量子開放系における速度限界と熱力学的不確定性関係

中嶋 慧(筑波大学)

2026年3月28日

自己紹介

中嶋 慧(なかじま さとし)

1989年11月9日 生まれる。ベルリンの壁が崩壊した日
2010年3月 群馬工業高等専門学校 物質工学科 卒業
2012年3月 筑波大学 理工学群物理学類 卒業 (学士(理学))
2014年3月 筑波大学大学院 数理物質科学研究科 物理学専攻 修士課程 修了
(修士(理学))[M1まで有光研, M2から都倉・久保研]
2017年3月 筑波大学大学院 数理物質科学研究科 ナノサイエンス・ナノテクノロジー専攻
(博士(理学), 指導教員：都倉 康弘)
2017年4月から10月 ITエンジニア
2020年10月 中嶋 慧, 松尾 衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』(現代数学社)
2021年4月 三重大学大学院工学研究科 研究員(内海研)
2023年6月 電気通信大学 情報理工学研究科 特任研究員(田島研)
2025年1月 筑波大学 数理物質系 物理学域 研究員(都倉研)

専門分野：
(1)非平衡統計力学(ゆらぎの熱力学)
(2)共変正準形式
(3)量子測定(量子情報)
(4)重力理論

講演の流れ

(1)時間依存の量子開放系の状態の漸近展開とその速度限界への応用

(2)量子開放系における速度限界

(3)量子開放系における熱力学的不確定性関係

(1)時間依存の量子開放系の状態の漸近展開とその速度限界への応用

GKSL方程式

量子マスター方程式(Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad方程式)

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{L}(\alpha_t)\rho(t) = -i[H(t), \rho(t)] + \sum_k \gamma_k(t)\mathcal{D}[L_k(t)]\rho(t)$$

$$\mathcal{D}[L]\rho := L\rho L^\dagger - \frac{1}{2}\left(L^\dagger L\rho + \rho L^\dagger L\right)$$

$$\frac{d}{dt}|\rho(t)\rangle\rangle = \mathcal{L}(\alpha_t)|\rho(t)\rangle\rangle$$

$$\langle\langle A|B\rangle\rangle = \mathrm{tr}(A^\dagger B)$$

$$\langle\langle 1|\mathcal{L}(\alpha) = 0$$ 確率保存

$$\mathcal{L}(\alpha)|\rho_0(\alpha)\rangle\rangle = 0$$ 定常状態

動的定常状態

$$\mathcal{R}(\alpha)\mathcal{L}(\alpha) = 1 - |\rho_0(\alpha)\rangle\rangle\langle\langle 1|$$

一般逆行列(ただし、Moore-Penroseのではない)

量子マスター方程式 $$\left[1 - \mathcal{R}(\alpha_t)\frac{d}{dt}\right]|\delta\rho(t)\rangle\rangle = \mathcal{R}(\alpha_t)\frac{d}{dt}|\rho_0(\alpha_t)\rangle\rangle \qquad \delta\rho(t) := \rho(t) - \rho_0(\alpha_t)$$

形式解 $$|\delta\rho^{\mathrm{dss}}(t)\rangle\rangle := \sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathcal{R}(\alpha_t)\frac{d}{dt}\right]^n|\rho_0(\alpha_t)\rangle\rangle$$

$$\delta\rho(t) = \delta\rho^{\mathrm{dss}}(t) + \tilde{\delta}\rho(t) \qquad \left[1 - \mathcal{R}(\alpha_t)\frac{d}{dt}\right]|\tilde{\delta}\rho(t)\rangle\rangle = 0$$

指数関数的に減衰 $$\tilde{\delta}\rho(0) = \delta\rho(0) - \delta\rho^{\mathrm{dss}}(0)$$

動的定常状態 $$\rho^{\mathrm{dss}}(t) := \rho_0(\alpha_t) + \delta\rho^{\mathrm{dss}}(t)$$

SN, M. Taguchi, T. Kubo, and Y. Tokura, PRB **92**, 195420 (2015).
D. Mandal and C. Jarzynski, J. Stat. Mech. (2016) 063204.
SN, arXiv:1710.05646 (博士論文).

クーロン相互作用なしの1準位の量子ドット

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -f & 1-f \\ f & -(1-f) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \qquad f = f(\beta\Delta(t)), \quad f(x) := \frac{1}{e^x+1}$$

$$\tilde{F} := p_1^{\mathrm{dss}}(t) = \lim_{N\to\infty} \tilde{F}_{(N)}(t) \qquad \tilde{F}_{(N)}(t) := \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{\gamma^n}\frac{d^n}{dt^n} f(\beta\Delta(t))$$

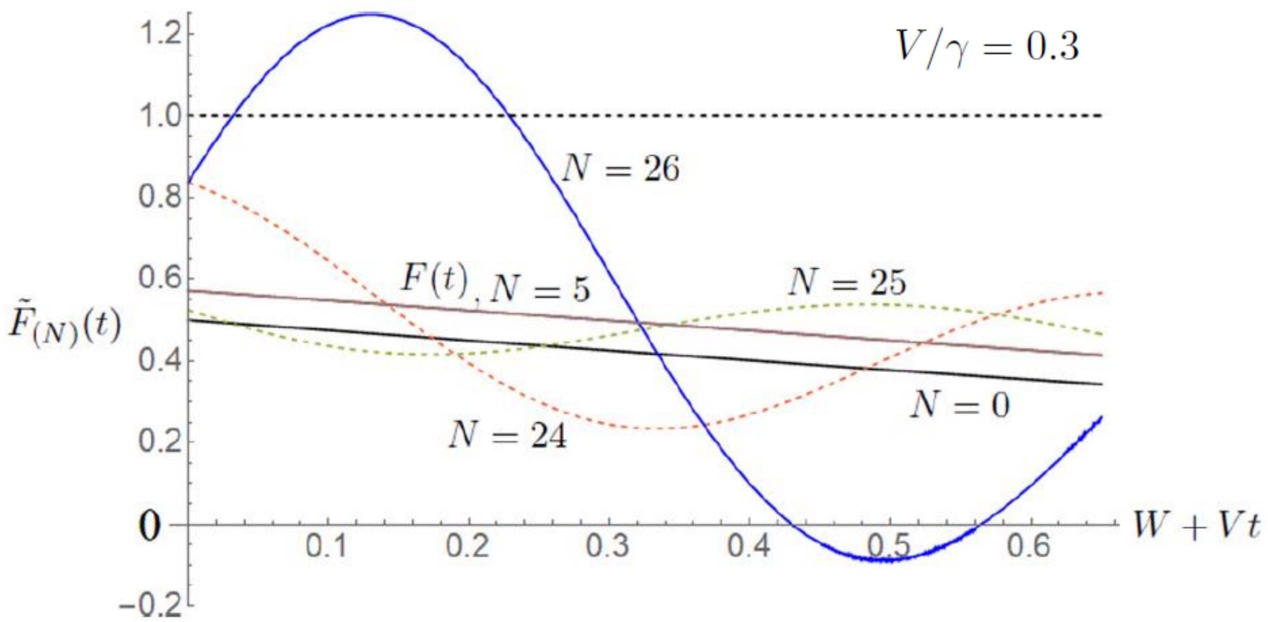
$\beta\Delta(t) = W + Vt$ とする。このとき、$\tilde{F}$ の Borel 和は、

$$F(t) = f(W+Vt)\,{}_2F_1(1,1;T+1;1-f(W+Vt))$$

$$T = \frac{\gamma}{V}$$

Borel和 ↑　　↓ $1/T$について漸近展開

$$\tilde{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma^n}\frac{d^n}{dt^n} f(W+Vt)$$



SN and Y. Utsumi, PRE **104**, 054139 (2021).

マスター方程式と局所詳細つり合い

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = \sum_m W_{nm} p_m(t)$$

$$W_{nm} = \sum_b \underline{W_{nm}^{(b)}}$$

熱浴bからの寄与

$$\sum_n W_{nm}^{(b)} = 0$$ 確率の保存

熱浴bの逆温度

局所詳細つり合い

$$\boxed{W_{nm}^{(b)} e^{-\beta_b E_m} = W_{mn}^{(b)} e^{-\beta_b E_n} \quad (m \neq n)}$$

状態nのエネルギー

エントロピー生成率

$$\frac{d}{dt}\langle E\rangle = \frac{d}{dt}\sum_n E_n p_n = \underbrace{\sum_n \frac{dE_n}{dt}p_n}_{\text{仕事率}} + \underbrace{\sum_n E_n \frac{dp_n}{dt}}_{\text{熱流}}$$

$$\sum_n E_n \frac{dp_n}{dt} = \sum_n E_n \sum_b \sum_{m(\neq n)} (W_{nm}^{(b)}p_m - W_{mn}^{(b)}p_n)$$

$$= \sum_b \underbrace{\sum_{m\neq n} W_{nm}^{(b)}p_m(E_n - E_m)}_{\text{熱浴}b\text{から系への熱流}}$$

$$\boxed{\dot{\sigma} := \frac{d}{dt}S_{\mathrm{Shannon}} - \sum_b \beta_b \sum_{m\neq n} W_{nm}^{(b)}p_m(E_n - E_m)}$$

$$S_{\mathrm{Shannon}} = -\sum_n p_n \ln p_n$$ シャノン・エントロピー

白石・布能・齊藤の速度限界

$$\sum_n \left| \frac{dp_n}{dt} \right| \leq \sqrt{2\dot{\sigma}(t) a(t)}$$

$$a(t) := \sum_{n \neq m} W_{nm} p_m$$ Activity rate

$$\boxed{L := \sum_n |p_n(\tau) - p_n(0)| \leq \sqrt{2\sigma A}}$$

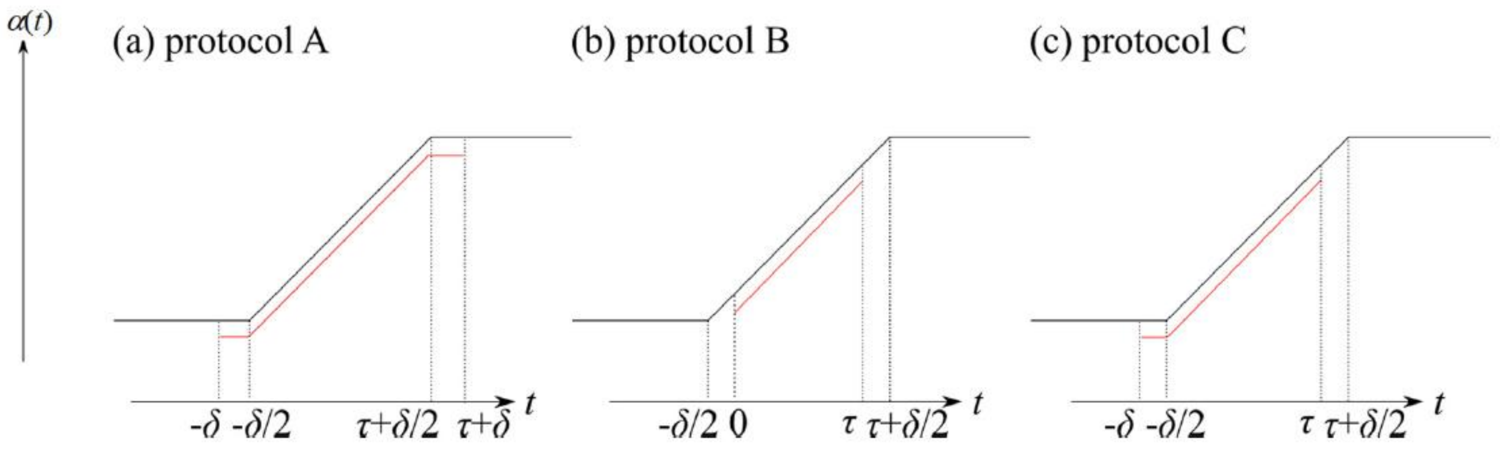
$$\sigma := \int_0^\tau dt\ \dot{\sigma}(t)$$ エントロピー生成

$$A := \int_0^\tau dt\ a(t)$$ Activity

N. Shiraishi, K. Funo and K. Saito, PRL **121**, 070601 (2018).

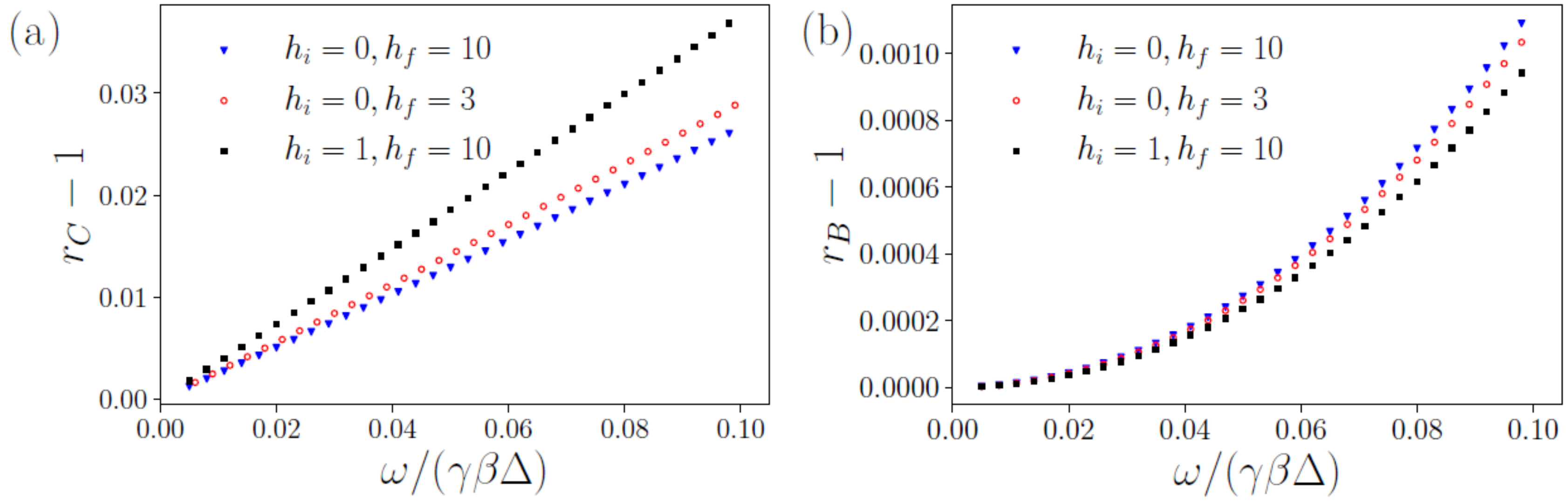
等号達成の例: 1準位量子ドット

$$\Delta(t) = \alpha(t)\Delta$$
$$\alpha(t) = h_i + \omega t$$
$$h_f := h_i + \omega\tau$$



$$r := \frac{2\sigma A}{L^2}$$

$$\beta\Delta = 1$$



SN and Y. Utsumi, PRE **104**, 054139 (2021).

(2)量子開放系における速度限界

孤立量子系での速度限界

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H(t), \rho]$$

Mandelstam-Tammの式

$$\boxed{\mathcal{L}(\rho(\tau), \rho(0)) \le \int_0^\tau dt\ \Delta E}$$

$$\mathcal{L}(\rho, \sigma) := \cos^{-1} F(\rho, \sigma),$$ Bures angle (距離)

$$F(\rho, \sigma) := \mathrm{tr}\sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}} = F(\sigma, \rho),$$ Fidelity

$$\Delta E := \sqrt{\mathrm{tr}(\rho H^2) - [\mathrm{tr}(\rho H)]^2}.$$

L. Mandelstam and I. Tamm,
"The Uncertainty Relation Between Energy and Time in Non-relativistic Quantum Mechanics"
J. Phys. (Moscow) **9**, 249 (1945).

量子開放系

GKSL方程式 $$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H(t),\rho(t)] + \mathcal{D}(\rho)$$

$$\mathcal{D}(\rho) := \sum_k \gamma_k \Big(\underline{L_k} \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} L_k^\dagger L_k \rho - \frac{1}{2}\rho L_k^\dagger L_k \Big)$$

jump operator

$$= \sum_b \mathcal{D}_b(\rho)$$

$$H(t) := H_S(t) + \underline{H_L(t)}$$

Lamb shift Hamiltonian

$$[H_L(t), H_S(t)] = 0$$

$$[L_{\underline{b},a,\underline{\omega}}, H_S] = \underline{\omega} L_{b,a,\omega}, \quad L_{b,a,-\omega} = L_{b,a,\omega}^\dagger.$$

熱浴のラベル　エネルギー差

$$\gamma_{b,a,-\omega} = e^{-\beta_b \omega}\gamma_{b,a,\omega}$$ 局所詳細つりあい

$\gamma_k(\geq 0)$, L_k, ω, β_b は時間に依存してよい。

エントロピー生成率とアクティビティ

$$\dot{\sigma} := -\mathrm{tr}\left[\frac{d\rho}{dt}\ln\rho\right] - \sum_b \beta_b \underline{\mathrm{tr}[\mathcal{D}_b(\rho)H_S]}$$

熱浴bから系への熱流

対角化 $\rho(t) = \sum_n p_n(t)|n(t)\rangle\langle n(t)|$

$n = m$ かつ $\omega = 0$ の項を除外

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{n,m,k}{}' \pi(a_{nm}^{(k)}, a_{mn}^{(-k)}) \qquad -k = (b, a, -\omega) \qquad \pi(a,b) := (a-b)\ln\frac{a}{b} \geq 0$$

$$a_{nm}^{(k)} := \gamma_k |\langle n(t)|L_k|m(t)\rangle|^2 p_m$$

$$\mathfrak{a}(t) := \sum_{n\neq m}\sum_k a_{nm}^{(k)}$$ Activity rate

布能・白石・齊藤

$$||\rho(\tau)-\rho(0)||_1 \le \int_0^\tau dt\, \left|\left|\frac{d\rho}{dt}\right|\right|_1 \qquad ||X||_1 := \mathrm{Tr}\sqrt{X^\dagger X}$$

$$\left|\left|\frac{d\rho}{dt}\right|\right|_1 \le ||[H,\rho]||_1 + ||\mathcal{D}_{\mathrm{nd}}(\rho)||_1 + ||\mathcal{D}_{\mathrm{d}}(\rho)||_1$$

$$\mathcal{D}_{\mathrm{d}}(\rho) := \sum_n |n\rangle\langle n|\mathcal{D}(\rho)|n\rangle\langle n|$$

$$\mathcal{D}_{\mathrm{nd}}(\rho) := \sum_{n\neq m} |n\rangle\langle n|\mathcal{D}(\rho)|m\rangle\langle m|$$

$$||\mathcal{D}_{\mathrm{d}}(\rho)||_1 = \sum_n \left|\frac{dp_n}{dt}\right| \le \sqrt{2\dot{\sigma}(t)\mathfrak{a}(t)}$$ 白石・布能・齊藤と同様

$$||[H,\rho]||_1 \le 2\Delta E$$ Mandelstam-Tamm的

$$\mathcal{D}_{\mathrm{nd}}(\rho) = -i[H_D,\rho] + \sum_{n\neq m, p_n=p_m} |n\rangle\langle n|\mathcal{D}(\rho)|m\rangle\langle m|$$

$$H_D := i\sum_{p_n\neq p_m} \frac{|n\rangle\langle n|\mathcal{D}(\rho)|m\rangle\langle m|}{p_m - p_n}$$

K. Funo, N. Shiraishi and K. Saito, New. J. Phys. **21**, 013006 (2019).

布能・白石・齊藤の改良

$$\left\|\frac{d\rho}{dt}\right\|_1 \le \sqrt{\mathcal{F}_\rho(H+H_D)}\sqrt{V_\rho(\psi)} + \sqrt{2\dot{\sigma}(t)\mathfrak{m}_\rho(\psi)}$$

SLDフィッシャー情報

$$\psi := \mathrm{sgn}(\frac{d\rho}{dt})$$

$$\mathfrak{m}_\rho(X) := \sum_{k,n\neq m} |\langle m|X|m\rangle|^2 \Psi(a_{nm}^{(k)}, a_{mn}^{(-k)}) \qquad a_{nm}^{(k)} = \gamma_k |\langle n|L_k|m\rangle|^2 p_m$$

$$V_\rho(\psi) := \mathrm{tr}[\psi^2\rho] - (\mathrm{tr}[\psi\rho])^2 \le 1$$

$$\mathfrak{m}_\rho(\psi) \le \sum_{k,n\neq m} \Psi(a_{nm}^{(k)}, a_{mn}^{(-k)}) =: \mathfrak{m} \le \mathfrak{a}$$

$$\mathcal{F}_\rho(X) \le 4V_\rho(X)$$

$$\sqrt{\mathcal{F}_\rho(H+H_D)} \le 2\sqrt{V_\rho(H+H_D)} \le 2\sqrt{V_\rho(H)} + 2\sqrt{V_\rho(H_D)}$$

対数平均 $\Psi(a,b) := \frac{a-b}{\ln\frac{a}{b}} \le \frac{a+b}{2}$

$$\left|\mathrm{tr}\left[X\frac{d\rho}{dt}\right]\right| \le \sqrt{\mathcal{F}_\rho(H+H_D)}\sqrt{V_\rho(X)} + \sqrt{2\dot{\sigma}(t)\mathfrak{m}_\rho(X)}$$

K. Sekiguchi, SN, K. Funo, H. Tajima, arXiv:2410.11604

Vu・長谷川とその改良

$$\boxed{\sigma \geq \sigma_{\mathrm{V0}} := \frac{d_T(\rho(\tau),\rho(0))^2}{2M} \geq \sigma_{\mathrm{V1}} := \frac{d_T(\rho(\tau),\rho(0))^2}{2B}}$$

$$d_T(\rho(\tau),\rho(0)) := \sum_n |q_n(\tau) - q_n(0)|$$

半古典的な距離

$\{q_n(t)\}$ は $\rho(t)$ の固有値を小さい順に並べたもの。

$$M := \int_0^\tau dt\ \mathfrak{m}(t)$$

$$B := \int_0^\tau dt\ b(t)$$

$$\mathfrak{m}(t) \leq \mathfrak{a}(t) \leq b(t) := \sum_k \gamma_k \mathrm{tr}[L_k^\dagger L_k \rho]$$

T. V. Vu and Y. Hasegawa, PRL **126**, 010601 (2021).
T. V. Vu and K. Saito, PRX **13**, 011013 (2023).

中嶋・内海の速度限界(その1)

$$\boxed{\begin{aligned}&\sigma \geq \sigma_0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2\\ &\sigma_\alpha := \frac{\|\tilde{\rho}(\tau)-\tilde{\rho}(0)\|_1^2}{2A_\alpha}\end{aligned}}$$

$$\tilde{\rho}(t) := U^\dagger(t)\rho(t)U(t)$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = -iH(t)U(t), \quad U(0)=1$$

$$A_0 := \int_0^\tau dt\ \mathrm{tr}\left(\tilde{\rho}(t)\sum_k \frac{1}{4}\gamma_k[\varphi,\tilde{L}_k]^\dagger[\varphi,\tilde{L}_k]\right)$$

$$A_1 := \int_0^\tau dt\ \frac{1}{2}\left[b(t)+\mathrm{tr}\left(\varphi\tilde{\rho}\varphi\sum_k \gamma_k \tilde{L}_k^\dagger \tilde{L}_k\right)\right]$$

$$\|\tilde{\rho}(\tau)-\tilde{\rho}(0)\|_1 \geq d_T(\rho(\tau),\rho(0))$$

$$A_2 := \int_0^\tau dt\ \frac{1}{2}\left[b(t)+\sum_k \gamma_k \|L_k\|_\infty^2\right]$$

$$\varphi(t) := \mathrm{sgn}(\tilde{\rho}(t)-\tilde{\rho}(0))$$

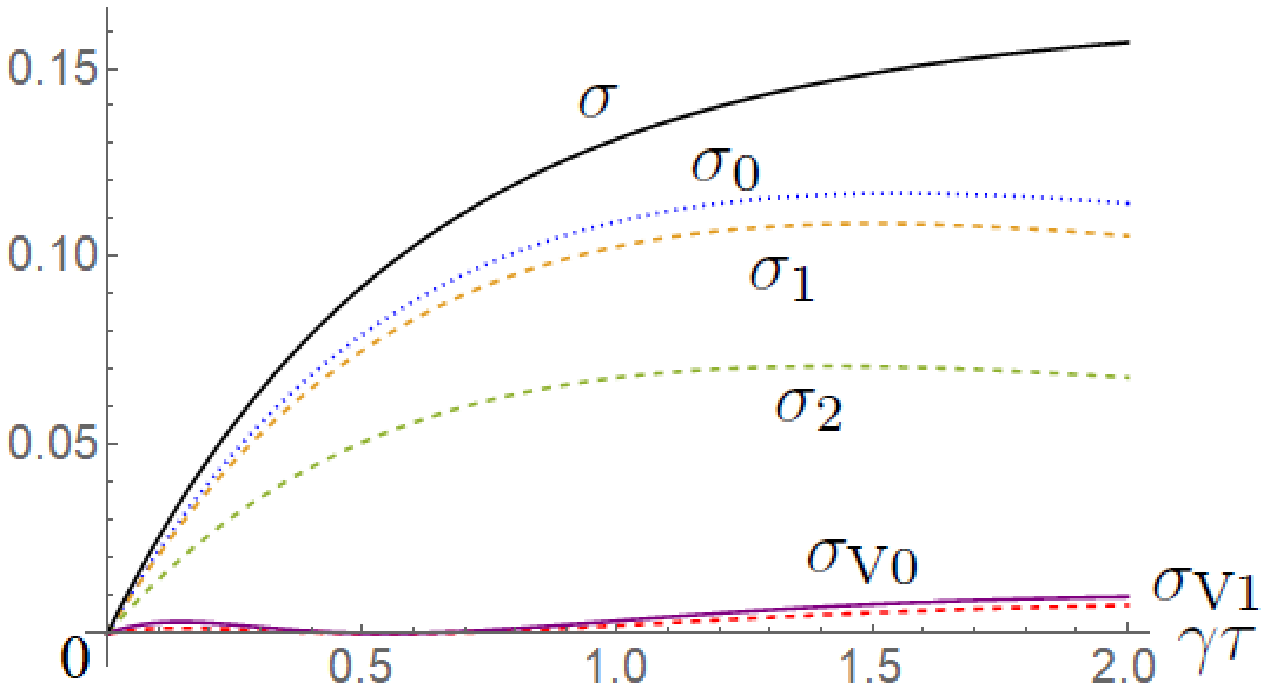
古典極限で、σ_0 は白石・布能・齊藤を再現する。

SN and Y. Utsumi, New. J. Phys. **24**, 095004 (2022).

量子ドットでの比較

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[\varepsilon a^\dagger a, \rho] + \gamma[1 - f(\varepsilon)]\hat{D}[a](\rho) + \gamma f(\varepsilon)\hat{D}[a^\dagger](\rho)$$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} + 1} \qquad \hat{D}[L](\rho) := \left(L\rho L^\dagger - \frac{1}{2}L^\dagger L\rho - \frac{1}{2}\rho L^\dagger L\right)$$



$\beta\varepsilon = 1$

$\rho(0) = \frac{1}{2}(1 + 0.3\tau_y)$

パウリ行列

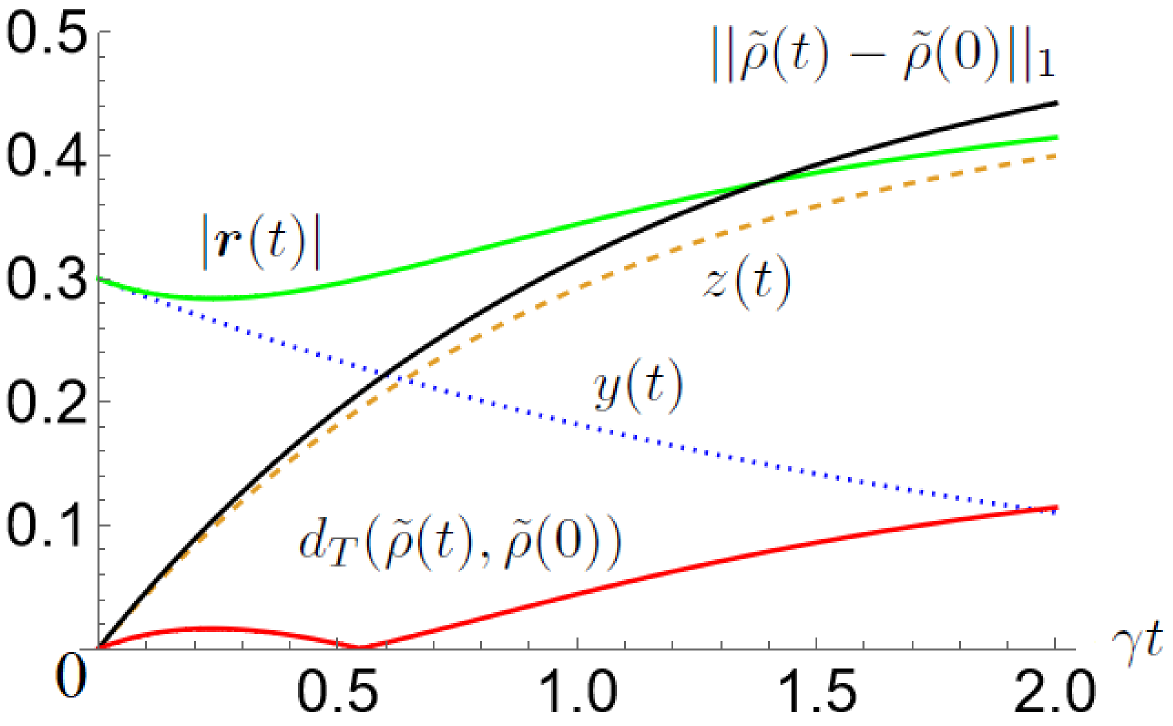
SN and Y. Utsumi, New. J. Phys. **24**, 095004 (2022).

状態間距離

$$\tilde{\rho}(t) = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{\tau})$$

$$||\tilde{\rho}(\tau) - \tilde{\rho}(0)||_1 = |\boldsymbol{r}(\tau) - \boldsymbol{r}(0)|, \qquad |\boldsymbol{x}| := \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}.$$

$$d_T(\rho(\tau), \rho(0)) = ||\boldsymbol{r}(\tau)| - |\boldsymbol{r}(0)|| = d_T(\tilde{\rho}(\tau), \tilde{\rho}(0)),$$



$\beta\varepsilon = 1$

$\rho(0) = \frac{1}{2}(1 + 0.3\tau_y)$

SN and Y. Utsumi, New. J. Phys. **24**, 095004 (2022).

中嶋・内海の速度限界(その2)

$$||\rho(\tau)-\rho(0)||_1 \le \int_0^\tau dt \left|\left|\frac{d\rho}{dt}\right|\right|_1$$
$$\le \int_0^\tau dt \left(||[H,\rho]||_1 + ||\mathcal{D}(\rho)||_1\right)$$

極分解　$\mathcal{D}(\rho) = V^\dagger \sqrt{[\mathcal{D}(\rho)]^\dagger \mathcal{D}(\rho)} \quad (V^\dagger V = 1)$

$$||\rho(\tau)-\rho(0)||_1 \le \underbrace{\int_0^\tau dt\, ||[H,\rho]||_1}_{\text{Mandelstam-Tamm type}} + \underbrace{\sqrt{2\sigma A_V}}_{\text{白石・布能・齊藤 type}}$$

$||[H,\rho]||_1 \le \sqrt{\mathcal{F}_\rho(H)}$　　$A_V := \int_0^\tau dt\, \mathrm{tr}\left(\rho \sum_k \frac{1}{4}\gamma_k [V, L_k]^\dagger [V, L_k]\right)$

SN and Y. Utsumi, New. J. Phys. **24**, 095004 (2022).

中嶋・内海の速度限界の導出(1)

$$\{\rho\}_k(X) := \int_0^1 ds\ (\gamma_{-k}\rho)^s X(\gamma_k\rho)^{1-s}$$

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle_{\tilde{\rho},k} := \mathrm{tr}\left[X^\dagger\{\tilde{\rho}\}_k(Y)\right]$$ 半内積 $$\gamma_{-k} = \gamma_{b,a,-\omega}$$

$$(\langle\langle X, Y\rangle\rangle_{\tilde{\rho},k})^* = \langle\langle Y, X\rangle\rangle_{\tilde{\rho},k}$$

$$||X||^2_{\tilde{\rho},k} := \langle\langle X, X\rangle\rangle_{\tilde{\rho},k} \geq 0$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{tr}[f(X(t))] = \mathrm{tr}\left[f'(X(t))\frac{dX(t)}{dt}\right]$$

$$\frac{d}{dt}||\tilde{\rho}(t) - \tilde{\rho}(0)||_1 = \mathrm{tr}\left[\varphi(t)\frac{d\tilde{\rho}}{dt}\right]$$ $$\varphi(t) := \mathrm{sgn}(\tilde{\rho}(t) - \tilde{\rho}(0))$$

$$= \frac{1}{2}\sum_k \langle\langle[\tilde{L}_k, \varphi(t)], [\tilde{L}_k, -\ln\tilde{\rho} - \beta_b\tilde{H}_S]\rangle\rangle_{\tilde{\rho},k}$$

中嶋・内海の速度限界の導出(2)

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t) = \sum_k \gamma_k \hat{D}[\tilde{L}_k](\tilde{\rho}) = \frac{1}{2}\sum_k [\tilde{L}_k^\dagger, \{\tilde{\rho}\}_k([\tilde{L}_k, -\ln\tilde{\rho} - \beta_b \tilde{H}_S])]$$

$$\begin{aligned}
||\tilde{\rho}(\tau) - \tilde{\rho}(0)||_1 &= \frac{1}{2}\sum_k \int_0^\tau dt\ \langle\langle [\tilde{L}_k, \varphi(t)], [\tilde{L}_k, -\ln\tilde{\rho} - \beta_b\tilde{H}_S]\rangle\rangle_{\tilde{\rho},k} \\
&\le \frac{1}{2}\sum_k \int_0^\tau dt\ \sqrt{\left|\left|[\tilde{L}_k, \varphi]\right|\right|^2_{\tilde{\rho},k} \left|\left|[\tilde{L}_k, -\ln\tilde{\rho} - \beta_b\tilde{H}_S]\right|\right|^2_{\tilde{\rho},k}} \\
&\le \sqrt{\underbrace{\int_0^\tau dt\ \frac{1}{2}\sum_k \left|\left|[\tilde{L}_k, \varphi]\right|\right|^2_{\tilde{\rho},k}}_{\le 2A_0}} \\
&\quad \times \sqrt{\int_0^\tau dt\ \underbrace{\frac{1}{2}\sum_k \left|\left|[\tilde{L}_k, -\ln\tilde{\rho} - \beta_b\tilde{H}_S]\right|\right|^2_{\tilde{\rho},k}}_{= \text{エントロピー生成率}}}
\end{aligned}$$

SN and Y. Utsumi, New. J. Phys. **24**, 095004 (2022).

(3)量子開放系における熱力学的不確定性関係

マスター方程式と軌道

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = \sum_m R_{nm}(t)p_m(t) \qquad R_{nm}(t) = \sum_\nu R^\nu_{nm}(t)$$

軌道 $\Gamma = \{n_0 \xrightarrow{\nu_1} n_1 \xrightarrow{\nu_2} n_2 \cdots \xrightarrow{\nu_N} n_N, (t_1, t_2, \cdots, t_N)\} \quad (t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N < \tau)$

$$\begin{aligned} p(\Gamma) &= \exp\left(\int_{t_N}^{\tau} dt\ R_{n_N n_N}(t)\right) R^{\nu_N}_{n_N n_{N-1}}(t_N) \cdots \\ &\quad \times R^{\nu_2}_{n_2 n_1}(t_2) \exp\left(\int_{t_1}^{t_2} dt\ R_{n_1 n_1}(t)\right) R^{\nu_1}_{n_1 n_0}(t_1) \exp\left(\int_0^{t_1} dt\ R_{n_0 n_0}(t)\right) p_{n_0}(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_n(\tau) &= \int \mathcal{D}\Gamma\ \delta_{n_N,n} p(\Gamma) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_N} \sum_{n_0,n_1,\cdots,n_N}^{n_{k+1}\neq n_k} \int_0^\tau dt_1 \int_{t_1}^\tau dt_2 \cdots \int_{t_{N-1}}^\tau dt_N\ \delta_{n_N,n} p(\Gamma) \end{aligned}$$

熱力学的不確定性関係

$R_{nm}(t) = \tilde{R}_{nm}(\omega t)$ のとき、

KUR $\quad \dfrac{[(\tau\partial_\tau - \omega\partial_\omega)\langle\Phi_\tau\rangle]^2}{\mathrm{Var}(\Phi_\tau)} \leq A \quad$ Activity

TUR $\quad \dfrac{[(\tau\partial_\tau - \omega\partial_\omega)\langle J_\tau\rangle]^2}{\mathrm{Var}(J_\tau)} \leq \dfrac{\sigma}{2} \quad$ エントロピー生成

$$\Phi_\tau(\Gamma) := \sum_{k=1}^{N} w_{n_k,n_{k-1}}^{\nu_k}$$

$$J_\tau(\Gamma) := \sum_{k=1}^{N} j_{n_k,n_{k-1}}^{\nu_k} \quad (j_{n,m}^{\nu} = -j_{m,n}^{\nu}) \qquad \text{Current}$$

$$\langle X\rangle := \int \mathcal{D}\Gamma\ X(\Gamma)p(\Gamma) \qquad \mathrm{Var}(X) := \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$$

T. Koyuk and U. Seifert, PRL **125**, 260604 (2020).
齊藤圭司『ゆらぐ系の熱力学』サイエンス社, 2022.

熱力学的不確定性関係と速度限界

TKUR $$\boxed{\frac{[(\tau\partial_\tau - \omega\partial_\omega)\langle J_\tau\rangle]^2}{\mathrm{Var}(J_\tau)} \le \frac{\sigma^2}{4A} f\left(\frac{\sigma}{2A}\right)^{-2}}$$

$f(x)$ は $x\tanh x$ の逆関数

$$f(x) \ge \max\{x, \sqrt{x}\} \quad (x > 0)$$

この式で適当に J_τ を選び、短時間極限を考えると、

$$\boxed{L \le \sigma f\left(\frac{\sigma}{2A}\right)^{-1}} \qquad L := \sum_n |p_n(\tau) - p_n(0)|$$

$$L \le \sqrt{2\sigma A}$$ 白石・布能・齊藤

$$L \le 2A$$

V. T. Vo, T. V. Vu, and Y. Hasegawa, J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 405004 (2022).

GKSL方程式とquantum trajectory

GKSL方程式 $$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H(t),\rho(t)] + \sum_k \mathcal{D}[L_k(t)](\rho) = \mathcal{L}(t)\rho(t)$$

$$\mathcal{D}[L](\rho) := L\rho L^\dagger - \frac{1}{2}(L^\dagger L\rho + \rho L^\dagger L)$$

$$p^\theta(\Gamma) = \mathrm{tr}[M^\theta(\Gamma)\rho(0)M^\theta(\Gamma)^\dagger]$$

$$M^\theta(\Gamma) := W^\theta(\tau, t_N)\Big(\prod_{\alpha=1}^{N} L^\theta_{k_\alpha}(t_\alpha)W^\theta(t_\alpha, t_{\alpha-1})\Big)$$

$$\frac{\partial W^\theta(t,s)}{\partial t} = \Big(-iH^\theta - \frac{1}{2}\sum_k (L_k^\theta)^\dagger L_k^\theta\Big)W^\theta(t,s), \quad W^\theta(s,s) = 1$$

$$H^\theta := (1+\kappa_H\theta)H, \quad L_k^\theta := \sqrt{1+\kappa_k\theta}L_k$$

$$F := -\langle \partial_\theta^2 \ln p^\theta(\Gamma)\big|_{\theta=0}\rangle$$ フィッシャー情報

量子系のTURとKURの導出

$$\frac{1}{\mathrm{Var}(\mathcal{J}_\tau)}\left[\partial_\theta\langle\mathcal{J}_\tau\rangle_\theta|_{\theta=0}\right]^2 \leq F$$ クラメール・ラオの不等式

$$\mathcal{J}_\tau = \Phi_\tau \quad (\mathrm{KUR})$$
$$\mathcal{J}_\tau = J_\tau \quad (\mathrm{TUR})$$

$$\Phi_\tau := \sum_{\alpha=1}^{N} w_{k_\alpha}$$

$$J_\tau := \sum_{\alpha=1}^{N} j_{k_\alpha}, \quad j_{-k} = -j_k$$

$$L_k^\theta := \sqrt{1+\kappa_k\theta}L_k \qquad H^\theta := (1+\kappa_H\theta)H$$

$$\kappa_k = 1 \quad (\mathrm{KUR})$$

$$\kappa_k = \frac{\mathrm{tr}[\rho L_k^\dagger L_k] - \mathrm{tr}[\rho L_{-k}^\dagger L_{-k}]}{\mathrm{tr}[\rho L_k^\dagger L_k] + \mathrm{tr}[\rho L_{-k}^\dagger L_{-k}]} \quad (\mathrm{TUR})$$

$$\partial_\theta\langle\mathcal{J}_\tau\rangle_\theta\big|_{\theta=0} = \langle\mathcal{J}_\tau\rangle + \mathcal{J}_* \quad (\mathcal{J}_\tau = \Phi_\tau, J_\tau),$$

$$\mathcal{J}_* := \int_0^\tau dt \sum_k \lambda_k \mathrm{tr}[\phi(t)L_k^\dagger L_k] \quad (\lambda_k = w_k, j_k),$$

$$\phi(t) := \frac{\partial\rho^\theta(t)}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=0}$$

量子系のTURとKUR

量子KUR $$\frac{[(1+\delta_\Phi)\langle\Phi_\tau\rangle]^2}{\mathrm{Var}(\Phi_\tau)} \le B + \mathcal{Q}_{\mathrm{A}}$$

量子TUR $$\frac{[(1+\delta_J)\langle J_\tau\rangle]^2}{\mathrm{Var}(J_\tau)} \le \frac{\sigma}{2} + \mathcal{Q}_{\mathrm{E}}$$

量子補正項

これは数値的に計算するしかない

$$\delta_\Phi := \frac{\Phi_*}{\langle\Phi_\tau\rangle} \qquad B := \int_0^\tau dt \sum_k \mathrm{tr}(\rho L_k^\dagger L_k) = \langle N\rangle$$

$$\delta_J := \frac{J_*}{\langle J_\tau\rangle}$$

T. Van Vu and K. Saito, PRL **128**, 140602 (2022).

フィッシャー情報の上限(1)

GKSL 方程式のジャンプ演算子の個数を M とする。
$(M+1)$ 次元ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を用意し、その基底を $\{|m\rangle\}_{m=0}^{M}$ とする。
ヒルベルト空間が $\mathcal{H}^{\otimes N}$ である環境系 E を考える。
システム S とそのアンシラ A と環境 E との合成系を考える。
その初期状態は $|\tilde{\psi}(0)\rangle \otimes |0_{N-1}, \cdots, 0_1, 0_0\rangle$ とする ($\mathrm{Tr}_A[|\tilde{\psi}(0)\rangle\langle\tilde{\psi}(0)|] = \rho(0)$)。
i 番目の環境系は S と時刻 $[i\Delta t, (i+1)\Delta t]$ の間ユニタリー U_i で相互作用する。

$$
\begin{aligned}
|\psi^\theta\rangle &= U_{N-1}\cdots U_1 U_0 |\tilde{\psi}(0)\rangle \otimes |0_{N-1}, \cdots, 0_1, 0_0\rangle \\
&= \sum_{m_0,\cdots,m_{N-1}=0}^{M} \Omega^\theta_{m_{N-1}} \cdots \Omega^\theta_{m_0} |\tilde{\psi}(0)\rangle \otimes |m_{N-1}, \cdots, m_1, m_0\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\Omega_0^\theta = \left[1 + \left(-iH^\theta - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}(L_m^\theta)^\dagger L_m^\theta\right)\Delta t\right] \otimes 1_A
$$

$$
\Omega_m^\theta = L_m^\theta \sqrt{\Delta t} \otimes 1_A \quad (m = 1, \cdots, M)
$$

フィッシャー情報の上限(2)

POVM $\mathcal{M}_0(\{m_i\}) := 1_{SA} \otimes |m_{N-1}, \cdots, m_1, m_0\rangle\langle m_{N-1}, \cdots, m_1, m_0|$ を考えると、
出力 $P^\theta(\{m_i\}) := \mathrm{Tr}[\mathcal{M}_0(\{m_i\})|\psi^\theta\rangle\langle\psi^\theta|]$ は $N \to \infty$ で Vu-齊藤のものになる。

量子クラメール・ラオの定理より、

$$F \leq \underline{\mathcal{I}} := 4\left[\langle\partial_\theta\psi^\theta|\partial_\theta\psi^\theta\rangle - \langle\partial_\theta\psi^\theta|\psi^\theta\rangle\langle\psi^\theta|\partial_\theta\psi^\theta\rangle\right]\Big|_{\theta=0}$$

SLDフィッシャー情報量

$$\mathcal{I} = 4[\partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2}\mathcal{C}(\theta_1,\theta_2) - \partial_{\theta_1}\mathcal{C}(\theta_1,\theta_2)\partial_{\theta_2}\mathcal{C}(\theta_1,\theta_2)]\Big|_{\theta_1=0=\theta_2}$$

$$\mathcal{C}(\theta_1,\theta_2) := \langle\psi^{\theta_2}|\psi^{\theta_1}\rangle = \mathrm{tr}_S\rho^{\theta_1,\theta_2}(\tau),$$

$$\rho^{\theta_1,\theta_2}(\tau) := \mathrm{tr}_{AE}[|\psi^{\theta_1}\rangle\langle\psi^{\theta_2}|]$$

S. Gammelmark and K. Mølmer, PRL **112**, 170401 (2014).

Two-sided GKSL equation

$$\frac{d\rho^{\theta_1,\theta_2}(t)}{dt} = \mathcal{L}^{\theta_1,\theta_2}(t)\rho^{\theta_1,\theta_2}(t) \quad \text{under } \rho^{\theta_1,\theta_2}(0) = \rho(0)$$

$$\mathcal{L}^{\theta_1,\theta_2}(t)\bullet := -iH^{\theta_1}\bullet + \bullet\, iH^{\theta_2} + \sum_k \Big\{ L_k^{\theta_1} \bullet (L_k^{\theta_2})^\dagger - \frac{1}{2}\Big[(L_k^{\theta_1})^\dagger L_k^{\theta_1} \bullet + \bullet\, (L_k^{\theta_2})^\dagger L_k^{\theta_2} \Big] \Big\}$$

S. Gammelmark and K. Mølmer, PRL **112**, 170401 (2014).

Vu・齊藤は長時間極限でのみSLDフィッシャー情報を評価していたが、我々は任意時間での表式を与えた。

$$\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_{\mathrm{A}}, \mathcal{Q}_{\mathrm{E}} \leq Q_+$$

量子補正項の上限

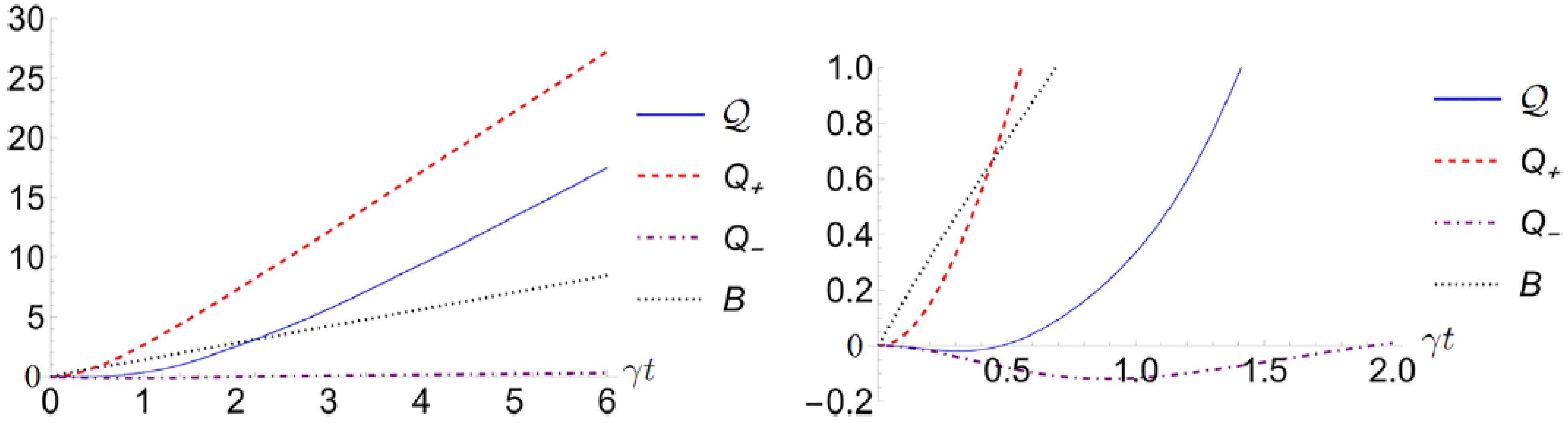
$$\mathcal{Q} \leq Q_+ = 4(I_1 + I_2 + I_3)$$

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_0^\tau ds \int_0^s du \ \mathrm{tr}\Big[\mathcal{L}_2(s)\mathcal{U}(s,u)\mathcal{L}_1(u)\rho(u)\Big], \\
I_2 &:= \int_0^\tau ds \int_0^s du \ \mathrm{tr}\Big[\mathcal{L}_1(s)\mathcal{U}(s,u)\mathcal{L}_2(u)\rho(u)\Big], \\
I_3 &:= -\Big(\int_0^\tau dt \ \kappa_H \mathrm{tr}\Big[H(t)\rho(t)\Big]\Big)^2, \\
\mathcal{L}_1\bullet &:= -i\kappa_H H\bullet + \frac{1}{2}\sum_k \kappa_k \Big[L_k \bullet L_k^\dagger - L_k^\dagger L_k \bullet\Big], \\
\mathcal{L}_2\bullet &:= \bullet i\kappa_H H + \frac{1}{2}\sum_k \kappa_k \Big[L_k \bullet L_k^\dagger - \bullet L_k^\dagger L_k\Big], \\
\frac{\partial \mathcal{U}(s,u)}{\partial s} &= \mathcal{L}(s)\mathcal{U}(s,u), \quad \mathcal{U}(u,u) = 1.
\end{aligned}$$

SN and Y. Utsumi, PRE **108**, 054136 (2023).
T. Nishiyama and Y. Hasegawa, PRE **109**, 044114 (2024).

数値計算(KUR)

$$H = \Delta|1\rangle\langle 1| + \Omega(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)$$
$$L_1 = \sqrt{\gamma n}|1\rangle\langle 0|$$
$$L_2 = \sqrt{\gamma(n+1)}|0\rangle\langle 1|$$



We set $\Omega = \gamma$, $\Delta = 0.25\gamma$, $n = 1$, and $\rho(0) = \frac{1}{2}(1 + 0.2\sigma_x + 0.3\sigma_y - 0.4\sigma_z)$

SN and Y. Utsumi, PRE **108**, 054136 (2023).

長谷川の方法(1)

$$|\Phi(t)\rangle = U(t)|\Phi(0)\rangle$$

$$|\Phi(0)\rangle := |\tilde{\psi}(0)\rangle \otimes |0\rangle, \quad \mathrm{Tr}_A[|\tilde{\psi}(0)\rangle\langle\tilde{\psi}(0)|] = \rho(0)$$

$$U(t) = \mathrm{T}\exp\left[\int_0^t ds \left\{ -iH(s)\otimes 1_B + \sum_k [L_k(s)\otimes\phi_k^\dagger(s) - L_k(s)^\dagger \otimes \phi_k(s)]\right\}\right].$$

$$[\phi_k(t), \phi_l^\dagger(s)] = \delta_{kl}\delta(t-s)$$ 量子場

$|0\rangle$ is the vacuum state for the fields.

$$\rho(t) = \underline{\mathrm{Tr}_B}[|\Phi(t)\rangle\langle\Phi(t)|]$$

量子場とアンシラ系について

Y. Hasegawa, Nat. Commun. **14**, 2828 (2023).

長谷川の方法(2)

$$|\Psi_\tau(s;t)\rangle := V_\tau(s;t)|\Phi(0)\rangle$$

$$V_\tau(s;t) := \mathrm{T}\exp\left[\int_0^s du\left\{-i\frac{t}{\tau}H\left(\frac{t}{\tau}u\right)\otimes 1_B + \sqrt{\frac{t}{\tau}}\sum_k\left[L_k\left(\frac{t}{\tau}u\right)\otimes\phi_k^\dagger(u) - L_k\left(\frac{t}{\tau}u\right)^\dagger\otimes\phi_k(u)\right]\right\}\right]$$

$$\rho_\tau(s;t_1,t_2) := \mathrm{Tr}_B[|\Psi_\tau(s;t_1)\rangle\langle\Psi_\tau(s;t_2)|]$$

Two-sided GKSL equation $$\frac{\partial\rho_\tau(s;t_1,t_2)}{\partial s} = \mathcal{L}_\tau(s;t_1,t_2)\rho_\tau(s;t_1,t_2)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\tau(s;t_1,t_2)\bullet = &-i\frac{t_1}{\tau}H\left(\frac{t_1}{\tau}s\right)\bullet + \bullet\, i\frac{t_2}{\tau}H\left(\frac{t_2}{\tau}s\right)\\ &+\sqrt{\frac{t_1}{\tau}}\sqrt{\frac{t_2}{\tau}}\sum_k L_k\left(\frac{t_1}{\tau}s\right)\bullet L_k\left(\frac{t_2}{\tau}s\right)^\dagger\\ &-\frac{1}{2}\sum_k\left[\frac{t_1}{\tau}L_k\left(\frac{t_1}{\tau}s\right)^\dagger L_k\left(\frac{t_1}{\tau}s\right)\bullet + \bullet\,\frac{t_2}{\tau}L_k\left(\frac{t_2}{\tau}s\right)^\dagger L_k\left(\frac{t_2}{\tau}s\right)\right]\end{aligned}$$

Y. Hasegawa, Nat. Commun. **14**, 2828 (2023).

長谷川のKUR

$$\mathcal{L}_\tau(s;t,t) = \frac{t}{\tau}\mathcal{L}\left(\frac{t}{\tau}s\right) \qquad \rho_\tau(s;t,t) = \rho\left(\frac{t}{\tau}s\right)$$

KUR $\boxed{\frac{\tau^2 \dot{\mathcal{C}}^2}{\langle \mathcal{C}^2 \rangle - \langle \mathcal{C} \rangle^2} \leq \mathcal{B}(\tau)}$

$$\begin{aligned}\langle X \rangle &:= \langle \Psi_\tau(\tau;\tau)|X|\Psi_\tau(\tau;\tau)\rangle \\ &= \langle \Phi(\tau)|X|\Phi(\tau)\rangle\end{aligned}$$

$$\dot{\mathcal{C}} := \partial_t \langle \Psi_\tau(\tau;t)|\mathcal{C}|\Psi_\tau(\tau;t)\rangle\big|_{t=\tau}$$

$\mathcal{B}(t) := t^2 \mathcal{J}(t)$ “The quantum generalization of the dynamical activity”.

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(t) := 4[&\langle \partial_t \Psi_\tau(\tau;t)|\partial_t \Psi_\tau(\tau;t)\rangle \\ &- \langle \partial_t \Psi_\tau(\tau;t)|\Psi_\tau(\tau;t)\rangle\langle \Psi_\tau(\tau;t)|\partial_t \Psi_\tau(\tau;t)\rangle].\end{aligned}$$

エネルギーの分散の4倍。量子フィッシャー情報量。

Y. Hasegawa, Nat. Commun. **14**, 2828 (2023).

Quantum generalization of the dynamical activity

H, L_k が時間に依存しないとき、

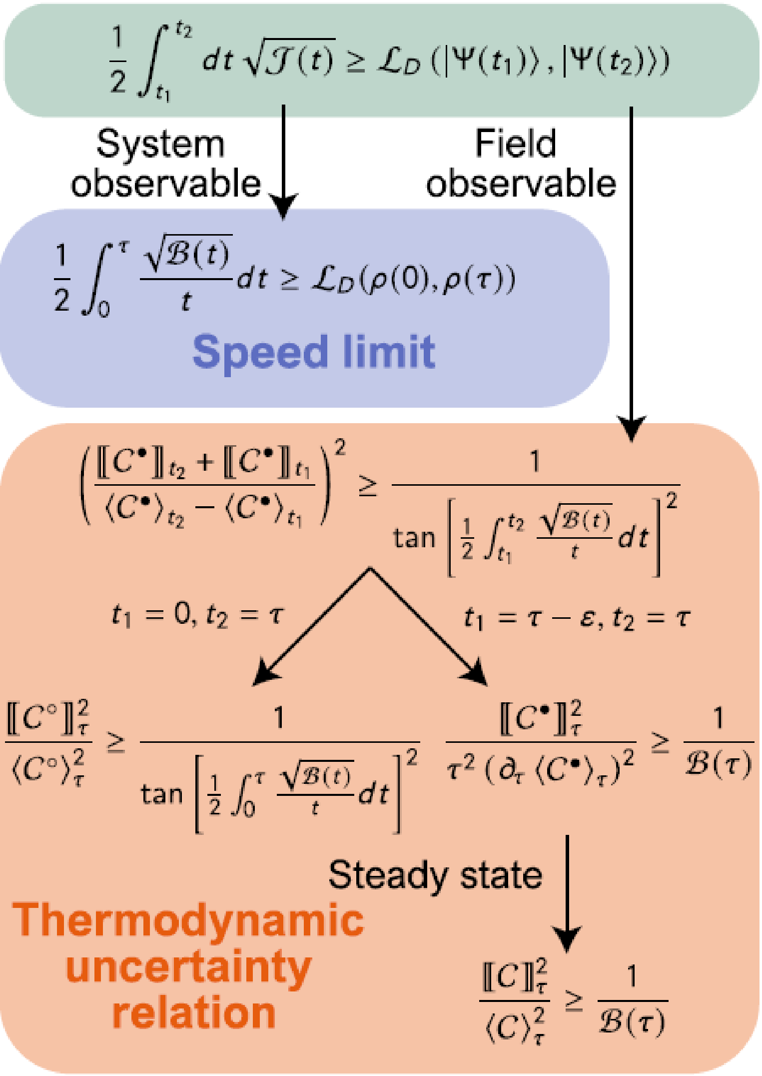
$$\mathcal{B} = B + Q_+$$

$$Q_+ = 4(I_1 + I_2 + I_3)$$

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_0^\tau ds \int_0^s du \; \mathrm{tr}\Big[\mathcal{L}_2(s) e^{\mathcal{L}(s-u)} \mathcal{L}_1(u)\rho(u)\Big], \\
I_2 &:= \int_0^\tau ds \int_0^s du \; \mathrm{tr}\Big[\mathcal{L}_1(s) e^{\mathcal{L}(s-u)} \mathcal{L}_2(u)\rho(u)\Big], \\
I_3 &:= -\Big(\int_0^\tau dt \; \mathrm{tr}\Big[H\rho(t)\Big]\Big)^2, \\
\mathcal{L}_1 \bullet &:= -iH \bullet + \frac{1}{2}\sum_k \Big[L_k \bullet L_k^\dagger - L_k^\dagger L_k \bullet\Big], \\
\mathcal{L}_2 \bullet &:= \bullet iH + \frac{1}{2}\sum_k \Big[L_k \bullet L_k^\dagger - \bullet L_k^\dagger L_k\Big].
\end{aligned}$$

SN and Y. Utsumi, PRE **108**, 054136 (2023).

Remark



Mandelstam-Tammの式

長谷川によると、Mandelstam-Tammの式からKURが出る。

V. T. Vo, T. V. Vu, and Y. Hasegawa,
J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 405004 (2022)
によると、TKURから白石・布能・齊藤の速度限界が出る。

もしかして、速度限界と熱力学的不確定性関係は同じもの？

Y. Hasegawa, Nat. Commun. **14**, 2828 (2023).

まとめ

パラメーラーを動かしているときの動的定常状態の漸近展開について調べた。
その漸近展開を速度限界に応用し、白石・布能・齊藤の速度限界の等号達成の例を見付けた。

SN and Y. Utsumi, PRE **104**, 054139 (2021).

量子開放系の速度限界を調べた。

SN and Y. Utsumi, New. J. Phys. **24**, 095004 (2022).
K. Sekiguchi, SN, K. Funo, H. Tajima, arXiv:2410.11604

量子開放系の熱力学的不確定性関係について調べ、量子補正項の解析的な表式を与えた。

SN and Y. Utsumi, PRE **108**, 054136 (2023).

Borel和

発散級数　$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$　に対して、

$$\mathcal{B}[S](s) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} s^n$$　ボレル関数

が正の収束半径を持ち、正の実軸上に解析接続できるとき、

$$\tilde{S} := \int_0^{\infty} ds\ e^{-s} \mathcal{B}[S](s)$$

を*S*のボレル和という。

江沢洋『漸近解析入門』岩波, 2013年.