1 $su(2)$ の公式

Suppose that

$$
\begin{aligned}
[S_-, S_+] &= 2\sigma S_z, && (1.1)\\
[S_-, S_z] &= S_-, && (1.2)\\
[S_+, S_z] &= -S_+. && (1.3)
\end{aligned}
$$

$\sigma = 1$ correspond to $su(1,1)$ and $\sigma = -1$ correspond to $su(2)$.

$$
\begin{aligned}
e^{x(A_z S_z + A_- S_- + A_+ S_+)} &\equiv e^{f_+(x)S_+} F(x), && (1.4)\\
F(0) &= 1\,, \quad f_+(0) = 0 && (1.5)
\end{aligned}
$$

とおく。これを微分して、

$$
(A_z S_z + A_- S_- + A_+ S_+) e^{f_+(x)S_+} F(x) = f_+'(x) S_+ F(x) + e^{f_+(x)S_+} F'(x)
$$

$F'(x)$ について解いて、

$$
F'(x) = [A_+ - f_+'(x)] S_+ F(x) + e^{-f_+(x)S_+} (A_z S_z + A_- S_-) e^{f_+(x)S_+} F(x) \tag{1.6}
$$

を得る。今、

$$
t_i(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{-f_+(x)S_+} S_i e^{f_+(x)S_+} \tag{1.7}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
t_-'(x) &= -e^{-f_+(x)S_+} f_+'(x) S_+ S_- e^{f_+(x)S_+} + e^{-f_+(x)S_+} S_- f_+'(x) S_+ e^{f_+(x)S_+}\\
&= f_+'(x) e^{-f_+(x)S_+} [S_-, S_+] e^{f_+(x)S_+}\\
&= f_+'(x) e^{-f_+(x)S_+} 2\sigma S_z e^{f_+(x)S_+}\\
&\equiv 2\sigma f_+'(x) t_z(x) && (1.8)
\end{aligned}
$$

である。ただし、第 3 等号で (1.1) を用いた。また、

$$
\begin{aligned}
t_z'(x) &= f_+'(x) e^{-f_+(x)S_+} [S_z, S_+] e^{f_+(x)S_+}\\
&= f_+'(x) e^{-f_+(x)S_+} S_+ e^{f_+(x)S_+}\\
&= f_+'(x) S_+ && (1.9)
\end{aligned}
$$

である。第 2 等号で (1.3) を用いた。ところで、

$$
t_-(0) = S_-\,, \quad t_z(0) = S_z \tag{1.10}
$$

である。(1.9) をこの初期条件の下で解くと、

$$
t_z(x) = S_z + f_+(x) S_+ \tag{1.11}
$$

となる。これを (1.8) に代入して

$$
\begin{aligned}
t_-'(x) &= 2\sigma f'(x) [S_z + f_+(x) S_+]\\
&= \sigma \frac{d}{dx} [2 f_+(x) S_z + f_+^2(x) S_+] && (1.12)
\end{aligned}
$$

を得る。これを初期条件 (1.10) の下で解いて、

$$t_-(x) = S_- + 2\sigma f_+(x) S_z + \sigma f_+^2(x) S_+ \tag{1.13}$$

を得る。(1.6) は、

$$\begin{aligned} F'(x) &= [A_+ - f_+'(x)]S_+F(x) + [A_zS_z + A_zf_+(x)S_+ + A_-S_- + 2\sigma A_-f_+(x)S_z + \sigma A_-f_+^2(x)S_+]F(x) \\ &= [A_+ - f_+'(x) + A_zf_+(x) + \sigma A_-f_+^2(x)]S_+F(x) + [A_zS_z + A_-S_- + 2\sigma A_-f_+(x)S_z]F(x) \end{aligned} \tag{1.14}$$

となる。今、

$$A_+ - f_+'(x) + A_zf_+(x) + \sigma A_-f_+^2(x) = 0 \tag{1.15}$$

とすると、(1.14) は、

$$F'(x) = [A_zS_z + A_-S_- + 2\sigma A_-f_+(x)S_z]F(x) \tag{1.16}$$

となる。(1.15) を (1.5) の初期条件の下に解く。

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_+'(x)} = \frac{dx}{df_+} &= \frac{1}{A_+ + A_zf_+(x) + \sigma A_-f_+^2(x)}, \\ x &= \int_0^{f_+(x)} \frac{df}{A_+ + A_zf + \sigma A_-f^2}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

今、

$$A_+ + A_zf + \sigma A_-f^2 = A_-(f-\alpha)(f-\beta) \quad , \tag{1.18}$$

$$\alpha, \beta = \frac{-A_z \pm \sqrt{A_z^2 - 4\sigma A_-A_+}}{2A_-} \tag{1.19}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \int_0^{f_+(x)} \frac{df}{A_+ + \sigma A_zf + A_-f^2} &= \frac{1}{A_-(\alpha-\beta)} \int_0^{f_+(x)} df \left(\frac{1}{f-\alpha} - \frac{1}{f-\beta} \right) \\ &= \frac{1}{A_-(\alpha-\beta)} \left(\ln \frac{f_+(x)-\alpha}{-\alpha} - \ln \frac{f_+(x)-\beta}{-\beta} \right) \\ &= \frac{1}{A_-(\alpha-\beta)} \ln [\frac{f_+(x)-\alpha}{f_+(x)-\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}]. \end{aligned} \tag{1.20}$$

これと (1.17) より、

$$\begin{aligned} e^{xA_-(\alpha-\beta)} &= \frac{f_+(x)-\alpha}{f_+(x)-\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}, \\ f_+(x) &= \beta \frac{e^{xA_-(\alpha-\beta)} - 1}{e^{xA_-(\alpha-\beta)} - \beta/\alpha} \end{aligned} \tag{1.21}$$

を得る。これは、次のようにも書ける：

$$
\begin{aligned}
f_+(x) &= \beta \frac{e^{xA_-(\alpha-\beta)/2} - e^{-xA_-(\alpha-\beta)/2}}{e^{xA_-(\alpha-\beta)/2} - \beta/\alpha e^{-xA_-(\alpha-\beta)/2}} \\
&= \frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta} \frac{\sinh \frac{A_-(\alpha-\beta)x}{2}}{\cosh \frac{A_-(\alpha-\beta)x}{2} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \sinh \frac{A_-(\alpha-\beta)x}{2}} \\
&= \frac{A_-\alpha\beta}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) + \frac{A_-(\alpha+\beta)}{2\phi} \sinh(\phi x)} \\
&= \frac{A_+}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi} \sinh(\phi x)}, \qquad (1.22) \\
\phi &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_-(\alpha-\beta)}{2} = \sqrt{A_z^2/4 - \sigma A_- A_+}. \qquad (1.23)
\end{aligned}
$$

今、

$$
\begin{aligned}
F(x) &= e^{f_z(x)S_z} G(x), \qquad (1.24) \\
G(0) &= 1, \quad f_z(0) = 0 \qquad (1.25)
\end{aligned}
$$

とおく。これを微分し、(1.16) を代入すると、

$$
[A_z S_z + A_- S_- + 2\sigma A_- f_+(x) S_z] e^{f_z(x)S_z} G(x) = f_z'(x) S_z e^{f_z(x)S_z} G(x) + e^{f_z(x)S_z} G'(x)
$$

となり、これから、

$$
G'(x) = [A_z + 2\sigma A_- f_+(x) - f_z'(x)] S_z G(x) + A_- e^{-f_z(x)S_z} S_- e^{f_z(x)S_z} G(x) \qquad (1.26)
$$

を得る。ここで、

$$
u_-(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-f_z(x)S_z} S_- e^{f_z(x)S_z} \qquad (1.27)
$$

を導入すると、

$$
\begin{aligned}
u_-'(x) &= f_z'(x) e^{-f_z(x)S_z} [S_-, S_z] e^{f_z(x)S_z} \\
&= f_z'(x) e^{-f_z(x)S_z} S_- e^{f_z(x)S_z} \\
&= f_z'(x) u_-(x) \qquad (1.28)
\end{aligned}
$$

である。ただし、第 2 等号で、(1.2) を用いた。これを初期条件

$$
u_-(0) = S_- \qquad (1.29)
$$

の下で解くと、

$$
u_-(x) = e^{f_z(x)} S_-
$$

すなわち、

$$
e^{-f_z(x)S_z} S_- e^{f_z(x)S_z} = e^{f_z(z)} S_- \qquad (1.30)
$$

を得る。(1.26) は、

$$
G'(x) = [A_z + 2\sigma A_- f_+(x) - f_z'(x)] S_z G(x) + A_- e^{f_z(z)} S_- G(x) \qquad (1.31)
$$

となる。今、

$$A_z + 2\sigma A_- f_+(x) - f_z'(x) = 0 \tag{1.32}$$

とすると、(1.31) は、

$$G'(x) \;=\; A_- e^{f_z(x)} S_- G(x) \tag{1.33}$$

となる。(1.32),(1.25),(1.22) より、

$$\begin{aligned}
f_z(x) \;&=\; A_z x + 2\sigma A_- \int_0^x dy\, f_+(y) \\
&=\; A_z x + \frac{1}{\phi}\int_0^x dy\, \frac{2\sigma A_- A_+ \sinh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)} \\
&=\; \frac{1}{\phi}\int_0^x dy \left[\phi A_z + \frac{2\sigma A_- A_+ \sinh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)}\right] \\
&=\; \frac{1}{\phi}\int_0^x dy\, \frac{2[\sigma A_- A_+ - \sigma A_z^2/4]\sinh(\phi y) + \phi A_z \cosh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)} \\
&=\; \int_0^x dy\, \frac{-2\phi\sinh(\phi y) + A_z\cosh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)} \\
&=\; -2\int_0^x dy\, \frac{1}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)} \frac{d}{dy}[\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)] \\
&=\; -2\ln[\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)] + 2\ln[\cosh(0) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(0)] \\
&=\; -2\ln[\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)]
\end{aligned} \tag{1.34}$$

となる。(1.33),(1.25) より、

$$G(x) \;=\; e^{f_-(x)S_-}, \tag{1.35}$$

$$f_-(x) \;=\; A_- \int_0^x dy\, e^{f_z(y)} \tag{1.36}$$

であり、(1.34) より、

$$f_-(x) \;=\; A_- \int_0^x \frac{dy}{[\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)]^2} \tag{1.37}$$

である。今、

$$u = e^{\phi y} \tag{1.38}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
dy \;&=\; \frac{du}{\phi u}, \\
\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y) \;&=\; \frac{2\phi - A_z}{4\phi}u + \frac{2\phi + A_z}{4\phi}u^{-1}
\end{aligned}$$

なので、

$$
\begin{aligned}
f_-(x) &= A_- \int_1^{u(x)} \frac{du}{\phi u} \frac{u^2}{[\frac{2\phi - A_z}{4\phi}u^2 + \frac{2\phi + A_z}{4\phi}]^2} \\
&= A_- \int_1^{u(x)} du \, \frac{16\phi u}{[(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z]^2} \\
&= A_- \int_1^{u(x)} du \, \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \frac{1}{[(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z]^2} \frac{d}{dy}[(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z] \\
&= -A_- \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \frac{1}{(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z}\Big|_1^{u(x)} \\
&= -A_- \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \Big(\frac{1}{(2\phi - A_z)u^2(x) + 2\phi + A_z} - \frac{1}{4\phi} \Big) \\
&= -A_- \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \frac{4\phi - (2\phi - A_z)u^2(x) - 2\phi - A_z}{[(2\phi - A_z)u^2(x) + 2\phi + A_z] \cdot 4\phi} \\
&= \frac{2A_-}{2\phi - A_z} \frac{(2\phi - A_z)u^2(x) - 2\phi + A_z}{(2\phi - A_z)u^2(x) + 2\phi + A_z} \\
&= \frac{2A_-}{2\phi - A_z} \frac{(2\phi - A_z)e^{\phi x} - (2\phi - A_z)e^{-\phi x}}{(2\phi - A_z)e^{\phi x} + (2\phi + A_z)e^{-\phi x}} \\
&= 2A_- \frac{\sinh(\phi x)}{2\phi\cosh(\phi x) - A_z \sinh(\phi x)} \\
&= \frac{A_-}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)} \qquad (1.39)
\end{aligned}
$$

となる。まとめると、

$$
\begin{aligned}
e^{x(A_z S_z + A_- S_- + A_+ S_+)} &= e^{f_+(x)S_+} e^{f_z(x)S_z} e^{f_-(x)S_-}, \qquad (1.40) \\
f_+(x) &= \frac{A_+}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)}, \qquad (1.41) \\
f_z(x) &= -2\ln[\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)], \qquad (1.42) \\
f_-(x) &= \frac{A_-}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)}, \qquad (1.43) \\
\phi &= \sqrt{A_z^2/4 - \sigma A_- A_+} \qquad (1.44)
\end{aligned}
$$

である。

2 公式

Suppose that

$$[a, a^\dagger] = 1, \tag{2.1}$$
$$[a^\dagger a, a] = -a, \tag{2.2}$$
$$[a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger. \tag{2.3}$$

$$e^{x(A_0 a^\dagger a + A_- a + A_+ a^\dagger)} \equiv e^{f_-(x)a} F(x), \tag{2.4}$$
$$F(0) = 1, \quad f_-(0) = 0 \tag{2.5}$$

とおく。これを微分して、

$$(A_0 a^\dagger a + A_- a + A_+ a^\dagger) e^{f_-(x)a} F(x) = f'_-(x) a F(x) + e^{f_-(x)a} F'(x)$$

$F'(x)$ について解いて、

$$\begin{aligned} F'(x) &= [A_- - f'_-(x)] a F(x) + e^{-f_-(x)a} (A_z a^\dagger a + A_+ a) e^{f_-(x)a} F(x) \\ &= [A_- - f'_-(x)] a F(x) + (A_z e^{-f_-(x)a} a^\dagger a e^{f_-(x)a} + A_+ e^{-f_-(x)a} a^\dagger e^{f_-(x)a}) F(x) \\ &= [A_- - f'_-(x)] a F(x) + (A_z n(x) + A_+ a_+(x)) F(x) \end{aligned} \tag{2.6}$$

を得る。ただし、

$$n(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-f_-(x)a} a^\dagger a e^{f_-(x)a}, \tag{2.7}$$
$$a_+(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-f_-(x)a} a^\dagger e^{f_-(x)a} \tag{2.8}$$

とした。

$$\begin{aligned} n'(x) &= -f'_-(x) e^{-f_-(x)a} [a, a^\dagger a] e^{f_-(x)a} \\ &= -f'_-(x) e^{-f_-(x)a} a e^{f_-(x)a} \\ &= -f'_-(x) a \end{aligned} \tag{2.9}$$

なので、

$$n(x) = a^\dagger a - f_-(x) a \tag{2.10}$$

である。また、

$$\begin{aligned} a'_+(x) &= -f'_-(x) e^{-f_-(x)a} [a, a^\dagger] e^{f_-(x)a} \\ &= -f'_-(x) \end{aligned} \tag{2.11}$$

なので、

$$a_+(x) = a^\dagger - f_-(x) \tag{2.12}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} F'(x) &= [A_- - f'_-(x)] a F(x) + \{A_0 [a^\dagger a - f_-(x) a] + A_+ [a^\dagger - f_-(x)]\} F(x) \\ &= [A_- - f'_-(x) - A_0 f_-(x)] a F(x) + (A_0 a^\dagger a + A_+ [a^\dagger - f_-(x)]) F(x) \end{aligned} \tag{2.13}$$

である。今、

$$A_- - f'_-(x) - A_0 f_-(x) = 0 \tag{2.14}$$

を仮定すると、

$$F'(x) \,=\, (A_0 a^\dagger a + A_+[a^\dagger - f_-(x)])F(x) \tag{2.15}$$

となる。(2.14) より、

$$\begin{aligned}
f'_-(x) \,&=\, A_- - A_0 f_-(x), \\
\int_0^{f_-(x)} \frac{df_-}{A_- + A_0 f_-} \,&=\, \int_0^x dx, \\
-\frac{1}{A_0}\ln[f_- - \frac{A_-}{A_0}]\Big|_0^{f_-(x)} \,&=\, x, \\
\ln[f_-(x) - \frac{A_-}{A_0}] - \ln[-\frac{A_-}{A_0}] \,&=\, -A_0 x, \\
f_-(x) \,&=\, -\frac{A_-}{A_0}(e^{-A_0 x} - 1)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

となる。

今、

$$F(x) \,=\, e^{f_+(x)a^\dagger}G(x), \tag{2.17}$$

$$G(0) \,=\, 1\,, \quad f_+(0) = 0 \tag{2.18}$$

とおく。これを微分し、(2.15) を代入すると、

$$(A_0 a^\dagger a + A_+[a^\dagger - f_-(x)])e^{f_+(x)a^\dagger}G(x) \,=\, f'_+(x)a^\dagger e^{f_+(x)a^\dagger}G(x) + e^{f_+(x)a^\dagger}G'(x)$$

$$\begin{aligned}
G'(x) \,&=\, e^{-f_+(x)a^\dagger}(A_0 a^\dagger a + [A_+ - f'_+(x)]a^\dagger - A_+ f_-(x))e^{f_+(x)a^\dagger}G(x) \\
&=\, [A_+ - f'_+(x)]a^\dagger G(x) + (A_0 e^{-f_+(x)a^\dagger}a^\dagger a e^{f_+(x)a^\dagger} - A_+ f_-(x))G(x) \\
&=\, [A_+ - f'_+(x)]a^\dagger G(x) + (A_0 N(x) - A_+ f_-(x))G(x)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

を得る。ここで、

$$N(x) \,\stackrel{\mathrm{def}}{=}\, e^{-f_+(x)a^\dagger}a^\dagger a e^{f_+(x)a^\dagger} \tag{2.20}$$

である。これは、

$$\begin{aligned}
N'(x) \,&=\, -f'_+(x)e^{-f_+(x)a^\dagger}[a^\dagger, a^\dagger a]e^{f_+(x)a^\dagger} \\
&=\, f'_+(x)e^{-f_+(x)a^\dagger}a^\dagger e^{f_+(x)a^\dagger} \\
&=\, f'_+(x)a^\dagger,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$N(x) \,=\, a^\dagger a + f_+(x)a^\dagger \tag{2.22}$$

であるから、

$$G'(x) \,=\, [A_+ - f'_+(x) + A_0 f_+(x)]a^\dagger G(x) + [A_0 a^\dagger a - A_+ f_-(x)]G(x) \tag{2.23}$$

となる。今、

$$A_+ - f'_+(x) + A_0 f_+(x) = 0 \tag{2.24}$$

と選ぶと、

$$G'(x) \;=\; [A_0 a^\dagger a - A_+ f_-(x)]G(x) \tag{2.25}$$

である。(2.24) より、

$$f'_+(x) \;=\; A_+ + A_0 f_+(x) \tag{2.26}$$

であり、

$$f'_+(x) \;=\; \frac{A_+}{A_0}(e^{A_0 x} - 1) \tag{2.27}$$

となる。(2.25) より、

$$\begin{aligned} G(x) \;&=\; e^{xA_0 a^\dagger a} \exp\Big[- A_+ \int_0^x dy\, f_-(y) \Big] \\ &=\; e^{xA_0 a^\dagger a} \exp\Big[\frac{A_+ A_-}{A_0} \int_0^x dy\, (e^{-A_0 y} - 1) \Big] \\ &=\; e^{xA_0 a^\dagger a} \exp\Big[- \frac{A_+ A_-}{A_0^2} (e^{-A_0 x} - 1 + xA_0) \Big] \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$e^{x(A_0 a^\dagger a + A_- a + A_+ a^\dagger)} \;=\; e^{f_c(x)} e^{f_-(x) a} e^{f_+(x) a^\dagger} e^{xA_0 a^\dagger a} \tag{2.29}$$

$$\;=\; \exp[f_c(x) + \frac{1}{2} f_-(x) f_+(x)] e^{f_-(x)a + f_+(x)a^\dagger} e^{xA_0 a^\dagger a}, \tag{2.30}$$

$$f_c(x) \;=\; -\frac{A_+ A_-}{A_0^2}(e^{-A_0 x} - 1 + xA_0), \tag{2.31}$$

$$f_-(x) \;=\; -\frac{A_-}{A_0}(e^{-A_0 x} - 1), \tag{2.32}$$

$$f_+(x) \;=\; \frac{A_+}{A_0}(e^{A_0 x} - 1) \tag{2.33}$$