}_{ce}{c^e}_{ab} &= 0, &(2.11)\\
{c^\delta}_{a\varepsilon}{c^\varepsilon}_{\beta c} + {c^\delta}_{\beta e}{c^e}_{ca} + {c^\delta}_{c\varepsilon}{c^\varepsilon}_{a\beta} &= 0, &(2.12)\\
{c^d}_{\alpha\varepsilon}{c^\varepsilon}_{\beta c} - {c^d}_{\beta\varepsilon}{c^\varepsilon}_{c\alpha} + {c^d}_{ce}{c^e}_{\alpha\beta} &= 0, &(2.13)\\
{c^\delta}_{\alpha e}{c^e}_{\beta\gamma} + {c^\delta}_{\beta e}{c^e}_{\gamma\alpha} + {c^\delta}_{\gamma e}{c^e}_{\alpha\beta} &= 0. &(2.14)
\end{aligned}
$$

最初の式は仮定より成立している。第 2 式 (2.12) は (2.9) である。第 3, 4 式が課される要請である。

## 2.1 計量

計量 $\kappa_S = (\kappa_{ab})$ を、実対称行列であり、逆行列を持ち、

$$c_{abc} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_{ad}{c^d}_{bc} \tag{2.15}$$

が完全反対称となるようなものとして導入する。$G$ が半単純リー群なら、

$$\kappa_{ab} = -A{c^c}_{ad}{c^d}_{bc} \tag{2.16}$$

とすればよい。$A$ は実定数である。

次に、計量 $\kappa_A = (\kappa_{\alpha\beta})$ を、反対称複素行列で、

$$c_{\alpha b\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_{\alpha\beta}{c^\beta}_{b\gamma} \tag{2.17}$$

が

$$c_{\alpha b\gamma} = c_{\gamma b\alpha} \tag{2.18}$$

となるものとして導入する。

また、

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{diag}(\kappa_S, \kappa_A) \tag{2.19}$$

とする。また、

$$(\kappa^{ab}) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_S^{-1} \tag{2.20}$$

とする。

このとき、

$$(\kappa c_b)_{AC} = \kappa_{AD}{c^D}_{bC} =: c_{AbC} = -(-1)^{|A|\cdot|C|}c_{CbA} \tag{2.21}$$

である。

## 2.2 $c^a{}_{\beta\gamma}$

今、

$$c^a{}_{\beta\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} -\kappa^{ac}\kappa_{\beta\delta}c^\delta{}_{c\gamma} \tag{2.22}$$

と定義する。このとき、(2.13) は (2.12) より従う。実際、(2.12) に $-\kappa^{da}\kappa_{\alpha\delta}$ を作用させると、(2.12) の第 1 項は、(2.13) の第 1 項に移り、第 3 項は第 2 項に、第 2 項は第 3 項に移る。(2.12) の第 3 項に $-\kappa^{da}\kappa_{\alpha\delta}$ を作用させたものを $A$, (2.13) の第 2 項を $B$ とすると、

$$\begin{aligned} A &= -\kappa^{da}\kappa_{\alpha\delta}c^\delta{}_{c\varepsilon}c^\varepsilon{}_{a\beta} \\ &= -\kappa^{da}c_{\alpha c\varepsilon}c^\varepsilon{}_{a\beta} \\ &= -\kappa^{da}c_{\varepsilon c\alpha}c^\varepsilon{}_{a\beta} \\ &= -\kappa^{da}\kappa_{\varepsilon\delta}c^\delta{}_{c\alpha}c^\varepsilon{}_{a\beta} \\ &= \kappa^{da}c^\delta{}_{c\alpha}c_{\delta a\beta} \end{aligned} \tag{2.23}$$

であり、

$$\begin{aligned} B &= -c^d{}_{\beta\varepsilon}c^\varepsilon{}_{c\alpha} \\ &= \kappa^{da}\kappa_{\beta\delta}c^\delta{}_{a\varepsilon}c^\varepsilon{}_{c\alpha} \\ &= \kappa^{da}c_{\beta a\varepsilon}c^\varepsilon{}_{c\alpha} \\ &= \kappa^{da}c_{\varepsilon a\beta}c^\varepsilon{}_{c\alpha} = A \end{aligned} \tag{2.24}$$

となる。

## 2.3 (2.14) と等価な条件

今、

$$\boldsymbol{G}^a \stackrel{\text{def}}{=} \kappa^{ab}\boldsymbol{G}_b \tag{2.25}$$

とすると、(2.14) は、

$$2\boldsymbol{G}_e S\kappa_A\boldsymbol{G}^e + \boldsymbol{G}_e\mathrm{Tr}(S\kappa_A\boldsymbol{G}^e) = 0 \tag{2.26}$$

が任意の $q$ 次対称行列 $S$ について成り立つ事と等価である。つまり、この恒等式が成り立っていれば、超リー群の構造定数が得られた事になる。

これを確かめる。上式の ${}^\delta{}_\gamma$ 成分は、

$$2(\boldsymbol{G}_e)^\delta{}_\alpha S^{\alpha\beta}(\kappa_A\boldsymbol{G}^e)_{\beta\gamma} + (\boldsymbol{G}_e)^\delta{}_\gamma S^{\alpha\beta}(\kappa_A\boldsymbol{G}^e)_{\beta\alpha} = 0 \tag{2.27}$$

である。ここで、

$$(\kappa_A\boldsymbol{G}^e)_{\beta\gamma} = c^e{}_{\beta\gamma} \tag{2.28}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta}(c^\delta{}_{e\alpha}c^e{}_{\beta\gamma} + c^\delta{}_{e\beta}c^e{}_{\alpha\gamma} + c^\delta{}_{e\gamma}c^e{}_{\beta\alpha}) &= 0, \\ c^\delta{}_{e\alpha}c^e{}_{\beta\gamma} + c^\delta{}_{e\beta}c^e{}_{\alpha\gamma} + c^\delta{}_{e\gamma}c^e{}_{\beta\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

となる。これは (2.14) と等価である。

# 3　超リー群の例

## 3.1　超ド・ジッター群

ガンマ行列 $\{\gamma_a\}_{a=-1,0,1,2,3}$ を、

$$\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = 2\eta_{ab}\,, \quad \eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,-1,1,1,1) \tag{3.1}$$

で定義し、実反対称行列 $\bar{\gamma}$ を、

$$\bar{\gamma}\gamma_a\bar{\gamma}^{-1} = {}^t\gamma_a\,, \quad \det(\bar{\gamma}) = 1 \tag{3.2}$$

で定義する。これより、

$$\bar{\gamma} = \pm\gamma_{-1}\gamma_0 = \pm\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{3.3}$$

である。ここで、

$$\gamma_{-1} = \pm\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{3.4}$$

を用いた。$\gamma$ を、

$$\gamma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bar{\gamma}\gamma_{-1} \tag{3.5}$$

で定義する。$\gamma$ は反対称行列である。また、$\gamma_{-1}, \gamma_0$ は反対称行列で、$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ は対称行列である。

$\gamma^a$ の成分 $(\gamma^a)^\alpha{}_\beta$ と書く。$\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, 2^{[D/2]} = 4$ である ($[A]$ はガウス記号, 今は $D = 5$)。また、$\bar{\gamma}$ の成分を $(\bar{\gamma})_{\alpha\beta}$ と書く。よって、$\gamma$ の成分は、$(\gamma)_{\alpha\beta}$ と書かける。$({}^t\gamma_a)_\alpha{}^\beta = (\gamma_a)^\beta{}_\alpha$ である。

今の場合、$\boldsymbol{G}$ は、

$$\boldsymbol{G}_{ab} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b] = \frac{1}{4}(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a) \tag{3.6}$$

とすれば良い。また、計量は、

$$\kappa_{abcd} = \eta_{ad}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bd}, \tag{3.7}$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = (i\bar{\gamma})_{\alpha\beta} \tag{3.8}$$

とすればよい。$\bar{\gamma}\boldsymbol{G}_{ab}$ は対称行列である。(2.26) は、任意の 4 次対称行列 $S$ に対して、

$$2\boldsymbol{G}_{ab}S\bar{\gamma}\boldsymbol{G}^{ab} + \boldsymbol{G}_{ab}\mathrm{Tr}(S\bar{\gamma}\boldsymbol{G}^{ab}) = 0 \tag{3.9}$$

である。これは成り立っている。

この超リー群を超ド・ジッター群という。生成子は、ド・ジッター群の生成子 $G_{ab}$ と $G_\alpha$ であり、交換関係は、

$$[G_{ab}, G_{cd}] = \eta_{ad}G_{bc} + \eta_{bc}G_{ad} - \eta_{ac}G_{bd} - \eta_{bd}G_{ac}, \tag{3.10}$$

$$[G_{ab}, G_\alpha] = G_\beta(\boldsymbol{G}_{ab})^\beta{}_\alpha, \tag{3.11}$$

$$\{G_\alpha, G_\beta\} = \frac{i}{2}G_{ab}(\bar{\gamma}\boldsymbol{G}^{ab})_{\alpha\beta} \tag{3.12}$$

である。

## 3.2 超ローレンツ群

$a, b$ などのラテン添え字は $0, 1, 2, 3$ を表す。

$\gamma_a$ は実行列に取ることが出来る。以下ではこれを仮定する。

この場合、$\boldsymbol{G}$ は、$\boldsymbol{G}_{ab}$ であり、

$$\kappa_{abcd} = \eta_{ad}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bd}, \tag{3.13}$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = (i\gamma)_{\alpha\beta} \tag{3.14}$$

とすればよい。$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ である。$\gamma \boldsymbol{G}_{ab}$ は対称行列である。(2.26) は、任意の 4 次対称行列 $S$ に対して、

$$2\boldsymbol{G}_{ab} S \gamma \boldsymbol{G}^{ab} + \boldsymbol{G}_{ab} \mathrm{Tr}(S\gamma \boldsymbol{G}^{ab}) = 0 \tag{3.15}$$

である。これは成り立っている。

この超リー群を超ローレンツ群という。生成子は、ローレンツ群の生成子 $G_{ab}$ と $G_\alpha$ であり、交換関係は、

$$[G_{ab}, G_{cd}] = \eta_{ad}G_{bc} + \eta_{bc}G_{ad} - \eta_{ac}G_{bd} - \eta_{bd}G_{ac}, \tag{3.16}$$

$$[G_{ab}, G_\alpha] = G_\beta(\boldsymbol{G}_{ab})^\beta{}_\alpha, \tag{3.17}$$

$$\{G_\alpha, G_\beta\} = \frac{i}{2} G_{ab}(\gamma \boldsymbol{G}^{ab})_{\alpha\beta} \tag{3.18}$$

である。

超ローレンツ群については [2] が詳しい。

## 3.3 超ポアンカレ群

$a, b$ などのラテン添え字は $0, 1, 2, 3$ を表す。

超ド・ジッター群の生成子を用いて、

$$J_{ab} \stackrel{\mathrm{def}}{=} -iG_{ab}, \tag{3.19}$$

$$P_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} i\lambda^2 G_{-1,a}, \tag{3.20}$$

$$Q_\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} i\lambda\sqrt{2}G_\alpha \tag{3.21}$$

とする。$\lambda$ は任意の実数である。この時、以下が成り立つ：

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i[\eta_{ac}J_{bd} + \eta_{bd}J_{ac} - \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{bc}J_{ad}], \tag{3.22}$$

$$[J_{ab}, P_c] = i(\eta_{ac}P_b - \eta_{bc}P_a), \tag{3.23}$$

$$[J_{ab}, Q_\alpha] = -\frac{i}{4} Q_\beta([\gamma_a, \gamma_b])^\beta{}_\alpha, \tag{3.24}$$

$$[P_a, P_b] = -i\lambda^4 J_{ab}, \tag{3.25}$$

$$[P_a, Q_\alpha] = \frac{i}{2}\lambda^2 Q_\beta(\gamma_{-1}\gamma_a)^\beta{}_\alpha, \tag{3.26}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = P_a(\gamma\gamma^a)_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\lambda^2 J_{ab}(\bar{\gamma}[\gamma^a, \gamma^b])_{\alpha\beta}. \tag{3.27}$$

$\lambda \neq 0$ ではこれは超ド・ジッター群に他ならない。$\lambda = 0$ では、これは以下の交換関係で定義される超ポアンカレ群となる：

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i[\eta_{ac}J_{bd} + \eta_{bd}J_{ac} - \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{bc}J_{ad}], \tag{3.28}$$

$$[J_{ab}, P_c] = i(\eta_{ac}P_b - \eta_{bc}P_a), \tag{3.29}$$

$$[J_{ab}, Q_\alpha] = -\frac{i}{4}Q_\beta([\gamma_a, \gamma_b])^\beta{}_\alpha, \tag{3.30}$$

$$[P_a, P_b] = 0, \tag{3.31}$$

$$[P_a, Q_\alpha] = 0, \tag{3.32}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = P_a(\gamma\gamma^a)_{\alpha\beta}. \tag{3.33}$$

# References


[1] Bryce DeWitt, "Supermanifolds"(Cambridge University Press, 2 版, 1992 年).

[2] 中嶋慧「超ローレンツ群」
http://physnakajima.html.xdomain.jp/super_Lorentz.pdf