時空代数

中嶋 慧

June 21, 2018

1　導入

γ^μ を

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu},\ \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{1.1}$$

を満たすクリフォード代数の単位とする。γ_μ を、

$$\gamma_\mu \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\gamma^\mu)^{-1} \tag{1.2}$$

で定義すると、$\gamma_0 = \gamma_0$, $\gamma_i = -\gamma^i$ である。σ_i を

$$\sigma_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \gamma_i\gamma_0 \tag{1.3}$$

で定義すると、

$$\gamma_\mu v^\mu = (v_0 + \sigma_i v^i)\gamma_0 \tag{1.4}$$

である。今、

$$\boldsymbol{a} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma_i a^i, \quad \boldsymbol{b} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma_i b^i \tag{1.5}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ab} &= a^i b^j \sigma_i\sigma_j \\ &= a^i b^j \gamma_i\gamma_0\gamma_j\gamma_0 \\ &= a^i b^i - a^i b^j \gamma_{[i}\gamma_{j]}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

今、

$$I \stackrel{\mathrm{def}}{=} \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{1.7}$$

とすると、

$$I^2 = -1, \tag{1.8}$$

$$I\gamma_\mu\gamma_\nu = \gamma_\mu\gamma_\nu I. \tag{1.9}$$

また、

$$I\sigma_1 = -\gamma_2\gamma_3\,,\quad I\sigma_2 = \gamma_1\gamma_3\,,\quad I\sigma_3 = -\gamma_1\gamma_2, \tag{1.10}$$

$$I\gamma_1\gamma_2 = -\gamma_0\gamma_3\,,\quad I\gamma_1\gamma_3 = \gamma_0\gamma_2\,,\quad I\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_0\gamma_1 \tag{1.11}$$

である。これは、

$$I\sigma_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_i{}^{jk}\gamma_j\gamma_k, \tag{1.12}$$

$$I\gamma_{[i}\gamma_{j]} = \varepsilon_{ij}{}^k\sigma_k \tag{1.13}$$

と書ける。ところで、

$$\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba} = -2a^i b^j \gamma_{[i}\gamma_{j]}, \tag{1.14}$$

$$-\frac{I}{2}(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba}) = a^i b^j \varepsilon_{ij}{}^k \sigma_k \equiv \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \tag{1.15}$$

よって、

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba}) = I\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \tag{1.16}$$

また、

$$I\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}a^i\varepsilon_i{}^{jk}\gamma_j\gamma_k \equiv a^{jk}\gamma_{[j}\gamma_{k]}, \tag{1.17}$$

$$a^{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}a^i\varepsilon_i{}^{jk}. \tag{1.18}$$

なお、

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba}) = a^i b^i \equiv \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \tag{1.19}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ab} &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + I\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

　ここで、

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^\mu \partial_\mu \tag{1.21}$$

を導入すると、

$$D\gamma_0 = \partial_0 - \sigma_i\partial_i \equiv \partial_0 - \boldsymbol{\nabla} \tag{1.22}$$

2　電磁場

2.1　ベクトルポテンシャル

$$A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \gamma_\mu A^\mu \tag{2.1}$$

は、ローレンス条件

$$\partial_0 A_0 + \partial_i A^i = 0 \tag{2.2}$$

を満たすとする。この時、

$$\begin{aligned} F &\stackrel{\mathrm{def}}{=} DA \\ &= D\gamma_0\gamma_0 A \\ &= (\partial_0 - \boldsymbol{\nabla})(A_0 - \boldsymbol{A}) \\ &= \partial_0 A_0 - \partial_0 \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla} A_0 + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A} \\ &= -\partial_0\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla} A_0 + \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A} \\ &= \boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで、

$$\boldsymbol{E} = -\partial_0\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla} A_0, \tag{2.4}$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \tag{2.5}$$

はそれぞれ 2 形式である。

2.2　モノポールありのマクスウェル方程式

　磁荷もある場合を考え、

$$F \stackrel{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}^{(2)} \tag{2.6}$$

とする。$\boldsymbol{B}^{(2)}$ は磁場の 2 形式

$$\boldsymbol{B}^{(2)} = -B^{ij}\gamma_{[i}\gamma_{j]} \tag{2.7}$$

で、4 次元時空では、$I\boldsymbol{B}$ と書ける。また、

$$\boldsymbol{E} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \gamma_i\gamma_0 E^i = -\gamma_0\gamma_i E^i \tag{2.8}$$

である。この時、

$$\begin{aligned} DF &= (\gamma_0\partial_0 - \gamma_i\partial_i)(-\gamma_0\gamma_j E^j - B^{jk}\gamma_{[j}\gamma_{k]}) \\ &= -\gamma_i\partial_0 E^i - \gamma_0\gamma_{[j}\gamma_{k]}\partial_0 B^{jk} - \gamma_0\gamma_i\gamma_j\partial_i E^j + \gamma_i\gamma_{[j}\gamma_{k]}\partial_i B^{jk} \\ &= -\gamma_i\partial_0 E^i - \gamma_0\gamma_{[i}\gamma_{j]}\partial_0 B^{ij} + \gamma_0\partial_i E^i - \gamma_0\gamma_{[i}\gamma_{j]}\partial_i E^j + \gamma_i\gamma_{[j}\gamma_{k]}\partial_i B^{jk} \end{aligned} \tag{2.9}$$

である。ここで、公式

$$\gamma_i \gamma_{[j}\gamma_{k]} = \gamma_{[i}\gamma_j\gamma_{k]} - 2\delta_{i[j}\gamma_{k]} \tag{2.10}$$

を使うと、

$$DF = \gamma_0 \partial_i E^i + \gamma_{[i}\gamma_j\gamma_{k]}\partial_i B^{jk} - \gamma_0\gamma_{[i}\gamma_{j]}(\partial_0 B^{ij} + \partial_i E^j) + \gamma_i(-\partial_0 E^i - 2\partial_j B^{ji}) \tag{2.11}$$

となる。マクスウェル方程式

$$\partial_i E^i = \rho, \tag{2.12}$$

$$-\partial_0 E^i - 2\partial_j B^{ji} = J^i \tag{2.13}$$

より、

$$DF = \gamma_0 \rho + \gamma_{[i}\gamma_j\gamma_{k]}\partial_i B^{jk} - \gamma_0\gamma_{[i}\gamma_{j]}(\partial_0 B^{ij} + \partial_i E^j) + \gamma_i J^i \tag{2.14}$$

である。これに、4 次元時空で成り立つ $B^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}{}_k B^k$ を代入して、

$$\begin{aligned}
\gamma_{[i}\gamma_j\gamma_{k]}\partial_i B^{jk} &= \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_l{}^{jk}\partial_i B^l \\
&= \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \partial_i B^i \\
&= \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \rho_{(m)} \\
&= \gamma_0 I \rho_{(m)}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

および、

$$\begin{aligned}
-\gamma_{[i}\gamma_{j]}(\partial_0 B^{ij} + \partial_i E^j) &= -\gamma_{[i}\gamma_{j]}(\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}{}_k \partial_0 B^k + \partial_i E^j) \\
&= I\sigma_k \partial_0 B^k + I\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} \\
&= I(\partial_0 \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \\
&= -I\boldsymbol{J}_{(m)}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

を得る。ここで、

$$\boldsymbol{j}_{(m)} = \gamma_i\gamma_0 J^i_{(m)} \tag{2.17}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
DF &= \gamma_0 \rho + \rho_{(m)}\gamma_0 I - \gamma_0 I \boldsymbol{J}_{(m)} + \gamma_i J^i \\
&= \rho\gamma_0 + \rho_{(m)}\gamma_0 I + \boldsymbol{J}_{(m)}\gamma_0 I + \boldsymbol{J}\gamma_0 \\
&= J + J_{(m)} I,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$J = (\rho + \boldsymbol{J})\gamma_0, \tag{2.19}$$

$$J_{(m)} = (\rho_{(m)} + \boldsymbol{J}_{(m)})\gamma_0 \tag{2.20}$$

を得る。

ところで、

$$
\begin{aligned}
DF &= \gamma_0\partial_i E^i + \gamma_0 I\partial_i B^i + \gamma_0 I(\partial_0 \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) + \gamma_i(-\partial_0 E^i + \varepsilon^i{}_{jk}\partial_j B^k) \\
&= \gamma_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} + \gamma_0 I\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} + \gamma_0 I(\partial_0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) + \gamma_0(\partial_0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

は次のようにしても得られる：

$$
\begin{aligned}
DF &= \gamma_0(\partial_0 + \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B}) \\
&= \gamma_0[\partial_0\boldsymbol{E} + I\partial_0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B}] \\
&= \gamma_0[\partial_0\boldsymbol{E} + I\partial_0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}].
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

2.3 双対方程式

双対方程式は、

$$
\begin{aligned}
F\overleftarrow{D} &= (-\gamma_0\gamma_j E^j - B^{jk}\gamma_{[j}\gamma_{k]})(\gamma_0\overleftarrow{\partial_0} - \gamma_i\overleftarrow{\partial_i}) \\
&= \gamma_i\partial_0 E^i - \partial_0 B^{jk}\gamma_0\gamma_{[j}\gamma_{k]} + \gamma_0\gamma_j\gamma_i\partial_i E^j + \partial_i B^{jk}\gamma_{[j}\gamma_{k]}\gamma_i \\
&= \gamma_i\partial_0 E^i - \partial_0 B^{jk}\gamma_0\gamma_{[j}\gamma_{k]} - \partial_i E^j - \gamma_0\gamma_{[i}\gamma_{j]}\partial_i E^j + \partial_i B^{jk}\gamma_{[j}\gamma_{k]}\gamma_i
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

である。ここで、

$$
\gamma_{[j}\gamma_{k]}\gamma_i = \gamma_{[i}\gamma_j\gamma_{k]} + 2\delta_{i[j}\gamma_{k]}
\tag{2.24}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
F\overleftarrow{D} &= -\partial_i E^j + \gamma_{[i}\gamma_j\gamma_{k]}\partial_i B^{jk} - \gamma_0\gamma_{[i}\gamma_{j]}(\partial_0 B^{jk} + \partial_i E^j) + \gamma_i(\partial_0 E^i + 2\partial_j B^{ji}) \\
&= -J + J_{(m)}I
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

となる。

2.4 ローレンツ力

$$
FDF + F\overleftarrow{D}F = \partial_\mu(F\gamma^\mu F)
\tag{2.26}
$$

である。

$$
S^\mu \overset{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{2}F\gamma^\mu F
\tag{2.27}
$$

とすると、

$$
\partial_\mu S^\mu = -\frac{1}{2}(FDF + F\overleftarrow{D}F) \equiv -K
\tag{2.28}
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
K &= K_e + K_m, && (2.29)\\
K_e &= \frac{1}{2}(FJ - JF), && (2.30)\\
K_m &= \frac{1}{2}(FJ_{(m)}I + J_{(m)}IF) && (2.31)
\end{aligned}
$$

となる。また、

$$
\begin{aligned}
K_e\gamma_0 &= \frac{1}{2}(FJ - JF)\gamma_0\\
&= \frac{1}{2}(FJ\gamma_0 - J\gamma_0F^*)\\
&= \frac{1}{2}[(\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B})(\rho + \boldsymbol{J}) - (\rho + \boldsymbol{J})(-\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B})] \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

ここで、$F^* = -\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B}$ は $F\gamma_0 = \gamma_0 F^*$ で定義した。これは、

$$
\begin{aligned}
K_e\gamma_0 &= \rho\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}I(\boldsymbol{BJ} - \boldsymbol{JB}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{EJ} + \boldsymbol{JE})\\
&= \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

となる。これは、ローレンツ力と相互作用エネルギーを表す。

磁気的対応物は、

$$
\begin{aligned}
K_m\gamma_0 &= \frac{1}{2}(FJ_{(m)}I + J_{(m)}IF)\gamma_0\\
&= \frac{1}{2}(FJ_{(m)}I\gamma_0 + J_{(m)}I\gamma_0F^*)\\
&= -\frac{1}{2}(FJ_{(m)}\gamma_0 I + J_{(m)}\gamma_0 IF^*)\\
&= -\frac{1}{2}[(\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B})(\rho_{(m)} + \boldsymbol{J}_{(m)})I + (\rho_{(m)} + \boldsymbol{J}_{(m)})I(-\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B})]\\
&= \rho_{(m)}\boldsymbol{B} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{J}_{(m)} - \boldsymbol{J}_{(m)}\boldsymbol{E})I + \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{J}_{(m)} + \boldsymbol{J}_{(m)}\boldsymbol{B})\\
&= \rho_{(m)}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{J}_{(m)}\times\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_{(m)}\cdot\boldsymbol{B} \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

である。これは、「ローレンツ力」と相互作用エネルギーを表す。

References

[1] J. Dressel, K. Y. Bliokh, Franco Nori, "Spacetime algebra as a powerful tool for electromagnetism", Phys. Rep. 589 (2015) 1.