クリフォード代数とスピノール

中嶋 慧

June 12, 2019

Contents

1 $\mathrm{O}(p,q)$ 群

0 以上の整数 p,q $(p+q\geq 1)$ に対して、

$$\mathrm{O}(p,q) \stackrel{\text{def}}{=} \{\Lambda^a{}_b \in \mathrm{M}(p+q,\mathbb{R}) | \overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ab} = \Lambda^i{}_a \Lambda^j{}_b \overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ij}\} \tag{1.1}$$

とする[1)]。ただし、$\overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ab}$ は $(q+p)$ 次の対角行列で、その最初の q 成分が -1 で、残りの p 成分が 1 である[2)3)]。$a,b=0,1,\cdots,p+q-1$ である。また、

$$\mathrm{SO}(p,q) \stackrel{\text{def}}{=} \{\Lambda^a{}_b \in \mathrm{O}(p,q) | \det(\Lambda^a{}_b) = 1\} \tag{1.2}$$

とする。$d\geq 1$ に対して、$\mathrm{O}(d,1)$ をローレンツ群と呼ぶ。また、

$$\mathrm{SO}_+(d,1) \stackrel{\text{def}}{=} \{\Lambda^a{}_b \in \mathrm{SO}(d,1) | \Lambda^0{}_0 > 0\} \tag{1.3}$$

を狭義ローレンツ群と呼ぶ。

[1)] $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ に対して、成分が $\mathbb{K}$ に属する n 次正方行列全体を $\mathrm{M}(n,\mathbb{K})$ と書く。

[2)] $\mathrm{O}(p,q)$ の定義において、$\overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ab}$ は最初の p 成分が 1 で、残りの q 成分が -1 の対角行列とされることが多い。

[3)] $\overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ab} = \Lambda^i{}_a \Lambda^j{}_b \overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ij}$ の両辺の行列式を計算すると、$[\det(\Lambda^a{}_b)]^2=1$ を得る。

2 ピン群

この節では、ピン群について解説する。ピン群は、(すぐ後で定義する) クリフォード代数を用いて定義される。

今、

$$e_a e_b + e_b e_a = 2\overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ab} \tag{2.1}$$

を満たす量の組 $\{e_a\}_{a=0,1,\cdots,q+p-1}$ を考える。e_a は時空点によらないとする ($\partial_\mu e_a = 0$)。クリフォード代数と呼ばれる集合 $\mathcal{C}^{(p,q)}$ を、

$$\mathcal{C}^{(p,q)} \overset{\text{def}}{=} \{a^0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{0 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le q+p-1} a^{i_1 i_2 \cdots i_k} e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} | a^0 \in \mathbb{R},\ a^{i_1 i_2 \cdots i_k} \in \mathbb{R}\} \tag{2.2}$$

で定義する。さらに、

$$\mathcal{C}^{(p,q)}_* \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{S} \in \mathcal{C}^{(p,q)} | {}^\exists \boldsymbol{U} \in \mathcal{C}^{(p,q)},\ \boldsymbol{S}\boldsymbol{U} = 1 = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\} \tag{2.3}$$

とし、クリフォード群 $\Gamma^{(p,q)}$ を、

$$\Gamma^{(p,q)} \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{S} \in \mathcal{C}^{(p,q)}_* | {}^\exists \Lambda^a{}_b \in \mathrm{M}(p+q, \mathbb{R}),\ \boldsymbol{S} e_a \boldsymbol{S}^{-1} = \Lambda^b{}_a e_b\} \tag{2.4}$$

で定義する。$\boldsymbol{S} \in \Gamma^{(p,q)}$ に対して、

$$e'_a \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{S} e_a \boldsymbol{S}^{-1} = [\rho(\boldsymbol{S})]^b{}_a e_b =: \rho^b{}_a e_b \tag{2.5}$$

で $\rho(\boldsymbol{S})$ を定める。$\rho(\boldsymbol{S}) \in \mathrm{O}(p,q)$ であることは、次のようにして分かる。まず、

$$\begin{aligned} e'_a e'_b + e'_b e'_a &= \boldsymbol{S}(e_a e_b + e_b e_a)\boldsymbol{S}^{-1} \\ &= 2\overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ab} \end{aligned} \tag{2.6}$$

である。また、

$$\begin{aligned} e'_a e'_b + e'_b e'_a &= \rho^c{}_a \rho^d{}_b (e_c e_d + e_d e_c) \\ &= 2\rho^c{}_a \rho^d{}_b g^{(q,p)}_{cd} \end{aligned} \tag{2.7}$$

である。上 2 式より、$\rho(\boldsymbol{S}) \in \mathrm{O}(p,q)$ が分かる。$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}' \in \Gamma^{(p,q)}$ に対して、$\rho(\boldsymbol{S}'\boldsymbol{S}) = \rho(\boldsymbol{S}')\rho(\boldsymbol{S})$ であるから、ρ は $\mathrm{O}(p,q)$ の表現である。また、0 でない実数 a に対して、$\rho(a\boldsymbol{S}) = \rho(\boldsymbol{S})$ である。$\mathrm{Spin}(p,q)$ と書かれる、$\Gamma^{(p,q)}$ の部分群が存在し、

$$\rho(\mathrm{Spin}(p,q)) = \mathrm{SO}(p,q) \tag{2.8}$$

となる [1]。$\mathrm{Spin}(p,q)$ の定義は、すぐ後の (2.13) である。$\mathrm{Spin}(p,q)$ はスピン群と呼ばれる。$\mathrm{Spin}(p,q)$ は、すぐ後で定義されるピン群 $\mathrm{Pin}(p,q)$ の部分群であり、$\mathrm{SO}(p,q)$ の二重被覆群である[4)]

[4)] また、$d \ge 1$ に対して、$\mathrm{Spin}(d,1)$ の部分群 $\mathrm{Spin}_+(d,1)$ が存在し、それは $\mathrm{SO}_+(d,1)$ の二重被覆群である。$\mathrm{Spin}_+(p,q)$ は (2.14) で定義される。

$\mathrm{Pin}(p,q)$, $\mathrm{Spin}(p,q)$ は次のように定義される[5)]。今、$\mathcal{C}^{(p,q)}$ の元に作用する演算子 r を、

$$r(ae_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}) \stackrel{\text{def}}{=} a(-1)^{(p+1)k}e_{i_k}\cdots e_{i_2}e_{i_1}, \tag{2.9}$$
$$r(a) \stackrel{\text{def}}{=} a \tag{2.10}$$

によって定義する。ここで、a は実数であり、$i_1, i_2, \cdots, i_k = 0, 1, \cdots, p+q-1$ である。また、$\boldsymbol{S} \in \mathcal{C}^{(p,q)}$ に対して、

$$N(\boldsymbol{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{S}r(\boldsymbol{S}) \tag{2.11}$$

と定義する。$\boldsymbol{S} \in \Gamma^{(p,q)}$ のとき、$N(\boldsymbol{S}) = a$ となる、0 でない実数 a が存在する。$\mathrm{Pin}(p,q)$ は、

$$\mathrm{Pin}(p,q) \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{S} \in \Gamma^{(p,q)} | N(\boldsymbol{S}) = \pm 1\} \tag{2.12}$$

で定義される[6)] 。また、

$$\mathrm{Spin}(p,q) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Pin}(p,q) \cap \mathcal{C}_0^{(p,q)}, \tag{2.13}$$
$$\mathrm{Spin}_+(p,q) \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{S} \in \mathrm{Spin}(p,q) | N(\boldsymbol{S}) = 1\} \tag{2.14}$$

である。ここで、$\mathcal{C}_0^{(p,q)}$ は $\mathcal{C}^{(p,q)}$ の元のうち、$\{e_a\}$ の偶数次のみからなる元の集合である。なお、$\mathcal{C}_1^{(p,q)}$ は $\mathcal{C}^{(p,q)}$ の元のうち、$\{e_a\}$ の奇数次のみからなる元の集合である。

$(p+q)$ が偶数の時は、

$$\rho(\mathrm{Pin}(p,q)) = \mathrm{O}(p,q) \tag{2.15}$$

となり、$\mathrm{Pin}(p,q)$ は $\mathrm{O}(p,q)$ の二重被覆群である [1, 2]。

$\{e_a\}$ は N_{p+q} 次元の複素行列として表現することができる。ここで、N_D は

$$N_D \stackrel{\text{def}}{=} 2^{[D/2]} \tag{2.16}$$

である。$[A]$ はガウス記号で、A 以下の最大の整数である。e_a の行列表現を $\gamma(e_a) \in \mathrm{GL}(N_{p+q}, \mathbb{C})$ とする。クリフォード代数の行列表現は、

$$\gamma(ae_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}) \stackrel{\text{def}}{=} a\gamma(e_{i_1})\gamma(e_{i_2})\cdots\gamma(e_{i_k}), \tag{2.17}$$
$$\gamma(a) \stackrel{\text{def}}{=} a1_{N_{p+q}} \tag{2.18}$$

で定義される。a は実数である。$1_{N_{p+q}}$ は、N_{p+q} 次の単位行列である。

3　群 $\mathcal{P}^D$

以下、$p = d \stackrel{\text{def}}{=} D-1 \geq 1$, $q = 1$ とし、

$$\gamma(e_a) = \gamma_a \tag{3.1}$$

---

5) この段落の記述は、[1] を参考にした。

6) $\mathrm{Pin}(p,q)$ の任意の元は、$v_1v_2\cdots v_n$ の形に書ける。ただし、$v_\alpha(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ は、$v_\alpha = \sum_{j=0}^{p+q-1} a_\alpha^{\ j} e_j$ $(a_\alpha^{\ j} \in \mathbb{R})$ の形の $\mathcal{C}_*^{(p,q)}$ の元である。

とする。ここで、右辺の γ_a は以下で定義されるガンマ行列である：$\{\gamma_a\}_{a=0,1,\cdots,D-1}$ は、1_{N_D} 次の複素行列で、

$$\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = 2\overset{\circ}{g}_{ab}1_{N_D} \tag{3.2}$$

と

$$(\gamma_a)^\dagger = \sigma_{(a)}\gamma_a \ (\sigma_{(a)} \overset{\text{def}}{=} \overset{\circ}{g}_{aa} = 1 - 2\delta_{a0}) \tag{3.3}$$

を満たすとする。$\overset{\circ}{g}_{ab} \overset{\text{def}}{=} \overset{\circ}{g}{}^{(1,d)}_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$ である。† はエルミート共役 (複素共役と転置) である。γ_a は時空点によらないとする ($\partial_\mu\gamma_a = 0$)。γ_a をガンマ行列と呼ぶ。γ_a が (3.2), (3.3) を満たすとき、U を時空点によらないユニタリー行列として、

$$\hat{\gamma}_a \overset{\text{def}}{=} U\gamma^a U^\dagger \tag{3.4}$$

とすると、$\hat{\gamma}^a$ も (3.2), (3.3) を満たす。

今、$\gamma(\Gamma^{(d,1)})$ の部分群

$$\mathcal{P}^D \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{T} \in \gamma(\Gamma^{(d,1)}) | \beta\boldsymbol{T}^\dagger\beta = \boldsymbol{T}^{-1}\} \tag{3.5}$$

を定義する。ここで、

$$\beta \overset{\text{def}}{=} i\gamma^0 \tag{3.6}$$

である。$\beta^2 = 1$ である。$\boldsymbol{S} \in \gamma(\mathcal{C}^{(d,1)})$ に対して、

$$\tau(\boldsymbol{S}) \overset{\text{def}}{=} \beta\boldsymbol{S}^\dagger\beta \tag{3.7}$$

と定義する。$\boldsymbol{T} \in \gamma(\Gamma^{(d,1)})$ が $\mathcal{P}^D$ に属するための条件は、$\boldsymbol{T}\tau(\boldsymbol{T}) = 1$ である。$\beta^2 = 1$ より、

$$\tau(a\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_k}) = a\tau(\gamma_{i_k})\cdots\tau(\gamma_{i_2})\tau(\gamma_{i_1}) \quad (a \in \mathbb{R}) \tag{3.8}$$

となる。また、(3.3) より、

$$(\gamma_i)^\dagger = \sigma_{(i)}\gamma_i \tag{3.9}$$

である。一方、(3.2) より、

$$\beta\gamma_i\beta = -\sigma_{(i)}\gamma_i \tag{3.10}$$

である。よって、

$$\tau(\gamma_{i_k}) = -\gamma_{i_k} \tag{3.11}$$

である。これより、

$$\tau(a\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_k}) = a(-1)^k\gamma_{i_k}\cdots\gamma_{i_2}\gamma_{i_1} \quad (a \in \mathbb{R}) \tag{3.12}$$

となる。(3.12) と、(2.9) で $p = d$ としたものより、

$$\tau(a\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_k}) = \varepsilon_{D,k}\gamma(r(ae_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k})) \quad (a \in \mathbb{R}) \tag{3.13}$$

となる。ここで、$\varepsilon_{D,k}$ は、D が奇数とき 1 であり、D が偶数のとき $(-1)^k$ である。以上より、以下の事が分かる：

$$Q_{\pm}(p,q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\boldsymbol{S} \in \mathrm{Pin}(p,q) \cap \mathcal{C}_1^{(p,q)} | N(\boldsymbol{S}) = \pm 1\}, \tag{3.14}$$

$$\tilde{\mathcal{P}}^D \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Spin}_+(d,1) \cup Q_{(-)^d}(d,1) \tag{3.15}$$

とすると、$\tilde{\mathcal{P}}^D$ は $\mathrm{Pin}(d,1)$ の正規部分群であり、

$$\mathcal{P}^D = \gamma(\tilde{\mathcal{P}}^D) \tag{3.16}$$

となる。ただし、$(-)^d$ は d が偶数のとき $+$ を、d が奇数のとき $-$ を表す。

ローレンツ群 $\mathrm{O}(d,1)$ の部分群

$$\mathcal{S}^D \stackrel{\mathrm{def}}{=} \rho(\tilde{\mathcal{P}}^D) \tag{3.17}$$

は、狭義ローレンツ群 $\mathrm{SO}_+(d,1)$ を含む。ρ は (2.5) のものである。任意の $\Lambda^a{}_b \in \mathcal{S}^D$ に対して、$\boldsymbol{T} \in \mathcal{P}^D$ で、

$$\boldsymbol{T}\gamma^a\boldsymbol{T}^{-1} = (\Lambda^{-1})^a{}_b\gamma^b \tag{3.18}$$

となるものが存在する。ここで、$\gamma^a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathring{g}^{ab}\gamma_b$ であり、

$$\Lambda_a{}^b = (\Lambda^{-1})^b{}_a \tag{3.19}$$

を用いた。Λ の添え字は $\mathring{g}_{ab}$ と $\mathring{g}^{ab}$ で上げ下げした。

4　スピノール

任意の $\Lambda^a{}_b \in \mathcal{S}^D$ に対して、$\boldsymbol{T} \in \mathcal{P}^D$ で、

$$\boldsymbol{T}\gamma^a\boldsymbol{T}^{-1} = (\Lambda^{-1})^a{}_b\gamma^b \tag{4.1}$$

となるものが存在する。量の組 $\psi = {}^t(\psi^1, \cdots, \psi^{N_D})$ で[7]、

$$\psi'^A = \boldsymbol{T}^A_B\psi^B \tag{4.2}$$

と変換するものをスピノールという。ここで、$A, B = 1, 2, \cdots, N_D$ である。本章の以下では、添え字 A, B はこの意味で用いる。

また、

$$\bar{\psi} \stackrel{\mathrm{def}}{=} i\psi^\dagger\gamma^0 = (\bar{\psi}_1, \cdots, \bar{\psi}_{N_D}) \tag{4.3}$$

[7] ^{t} は転置を表す。また、$\psi^A \in \mathbb{C}$ である。

は、

$$\bar{\psi}'_A = (\boldsymbol{T}^{-1})^B{}_A \bar{\psi}_B \tag{4.4}$$

と変換される。実際、

$$\begin{aligned}\bar{\psi}' &= (\psi')^\dagger \beta \\ &= \psi^\dagger \boldsymbol{T}^\dagger \beta = \bar{\psi}\beta\boldsymbol{T}^\dagger\beta\end{aligned} \tag{4.5}$$

であり、$\boldsymbol{T} \in \mathcal{P}^D$ なので、

$$\beta\boldsymbol{T}^\dagger\beta = \boldsymbol{T}^{-1} \tag{4.6}$$

となる。

微小変換 $\Lambda^a{}_b = \delta^a_b + \varepsilon^a{}_b$ に対しては、

$$\boldsymbol{T} = 1 + \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\gamma_{ab}\,, \quad \gamma_{ab} \overset{\text{def}}{=} \gamma_{[a}\gamma_{b]} \tag{4.7}$$

となることを以下で確かめる。ここで、$\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}$ である。まず (4.1) を確かめる。上式より、

$$\boldsymbol{T}\gamma^i\boldsymbol{T}^{-1} = 1 + \frac{1}{4}\varepsilon_{ab}[\gamma^{ab}, \gamma^i] \tag{4.8}$$

である。ところで、公式

$$[AB, C] = A[B, C]_+ - [A, C]_+ B \tag{4.9}$$

が成り立つ。ここで、$[A, B] = AB - BA$, $[A, B]_+ = AB + BA$ である。よって、$[\gamma^{ab}, \gamma^i]$ は、

$$\begin{aligned}[\gamma^{ab}, \gamma^i] &= \frac{1}{2}[\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a, \gamma^i] \\ &= \frac{1}{2}(\gamma^a[\gamma^b, \gamma^i]_+ - [\gamma^a, \gamma^i]_+\gamma^b - \gamma^b[\gamma^a, \gamma^i]_+ + [\gamma^b, \gamma^i]_+\gamma^a) \\ &= \gamma^a\eta^{bi} - \eta^{ai}\gamma^b - \gamma^b\eta^{ai} + \eta^{bi}\gamma^a \\ &= 4\gamma^{[a}\eta^{b]i}\end{aligned} \tag{4.10}$$

となる。これより、$\boldsymbol{T}\gamma^i\boldsymbol{T}^{-1} = (\delta^i_a - \varepsilon^i{}_a)\gamma^a = (\Lambda^{-1})^i{}_a\gamma^a$ を得る。次に (4.6) を確かめる。(3.12) より、

$$\beta(\gamma^a\gamma^b)^\dagger\beta = \gamma^b\gamma^a \tag{4.11}$$

となる。これより、無限小変換で (4.6) が確かめられる。

5　いくつかのコメント

$\mathcal{P}^D$ は、ディラック場のラグランジアン密度を (または、$\bar{\psi}\psi$ を) 不変にするようなスピノールの変換行列 $\boldsymbol{T}$ の全体である。(4.1) によって、$\mathcal{P}^D$ は $\mathcal{S}^D$ の元を表す事が出来る。$\mathcal{S}^D$ は $\mathrm{SO}_+(d, 1)$

を含むであるが、$\mathrm{O}(d,1)$ の真部分群である。つまり、$\mathcal{P}^D$ では表す事が出来ないようなローレンツ群の元 $\Lambda^a{}_b \in \mathrm{O}(d,1)$, $\Lambda^a{}_b \notin \mathcal{S}^D$ が存在する。

クリフォード代数の行列表現は、$p+q$ が偶数ならば忠実であるが、$p+q$ が奇数だと忠実とは限らないようである。

[2] によると、$p+q$ が奇数で、$p<q$ の場合は、$\mathrm{Pin}(p,q) \to \mathrm{O}(p,q)$ は全射ではないらしい。他の文献によると、p,q によらず $\mathrm{Pin}(p,q)$ は $\mathrm{O}(p,q)$ の二重被覆群とある。どちらが正しいのか？

クリフォード群やピン群の定義が [1] と [2] とで異なる。どうやら 2 種類の定義があり、$p+q$ が偶数の時には違いが出ないが、$p+q$ が奇数の時には違いが出る可能性があるようだ。

References

[1] M. Rausch de Traubenberg, "Clifford Algebras in Physics", arXiv:hep-th/0506011.

[2] M. Berg, C. DeWitt-Morette, S. Gwo and E. Kramer, "The Pin Groups in Physics: C, P, and T", Rev. Math. Phys. **13**, 953 (2001). [arXiv:math-ph/0012006]