卒論の縮小版：場の量子論における真空の属性と量子ソリトン

中嶋 慧

2022 年 2 月 14 日

概 要

この pdf は 2011 年度 (平成 23 年度) の私の卒論の縮小版である。多少の修正を加えた (特に §3.2)。

目 次

1 はじめに

1.1 概要

量子力学では，質点が量子化される。質点の位置 $\hat{\boldsymbol{q}}$ は演算子である。

$$\hat{\boldsymbol{q}}|\boldsymbol{x}\rangle = \boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\rangle \tag{1.1}$$

なる位置の固有状態が導入され，x-表示の波動関数 $\psi(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}|\psi\rangle$ の自乗 $|\psi(\boldsymbol{x})|^2$ が確率密度と解釈される。位置演算子 $\hat{\boldsymbol{q}}$ と運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}}$ は正準交換関係

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

を満たす。

場の量子論では，場が量子化される。あるハイゼンベルグ場（ハイゼンベルグ描像の場）$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}, t)$ に対して，その正準共役場 $\hat{\pi}(\boldsymbol{x}, t)$ が存在し，正準交換関係

$$[\hat{\psi}(\boldsymbol{x}, t), \hat{\pi}(\boldsymbol{x}', t)] = i\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{1.3}$$

が満たされる（ボソンの場合）。場の量子論では位置 $\boldsymbol{x}$ は時間 t と同様に c 数である。したがって，場の量子論では位置の演算子 $\hat{\boldsymbol{q}}$ なる量は現れないと思われる。しかし，この論文では，場の量子論から自然に巨視的物体（extended objects）[1)]の位置を表わす演算子 $\hat{\boldsymbol{q}}$ が現れることを示す。量子力学的演算子 $\hat{\boldsymbol{q}}$ はハイゼンベルグ場 $\hat{\psi}(\boldsymbol{x}, t)$ に $\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{q}}$ の形で含まれる。量子力学のときの同じ

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{1.4}$$

を満たす運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}}$ によって，ハイゼンベルグ場は

$$e^{-i\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{c}}\hat{\psi}(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{q}}, t)e^{i\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{c}} = \hat{\psi}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} - \hat{\boldsymbol{q}}, t) \tag{1.5}$$

と変換される。この辺りの「からくり」を以下で詳しく説明する。

量子力学では有限自由度の系が扱われる。§1.2.1 で，量子力学では真空は 1 種類しかないことを示す。それに対して，場の量子論では無限自由度の系が扱われる。§1.2.2 において，場の理論では非可算無限個の真空が存在することを示す。したがって，場の量子論の方がはるかに豊かな体系である。本論文では，場の量子論における真空の属性を詳しく考察する。

多数の異なる相の出現は，ハイゼンベルグ場の運動を，異なる Fock 空間で記述することに対応する。各 Fock 空間は，それぞれの真空への粒子凝縮の形によって区別される。ある Fock 空間の真空 $|0\rangle$ が $a(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0$ により定義されるとき，$a^\dagger(\boldsymbol{k})$ により生成される粒子を準粒子と言う。いかなる演算子も，ある準粒子の真空 $|0\rangle$ 上の Fock 空間への作用として定義される。従って，ハイゼンベルグ場 $\psi(x)$ は，準粒子場 $\varphi(x)$ または，準粒子の生成・消滅演算子 $a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})$ によって，$\psi(x) = \psi[x|\varphi] = \psi[x|a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})]$ のように表わされなければならない。このように，ハイゼンベルグ場を準粒子場で表わしたものをダイナミカルマップと言う（§2.1 参照）。

変換の生成子 N は，一般に $N = \int d^3x\, \rho(x)$ の形で書ける。N 変換に対してハミルトニアンは不変であるとする。$\rho(x)$ が場とその導関数で与えられるとき，N は

$$N \overset{\mathrm{w}}{=} \int d^3k \left[c(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + \{b^*\chi(\boldsymbol{k}) + b\chi^\dagger(\boldsymbol{k})\}\delta^3(\boldsymbol{k})\right]$$

---

1) 結晶中の転位（線），境界，欠陥や，超流動体中の渦糸，磁性体の磁気的ドメインなど，量子効果によって現れる巨視的な構造。

の形となる（§2.2.1 参照)。ただし，$a(\boldsymbol{k})$，$\chi(\boldsymbol{k})$ は準粒子であり，$\chi(\boldsymbol{k})$ のエネルギー $\omega_\chi(\boldsymbol{k})$ は $\omega_\chi(\boldsymbol{0})=0$ を満たす。N による変換により，χ-場は $e^{i\theta N}\chi(x)e^{-i\theta N}=\chi(x)-c\theta$ と変換される。ある種の粒子の有限密度の凝縮が，N 不変でない真空を形成したとする：$N|0\rangle\neq 0$. これは $|0\rangle$ 上の Fock 空間では N 対称性が自発的に破れていることを表わす。このとき χ-粒子が存在する。よって，自発的に対称性が破れると $\omega_\chi(\boldsymbol{0})=0$ なる粒子が存在する。これを南部-Goldstone 定理と言う（§2.3.2 参照)。

量子場 $\psi(x)$，準粒子場 $\varphi(x)$ の方程式を，それぞれ，$\Lambda(\partial)\psi(x)=j[\psi](x)$，$\Lambda(\partial)\varphi(x)=0$ とする。$\Lambda(\partial)f(x)=0$ なる c 数関数によって $\varphi_f(x)\stackrel{\text{def}}{=}\varphi(x)-f(x)$ を定義する。変換 $\varphi(x)\to\varphi_f(x)$ は一般に相転移に対応する。$\varphi(x)$，$\varphi_f(x)$ の消滅演算子を $a(\boldsymbol{k})$，$a_f(\boldsymbol{k})$ とし，真空 $|0\rangle$，$|0(f)\rangle$ を $a(\boldsymbol{k})|0\rangle=0$, $a_f(\boldsymbol{k})|0(f)\rangle=0$ で定義する。また，$\langle 0|\psi(x)|0\rangle=0$ とする。このとき，$\phi(x)\stackrel{\text{def}}{=}\langle 0(f)|\psi(x)|0(f)\rangle$ を場の秩序パラメーターという（§2.3.1，§2.3.3 参照)。

$\psi(x)$ のダイナミカルマップを $\psi(x)=\sum_{n=-1}^{\infty}\psi_n(x)$ とかく。ただし，ψ_n は準粒子の $(n+1)$ 次の N 積である。特に，$\psi_{-1}(x)$ は場の秩序パラメーター $\phi(x)$ である。場の方程式を $\phi(x)$ のまわりでテーラー展開し，準粒子の次数で式を分類すると，最低次と次の次数の方程式として，それぞれ

$$\Lambda(\partial)\phi(x)=j[\phi](x)\,,\quad \Big(\Lambda(\partial)-j_1[\phi]\Big)\psi_0=0$$

を得る。ただし，$j_1[\phi]\psi_0\equiv\int d^4y\ \lim_{\varepsilon\to 0}\big(j[\phi(\bullet)+\varepsilon\psi_0(\bullet)\delta^4(\bullet-y)](x)-j[\phi](x)\big)/\varepsilon$ である。$\phi(x)$ が時間によらないとき，$\partial_i\phi(\boldsymbol{x})$ が上の第 2 式の解であることが分かる。これは離散的なゼロ・エネルギー・モードである。$\psi_0(x)$ は $\psi_0(x)=-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi+\varphi(x)$ となる。ただし，$\varphi(x)$ は連続モードを表わし，$\boldsymbol{q}$ は量子力学的演算子を表わす。量子力学的演算子は，巨視的物体の存在によって，空間の並進対称性が自発的に破れたことに付随する NG モードを表わすと解釈される（§2.3.3 参照)。

第 3 章で，(1+1) 次元の sine-Gordon モデル $(\partial_x^2-\partial_t^2)\psi(x)=\mu^2\sin\psi(x)$ を考える。$\Lambda(\partial)$ を $\partial_x^2-\partial_t^2-\mu^2$ に選ぶ。$\Lambda(\partial)f(x)=0$ の解の１つとして $e^{\mu X}$ がある。ただし，X は一般化座標と呼ばれる，$x-q$，t の関数である（q は量子力学的演算子である)。$f(x)=e^{\mu X}$ とき，場の秩序パラメーターは tree 近似の範囲で

$$\phi(X)=4\tan^{-1}\frac{e^{\mu X}}{4}$$

となる。これは sine-Gordon モデルのキンク解として知られるものである（第 3 章参照)。

本論文では，主に文献 [1]，[2] を参考にした。第 3 章は論文 [3] をもとにした。また，考察をボソンに限った。付録では，本文では省略した計算や，本文への補足が行われる。本論文では，光速度 c を 1 とする。また，特に断らない限り，換算プランク定数 $\hbar$ も 1 とする。テンソルの成分を表わす添え字に $i,j,k,\cdots$ や $\mu,\nu,\alpha,\cdots$ を用いる。ラテン文字は $1,2,3$，ギリシャ文字は $0,1,2,3$ の値を取る。ただし，ラテン文字はテンソルの成分以外にも様々な添え字に使われる。メトリック $\eta_{\mu\nu}$ は $\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ とする。

1.2 量子力学と場の量子論との相違

1.2.1 量子力学と同値定理

正準交換関係

$$\left[a_i,a_j^\dagger\right]=\delta_{ij}\,,\quad \left[b_i,b_j^\dagger\right]=\delta_{ij} \tag{1.6}$$

を満たしている有限個の生成・消滅演算子の組 $\{a_i,a_i^\dagger,b_i,b_i^\dagger\}_{i=1}^N$ を考える。ただし，これ以外の交換関係は 0 であるとする。また，真空 $|0\rangle$ を

$$a_i|0\rangle=0\,,\quad b_i|0\rangle=0\qquad \text{for all}\ \ i \tag{1.7}$$

によって導入する。それぞれの i に対して，

$$a_i|0\rangle_i = 0\,, \quad b_i|0\rangle\!\rangle_i = 0 \tag{1.8}$$

によって真空 $|0\rangle_i$，$|0\rangle\!\rangle_i$ を導入すると，$|0\rangle$ は

$$|0\rangle = \bigotimes_{i=1}^{N} |0\rangle_i \otimes \bigotimes_{j=1}^{N} |0\rangle\!\rangle_j \tag{1.9}$$

と書ける。

今，個数状態 $|n_i\rangle_i$，$|m_i\rangle\!\rangle_i$ を，固有値方程式

$$a_i^\dagger a_i|n_i\rangle_i = n_i|n_i\rangle_i\,, \quad b_i^\dagger b_i|m_i\rangle\!\rangle_i = m_i|m_i\rangle\!\rangle_i \tag{1.10}$$

を満たすものとして導入する。固有値は

$$n_i, m_i = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.11}$$

である（§A.1 参照）。また，(A.27) より，固有状態は

$$|n_i\rangle_i = \frac{1}{\sqrt{n_i!}}(a_i^\dagger)^{n_i}|0\rangle_i\,, \quad |m_i\rangle\!\rangle_i = \frac{1}{\sqrt{m_i!}}(b_i^\dagger)^{m_i}|0\rangle\!\rangle_i \tag{1.12}$$

で与えられることが分かる。$\{|n_i\rangle_i\}$，$\{|m_i\rangle\!\rangle_i\}$ は規格直交性

$${}_i\langle n_i|n_i'\rangle_i = \delta_{n_i n_i'}\,, \quad {}_i\langle\!\langle m_i|m_i'\rangle\!\rangle_i = \delta_{m_i m_i'} \tag{1.13}$$

を満たす。また $\{|n_i\rangle_i\}$，$\{|m_i\rangle\!\rangle_i\}$ は完全性

$$\sum_{n_i=0}^{\infty} |n_i\rangle_{i\,i}\langle n_i| = 1_i^{(a)}\,, \quad \sum_{m_i=0}^{\infty} |m_i\rangle\!\rangle_{i\,i}\langle\!\langle m_i| = 1_i^{(b)} \tag{1.14}$$

も満たしているものとする。ここで，$1_i^{(a)}$（$1_i^{(b)}$）は a_i，$a_i^\dagger$（b_i，$b_i^\dagger$）が作用するベクトル空間における恒等演算子である。

今，個数状態

$$|\{n_i\}, \{m_i\}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{i=1}^{N} |n_i\rangle_i \otimes \bigotimes_{j=1}^{N} |m_j\rangle\!\rangle_j \tag{1.15}$$

を導入すると，全ての i に対して

$$a_i^\dagger a_i|\{n_i\}, \{m_i\}\rangle = n_i|\{n_i\}, \{m_i\}\rangle\,, \quad b_i^\dagger b_i|\{n_i\}, \{m_i\}\rangle = m_i|\{n_i\}, \{m_i\}\rangle \tag{1.16}$$

となる。(1.13)，(1.14) より，基底 $\big\{|\{n_i\}, \{m_i\}\rangle\big\}$ は規格直交完全系をなしていることが分かる。すなわち，

$$\begin{aligned}\langle\{n_i\}, \{m_i\}|\{n_i'\}, \{m_i'\}\rangle &= \prod_{i=1}^{N} {}_i\langle n_i|n_i'\rangle_i \cdot {}_i\langle\!\langle m_i|m_i'\rangle\!\rangle_i \\ &= \prod_{i=1}^{N} \delta_{n_i, n_i'}\delta_{m_i, m_i'},\end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\Big(\prod_{i=1}^{N} \sum_{n_i, m_i=0}^{\infty}\Big)|\{n_i\}, \{m_i\}\rangle\langle\{n_i\}, \{m_i\}| = 1 \tag{1.18}$$

である。ただし，$1 = \bigotimes_{i=1}^N 1_i^{(a)} \otimes \bigotimes_{j=1}^N 1_j^{(b)}$ である。この基底によって張られる，規格化可能なベクトルの全体を $|0\rangle$ 上の Fock 空間と言い，$\mathcal{H}(a,b)$ と書く。また，以下では $\bigotimes_i$ を単に $\prod_i$ で表わす。

ここで，新たな演算子

$$a_i(\theta) \;=\; U(\theta) a_i U^\dagger(\theta)\,, \quad b_i(\theta) = U(\theta) b_i U^\dagger(\theta) \tag{1.19}$$

を，ユニタリー演算子

$$U(\theta) \;=\; \exp\Bigl(\sum_i \theta_i (b_i^\dagger a_i^\dagger - a_i b_i)\Bigr) \tag{1.20}$$

により導入する。ただし，θ_i は実 c 数とする。(1.19) は

$$a_i(\theta) \;=\; a_i \cosh\theta_i - b_i^\dagger \sinh\theta_i, \tag{1.21}$$
$$b_i(\theta) \;=\; b_i \cosh\theta_i - a_i^\dagger \sinh\theta_i \tag{1.22}$$

となる（§A.3 参照)。交換関係 (1.6) と性質

$$U[A,B]U^\dagger = [UAU^\dagger, UBU^\dagger] \tag{1.23}$$

より，$\{a_i(\theta), a_i^\dagger(\theta), b_i(\theta), b_i^\dagger(\theta)\}_{i=1}^N$ も正準交換関係

$$\Bigl[a_i(\theta), a_j^\dagger(\theta)\Bigr] \;=\; \delta_{ij}\,, \quad \Bigl[b_i(\theta), b_j^\dagger(\theta)\Bigr] = \delta_{ij}, \tag{1.24}$$
$$\tag{1.25}$$

を満たす。これ以外の交換関係は 0 である。

(1.19) より得られる

$$a_i \;=\; U^\dagger(\theta) a_i(\theta) U(\theta)\,, \quad b_i = U^\dagger(\theta) b_i(\theta) U(\theta) \tag{1.26}$$

を (1.7) に代入すると，

$$U^\dagger(\theta) a_i(\theta) U(\theta)|0\rangle = 0\,, \quad U^\dagger(\theta) b_i(\theta) U(\theta)|0\rangle = 0 \tag{1.27}$$

となる。ここで，状態

$$|0(\theta)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} U(\theta)|0\rangle \tag{1.28}$$

を導入すると，(1.27) は，

$$a_i(\theta)|0(\theta)\rangle = 0\,, \quad b_i(\theta)|0(\theta)\rangle = 0 \tag{1.29}$$

となる。

(1.29) より，$|0(\theta)\rangle$ が新しい真空であるように見えるが，以下で示すようにそれは正しくない。(1.20) を (1.28) に代入すると，

$$\begin{aligned}
|0(\theta)\rangle \;&=\; \exp\Bigl(\sum_{i=1}^N a_i^\dagger b_i^\dagger \tanh\theta_i\Bigr) \exp\Bigl(-\sum_{i=1}^N [a_i a_i^\dagger + b_i^\dagger b_i] \ln\cosh\theta_i\Bigr)|0\rangle \\
&=\; \exp\Bigl(-\sum_{i=1}^N \ln\cosh\theta_i\Bigr) \exp\Bigl(\sum_{i=1}^N \tanh a_i^\dagger b_i^\dagger \theta_i\Bigr)|0\rangle \\
&=\; \exp\Bigl(-\sum_{i=1}^N \ln\cosh\theta_i\Bigr) \prod_{i=1}^N \sum_{n_i=0}^\infty (\tanh\theta_i)^{n_i} |n_i\rangle_i |n_i\rangle\!\rangle_i \\
&=\; \exp\Bigl(-\sum_{i=1}^N \ln\cosh\theta_i\Bigr) \Bigl(\prod_{i=1}^N \sum_{n_i=0}^\infty\Bigr) \Bigl(\prod_{j=1}^N (\tanh\theta_j)^{n_j}\Bigr) |\{n_i\},\{n_i\}\rangle
\end{aligned} \tag{1.30}$$

が得られる。ただし，第 1 等号では (A.136) を利用して $U(\theta)$ を a_i，$a_i^\dagger$ および b_i，$b_i^\dagger$ の正規積に近い形に書き直し，(1.7) を用いた。第 2 等号では，正準交換関係 (1.6) を，第 3 等号では (1.12) を，第 4 等号では $\mathcal{H}(a,b)$ の基底 (1.15) を用いた。(1.30) の最後の式より，$|0(\theta)\rangle$ が $\mathcal{H}(a,b)$ の基底で展開されることが分かる。従って，$|0(\theta)\rangle$ は真空ではなく，真空 $|0\rangle$ 上の Fock 空間 $\mathcal{H}(a,b)$ に属する 1 つの状態ベクトルである。

今，ベクトル空間 $\mathcal{H}(a,b)$ を別の基底

$$|\{n_i\},\{m_i\}:\theta\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Big[\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n_i!m_i!}}(a_i^\dagger(\theta))^{n_i}(b_i^\dagger(\theta))^{m_i}\Big]|0(\theta)\rangle \qquad n_i, m_i = 0,1,2,\cdots \tag{1.31}$$

で表示することを考える。この基底は，(1.30)，(1.21)，(1.22) を用いると，$\mathcal{H}(a,b)$ の基底 (1.15) で表わせることが分かる。よって，(1.31) で張られる，規格化可能な任意のベクトルは $\mathcal{H}(a,b)$ に属する。逆に，$\mathcal{H}(a,b)$ の任意の元は基底 (1.31) で展開できることが分かる[2)]。量子力学には，真空（および Fock 空間）は 1 種類しかないのである（同値定理）。

1.2.2 場の量子論と非同値真空

連続変数 $\boldsymbol{k}$ でラベルされた，非可算無限自由度を持つ生成演算子 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$，$b^\dagger(\boldsymbol{k})$ と消滅演算子 $a(\boldsymbol{k})$，$b(\boldsymbol{k})$ を考える。これらは正準交換関係

$$[a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k}')] \;=\; \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\,, \quad [b(\boldsymbol{k}), b^\dagger(\boldsymbol{k}')] = \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{1.32}$$

を満たす。この他の交換関係は 0 である。また，真空 $|0\rangle$ を

$$a(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0\,, \quad b(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0 \tag{1.33}$$

によって導入する。$|0\rangle$ の上の Fock 空間を $\mathcal{H}[a,b]$ とする。$\mathcal{H}[a,b]$ は，$|0\rangle$ に $a^\dagger(\boldsymbol{k})$，$b^\dagger(\boldsymbol{k})$ をくり返し作用させて得られる基底ベクトルによって張られる，規格化可能なベクトルの集合である（§2.1.1 参照)。

ここで，新たな演算子

$$a_\theta(\boldsymbol{k}) \;=\; U[\theta]a(\boldsymbol{k})U^\dagger[\theta]\,, \quad b_\theta(\boldsymbol{k}) = U[\theta]b(\boldsymbol{k})U^\dagger[\theta] \tag{1.34}$$

をユニタリー演算子

$$U[\theta] \;=\; \exp\Big(\int d^3k\,\theta(\boldsymbol{k})\big[b^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) - a(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})\big]\Big) \tag{1.35}$$

により導入する。ただし，$\theta(\boldsymbol{k})$ は任意の滑らかな実 c 数関数である。前節と同様の計算により

$$a_\theta(\boldsymbol{k}) \;=\; a(\boldsymbol{k})\cosh\theta(\boldsymbol{k}) - b^\dagger(\boldsymbol{k})\sinh\theta(\boldsymbol{k}), \tag{1.36}$$

$$b_\theta(\boldsymbol{k}) \;=\; b(\boldsymbol{k})\cosh\theta(\boldsymbol{k}) - a^\dagger(\boldsymbol{k})\sinh\theta(\boldsymbol{k}) \tag{1.37}$$

を得る（§A.3 参照)。この変換は Bogoliubov 変換と呼ばれる。

(1.34) より得られる

$$a(\boldsymbol{k}) \;=\; U^\dagger[\theta]a_\theta(\boldsymbol{k})U[\theta]\,, \quad b(\boldsymbol{k}) = U^\dagger[\theta]b_\theta(\boldsymbol{k})U[\theta] \tag{1.38}$$

を (1.33) に代入すると，

$$U^\dagger[\theta]a_\theta(\boldsymbol{k})U[\theta]|0\rangle = 0\,, \quad U^\dagger[\theta]b_\theta(\boldsymbol{k})U[\theta]|0\rangle = 0 \tag{1.39}$$

2) これは，量子力学では，物理量の期待値は表示（基底）によらないことに対応する。

となる。ここで，状態

$$|0[\theta]\rangle \stackrel{\text{def}}{=} U[\theta]|0\rangle \tag{1.40}$$

を定義すると，この式は，

$$a_\theta(\boldsymbol{k})|0[\theta]\rangle = 0\,, \quad b_\theta(\boldsymbol{k})|0[\theta]\rangle = 0 \tag{1.41}$$

となる。

(1.35) を (1.40) に代入して，

$$\begin{aligned}
|0[\theta]\rangle \;&=\; \exp\Bigl(\int d^3k\ \tanh\theta(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})b^\dagger(\boldsymbol{k})\Bigr)\\
&\qquad\times\exp\Bigl(-\int d^3k\ \ln\cosh\theta(\boldsymbol{k})[a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})+b^\dagger(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})]\Bigr)|0\rangle\\
&=\; \exp\Bigl(-\delta^3(\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{0})\int d^3k\ \ln\cosh\theta(\boldsymbol{k})\Bigr)\exp\Bigl(\int d^3k\ \tanh\theta(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})b^\dagger(\boldsymbol{k})\Bigr)|0\rangle
\end{aligned} \tag{1.42}$$

を得る。ただし，第 1 等号で (A.137) を用い $U[\theta]$ を $a(\boldsymbol{k})$，$a^\dagger(\boldsymbol{k})$ および $b(\boldsymbol{k})$，$b^\dagger(\boldsymbol{k})$ の正規積に近い形に書き直し，(1.33) を用いた。第 2 等号では，正準交換関係 (1.32) を用いた。(1.42) の最後の式は，$|0[\theta]\rangle$ を $\mathcal{H}[a,b]$ の元で展開した表式であるが，

$$-\delta^3(\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{0})\int d^3k\ \ln\cosh\theta(\boldsymbol{k}) = -\infty \tag{1.43}$$

より，その展開係数は 0 である。これは $|0[\theta]\rangle$ が $\mathcal{H}[a,b]$ には属していないことを意味する。したがって，$|0[\theta]\rangle$ は $|0\rangle$ とは異なる新たな真空である（$|0\rangle$ とはユニタリー非同値な真空である）。これは，真空が 1 個しかない量子力学の場合との本質的な違いである。滑らかな関数 $\theta(\boldsymbol{k})$ は非可算無限個存在するので，非可算無限種類の真空が存在する。

(1.42) の表式は係数が 0 となり，数学的には意味がない。数学的な解析は，数学的に意味のある Bogoliubov 変換 (1.36)，(1.37) や (1.41) を基礎に置くべきである（§A.7，§A.8 参照）。また，(1.42) より，真空 $|0[\theta]\rangle$ の中に有限個の a-粒子を見つける確率は 0 である。これは次のことと関係している。

電子の制動輻射の最低次の摂動計算を行うと，遷移断面積が低エネルギー光子（ソフト・フォノン）の寄与により発散する。加速された電子によって生成されたソフト・フォトンを考える。電子と電磁場との相互作用によって光子が生成される過程は，連続して起こる電子の状態変化によって生じる，非常に短い時間の間の single production のくり返しである。生成される光子のエネルギーが小さいときは，光子は電子の状態をほとんど変えることなく，それぞれのソフト・フォトンが生成されるという事象は独立と考えられる。電子が加速されている時間を T とし，それを N 等分する。$\Delta t \stackrel{\text{def}}{=} T/N$ は非常に短く，Δt の間に生成される光子は高々1 個であるとする。このとき，それぞれの Δt の間にソフト・フォトンが生成されるか，されないかはベルヌーイ過程である。Δt の間にソフト・フォトンが生成される確率を p とすると，$T = N\Delta t$ の間にソフト・フォトンが n 個生成される確率 $B_{N,p}(n)$ は

$$B_{N,p}(n) = \frac{N!}{(N-n)!n!}p^n(1-p)^{N-n} \tag{1.44}$$

である。今の場合は $N\to\infty$，$p\to 0$，$Np\to a$ の極限と考えられる。このとき，$B_{N,p}(n)$ は

$$\begin{aligned}
P_a(n) \;&=\; \lim_{N\to\infty, Np\to a} B_{N,p}(n)\\
&=\; \frac{a^n}{n!}e^{-a}
\end{aligned} \tag{1.45}$$

となる。これは Poisson 分布である。a は生成されるソフト・フォトンの個数の期待値である。赤外発散は，a が ∞ になるために起こる。このとき，

$$\lim_{a\to\infty} P_a(n) = 0 \tag{1.46}$$

であり，いかなる有限個のソフト・フォトンを見つける確率も 0 である。有限個の光子を見つける確率が 0 という事実は，観測される電子の状態ベクトルは，裸の電子と光子の Hibert 空間では意味のある展開ができないこと意味している。

2　場の理論の体系

2.1　漸近場表現とダイナミカルマップ

2.1.1　Heisenberg 場の方程式と準粒子場の自由方程式

　ある量子場 $\psi(x)$ が運動方程式

$$\Lambda(\partial)\psi(x) = j[\psi](x) \tag{2.1}$$

を満たしているとする。ハイゼンベルグ場 $\psi(x)$ は，準粒子場（無限遠で観測にかかる場）$\varphi(x)$ で表わすことで，はじめて自然界を記述することが可能になる（§2.1.3 参照）。ここでは，$\varphi(x)$ が準粒子方程式

$$\Lambda(\partial)\varphi(x) = \Lambda(\partial_t, \boldsymbol{\nabla})\varphi(x) = 0 \tag{2.2}$$

を満たしているものとして話を進める。

$$\varphi(x) = \int d^3k \int d\omega\, \tilde{\varphi}(\boldsymbol{k}, \omega) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t} \tag{2.3}$$

と書くと，(2.2) は,

$$\Lambda(-i\omega, i\boldsymbol{k})\tilde{\varphi}(\boldsymbol{k}, \omega) = 0 \tag{2.4}$$

となる。この式が $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{k}, \omega) \neq 0$ の解を持つ条件より

$$\Lambda(-i\omega, i\boldsymbol{k}) = 0 \tag{2.5}$$

を得る。この式の $\omega \geq 0$ の解として，準粒子のエネルギー・スペクトル $\omega(\boldsymbol{k})$ が決まる。

　以下では，簡単のため，$\psi(x)$ を実スカラー場とし，$\varphi(x)$ は実クライン・ゴルドン場として話を進める。この場合は,

$$\Lambda(\partial) \;=\; \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - \kappa^2, \quad \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \tag{2.6}$$

であり,

$$\begin{aligned}\Lambda(-i\omega, i\boldsymbol{k}) \;&=\; -(-i\omega)^2 + (i\boldsymbol{k})^2 - \kappa^2 \\ &=\; \omega^2 - \boldsymbol{k}^2 - \kappa^2\end{aligned} \tag{2.7}$$

となる。これを (2.5) に代入して,

$$\omega = \pm\omega(\boldsymbol{k}), \quad \omega(\boldsymbol{k}) \;=\; \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \kappa^2} \tag{2.8}$$

を得る。

　(2.2) の解である準粒子場は,

$$\varphi(x) \;=\; \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x), \tag{2.9}$$

$$\varphi^{(+)}(x) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\boldsymbol{k})}} a(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega(\boldsymbol{k})t)}, \tag{2.10}$$

$$\varphi^{(-)}(x) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\boldsymbol{k})}} a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega(\boldsymbol{k})t)} \tag{2.11}$$

$$=\; \varphi^{(+)}(x)^\dagger \tag{2.12}$$

で与えられる。ただし，$a(\boldsymbol{k})$，$a^\dagger(\boldsymbol{k})$ は正準交換関係

$$[a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k}')] \,=\, \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{2.13}$$

を満たす（§A.2 参照）。これ以外の交換関係は 0 である。$a(\boldsymbol{k})$ は消滅演算子，$a^\dagger(\boldsymbol{k})$ は生成演算子と呼ばれる。真空 $|0\rangle$ は

$$a(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0 \tag{2.14}$$

を満たす。

$a^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle$ という状態は $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}/(2\pi)^{3/2}$ という波動関数を持った粒子が 1 つ存在する状態であり，そのノルムは発散する：

$$\begin{aligned}\|a^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle\|^2 \,&=\, \langle 0|a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle \\ &=\, \langle 0|[a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})]|0\rangle \\ &=\, \delta^3(\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}) = \infty.\end{aligned} \tag{2.15}$$

これは交換関係 (2.13) が δ 関数を含んでいるために起こる。この交換関係は，2 乗可積分関数によってならさないと意味を持たない。つまり，$a(\boldsymbol{k})$ 上の Fock 空間 $\mathcal{H}[a]$ に作用するのは，$a(\boldsymbol{k})$ ではなく，

$$a_f \,=\, \int d^3k\, f(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \tag{2.16}$$

である。ただし，$f(\boldsymbol{k})$ は 2 乗可積分な c 数関数

$$\int d^3k\, |f(\boldsymbol{k})|^2 < \infty \tag{2.17}$$

である。

$\{f_i(\boldsymbol{k})\}_{i=1}^\infty$ を，ある 2 乗可積分の規格直交完全系とする：

$$\langle f_i, f_j\rangle \,=\, \delta_{ij}\,, \quad \langle A, B\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3k\, A^*(\boldsymbol{k})B(\boldsymbol{k}). \tag{2.18}$$

このとき，任意の 2 乗可積分関数 $f(\boldsymbol{k})$ は $\{f_i(\boldsymbol{k})\}_{i=1}^\infty$ によって

$$f(\boldsymbol{k}) \,=\, \sum_i c_i f_i(\boldsymbol{k})\,, \quad c_i = \langle f_i, f\rangle \tag{2.19}$$

と展開される。場の量子論で扱う自由度は，可算無限個なのである。(2.16) は，

$$\begin{aligned}a_f \,&=\, \int d^3k\, \sum_i c_i f_i(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \\ &=\, \sum_i c_i a_i\end{aligned} \tag{2.20}$$

と書ける。ただし，

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3k\, f_i(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \tag{2.21}$$

は，波動関数

$$\psi_i(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\, f_i(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{2.22}$$

の粒子を生成する演算子である。a_i，$a_i^\dagger$ は，交換関係

$$
\begin{aligned}
[a_i, a_j^\dagger] &= \int d^3k d^3k' \, [a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k}')] f_i(\boldsymbol{k}) f_j^*(\boldsymbol{k}') \\
&= \int d^3k d^3k' \, \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') f_i(\boldsymbol{k}) f_j^*(\boldsymbol{k}') \\
&= \int d^3k \, f_i(\boldsymbol{k}) f_j^*(\boldsymbol{k}) \\
&= \langle f_j, f_i \rangle \\
&= \delta_{ji} = \delta_{ij}
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

を満たす。

$\{a_i\}_{i=1}^\infty$ の個数状態

$$
|n_1, n_2, \cdots\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Big[\prod_{i=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n_i!}} (a_i^\dagger)^{n_i}\Big] |0\rangle \tag{2.24}
$$

を考える。ただし，$|0\rangle$ は (2.14) で定義された真空で，(2.21) より $|0\rangle$ は

$$
a_i|0\rangle = 0 \tag{2.25}
$$

を満たす。ここで，個数状態の集合 $\{|n_1, n_2, \cdots\rangle\}$ のフェルミオン部分集合

$$
\{|n_1, n_2, \cdots\rangle \mid n_i = 0, 1\} \tag{2.26}
$$

を考える。この元は，

$$
|n_1, n_2, \cdots\rangle \quad \longleftrightarrow \quad 0.n_1 n_2 \cdots \ (2\text{ 進数}) \tag{2.27}
$$

のように 2 進数 $0.n_1n_2\cdots$ と 1 対 1 に対応する。よって，フェルミオン部分集合の濃度は，0 から 1 の間の実数全体の濃度に等しい。よって，フェルミオン部分集合は連続集合である（非可算無限個の状態を含む)。個数状態の全体 $\{|n_1, n_2, \cdots\rangle\}$ は，その部分集合が連続集合なので，連続集合である。

2.1.2 波束の導入と Fock 空間の連続集合

量子論では基底ベクトル $\{|i\rangle\}$ の重ね合わせの状態

$$
|\rangle = \sum_i c_i |i\rangle \tag{2.28}
$$

は，状態 $|i\rangle$ が確率 $|c_i|^2$ で観測される状態と解釈される。この確率解釈が可能なためには，あらゆる物理的状態空間は可算個の基底ベクトルで張られなくてはならない (分離可能性)。これは，個数状態の全体が，物理的状態空間の基底としては大きすぎることを意味している。そこで，0 集合と呼ばれる

$$
\{|n_1, n_2, \cdots\rangle \mid \sum_i n_i < \infty\} \tag{2.29}
$$

を考える。これは可算集合であり，真空 $|0\rangle$ を含んでいる。現実には有限個の粒子状態に興味があるので，0 集合上に構成された状態空間を考えればよい。この状態空間は Fock 空間と呼ばれる。

0 集合の選び方の自由度は，非可算無限個存在する。なぜなら，消滅演算子と真空の選び方が無数に存在するからである。真空の選択に非可算無限の自由度があるのは，個数状態の全体は連続集合なのに対して，Fock 空間の基底ベクトルは可算個であることに由来する。連続集合から可算部分集合を抽出する自由度は，非可算無限個ある。

2.1.3 準粒子とダイナミカルマップ

多数の異なる相の出現は，ハイゼンベルグ場の運動を，異なる Fock 空間で記述することに対応する。例えば，あるハミルトニアンで記述される同じ金属が，常伝導相と超伝導相を持つとする。金属の中での電子の運動は上向き, 下向きスピンを待つ電子の消滅演算子によって記述されるが，常伝導相でのそれ $a_{\uparrow}(\boldsymbol{k})$，$a_{\downarrow}(\boldsymbol{k})$ と超伝導相でのそれ $\alpha_{\uparrow}(\boldsymbol{k})$，$\alpha_{\downarrow}(\boldsymbol{k})$ とは異なる。常伝導状態は，$a_{\uparrow}(\boldsymbol{k})$，$a_{\downarrow}(\boldsymbol{k})$ で定義される真空 $|0\rangle$ の上に作られた Fock 空間で記述される。一方，超伝導状態は，$\alpha_{\uparrow}(\boldsymbol{k})$，$\alpha_{\downarrow}(\boldsymbol{k})$ で定義される真空 $|0\rangle\rangle$ の上に作られる Fock 空間で記述される。超伝導相の真空 $|0\rangle\rangle$ は，常伝導相の真空 $|0\rangle$ に Cooper 対が凝縮したものとして解釈される（(1.40) の $a(\boldsymbol{k})$，$b(\boldsymbol{k})$ を，フェルミオンの $a_{\uparrow}(\boldsymbol{k})$，$a_{\downarrow}(\boldsymbol{k})$ に置き換えた式から，この解釈が得られる）。

各 Fock 空間は，それぞれの真空への粒子凝縮の形によって区別され，異なる 0 集合を抽出している。Fock 空間が $a(\boldsymbol{k})$ に対する 0 集合上に作られているとき，$a^{\dagger}(\boldsymbol{k})$ により生成される粒子を準粒子と言う。ハイゼンベルグ場の漸近場（無限遠で観測にかかる場。§2.2.2 参照）は準粒子として選ぶことができる。しかし，漸近場が存在しない場合にも準粒子の概念は有用である。

いかなる演算子も，ある準粒子の真空の上の Fock 空間への作用として定義される。そこで，ハイゼンベルグ場 $\psi(x)$ は，準粒子場 $\varphi(x)$ または，準粒子の生成・消滅演算子 $a(\boldsymbol{k}), a^{\dagger}(\boldsymbol{k})$ によって，

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi[x|\varphi] && (2.30) \\ &= \psi[x|a(\boldsymbol{k}), a^{\dagger}(\boldsymbol{k})] && (2.31) \end{aligned}$$

のように表わされる。ここで，$\psi[x|\bullet]$ は $\psi(x)$ を準粒子場 $\bullet$ で展開した表式を表わし，$\bullet$ が異なれば関数形も異なる。このように，ハイゼンベルグ場を準粒子場で表わしたものをダイナミカルマップと言う。

さてここで，真空 $|0\rangle$ は対称相にあるとする。ここで，対称相にあるとは，

$$\langle 0|\psi(x)|0\rangle = 0 \tag{2.32}$$

を満たすことである。このとき，$\psi(x)$ は φ の奇数べきで，

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi[x|\varphi] && (2.33) \\ &= \int d^4x_1\, c_1(x;x_1)\varphi(x_1) \\ &\quad + \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3\, c_3(x;x_1,x_2,x_3)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3) + \cdots && (2.34) \\ &\equiv F[x:\varphi] && (2.35) \end{aligned}$$

とダイナミカルマップされる。$F[x:\varphi]$ は $\psi(x)$ を φ で展開したときの関数形を表わす。

簡単のため，

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \varphi(x)+\lambda\varphi^3(x) \qquad (2.36)\\
&= \varphi^{(+)}+\varphi^{(-)}+\lambda\Big[\varphi^{(+)}+\varphi^{(-)}\Big]^3\\
&= \varphi^{(+)}+\varphi^{(-)}+\lambda\Big[\varphi^{(+)3}+\varphi^{(+)}\varphi^{(-)}\varphi^{(+)}+\varphi^{(-)}\varphi^{(+)2}+\varphi^{(-)2}\varphi^{(+)}\\
&\quad +\varphi^{(+)2}\varphi^{(-)}+\varphi^{(+)}\varphi^{(-)2}+\varphi^{(-)}\varphi^{(+)}\varphi^{(-)}+\varphi^{(-)3}\Big]\\
&= \varphi^{(+)}+\varphi^{(-)}+\lambda\Big[\varphi^{(+)3}+\Big([\varphi^{(+)},\varphi^{(-)}]+\varphi^{(-)}\varphi^{(+)}\Big)\varphi^{(+)}+\varphi^{(-)}\varphi^{(+)2}+\varphi^{(-)2}\varphi^{(+)}\\
&\quad +\Big([\varphi^{(+)2},\varphi^{(-)}]+\varphi^{(-)}\varphi^{(+)2}\Big)+\Big([\varphi^{(+)},\varphi^{(-)2}]+\varphi^{(-)2}\varphi^{(+)}\Big)\\
&\quad +\varphi^{(-)}\Big([\varphi^{(+)},\varphi^{(-)}]+\varphi^{(-)}\varphi^{(+)}\Big)+\varphi^{(-)3}\Big]\\
&= \varphi^{(+)}+\varphi^{(-)}+\lambda\Big[\varphi^{(+)3}+3\varphi^{(-)}\varphi^{(+)2}+3\varphi^{(-)2}\varphi^{(+)}\varphi^{(-)3}\Big]+\lambda\Big[[\varphi^{(+)},\varphi^{(-)}]\varphi^{(+)}\\
&\quad +2[\varphi^{(+)},\varphi^{(-)}]\varphi^{(+)}+2\varphi^{(-)}[\varphi^{(+)},\varphi^{(-)}]+\varphi^{(-)}[\varphi^{(+)},\varphi^{(-)}]\Big]\\
&= {:}\psi[x|\varphi]{:}+3\lambda[\varphi^{(+)},\varphi^{(-)}]\varphi \qquad (2.37)\end{aligned}$$

を例に考える。ここで，$:\psi[x|\bullet]:$ は，$\psi(x)$ の準粒子 $\bullet$ についての N 積を表わす。さらに，$F[x:\varphi^{(-)},\varphi^{(+)}]$ を，$:\psi[x|\varphi]:$ を $\varphi^{(-)},\varphi^{(+)}$ で表わしたときの関数形を表わすものとして導入する。上の例では，

$$F[x:\varphi^{(-)},\varphi^{(+)}] = \varphi^{(-)}+\varphi^{(+)}+\lambda\Big[\varphi^{(+)3}+3\varphi^{(-)}\varphi^{(+)2}+3\varphi^{(-)2}\varphi^{(+)}+\varphi^{(-)3}\Big] \qquad (2.38)$$

である。(2.37) の真空期待値をとって，

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi(x)|0\rangle &= 3\lambda[\varphi^{(+)},\varphi^{(-)}]\langle 0|\varphi|0\rangle\\
&= 0 \qquad (2.39)\end{aligned}$$

を得る。一般に，ある項に含まれる $\varphi^{(+)}$ と $\varphi^{(-)}$ の数が異なるとき，その真空期待値は 0 となる。

(2.37) において，$\big[\varphi^{(+)},\varphi^{(-)}\big]$ は，

$$\begin{aligned}&\hbar D(x-x') \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\varphi^{(+)}(x),\varphi^{(-)}(x')]\\
&= \frac{\hbar}{(2\pi)^3}\int d^3kd^3k'\,\frac{1}{2\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{k}')}}\Big[a(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k})t)},a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{-i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'-\omega(\boldsymbol{k}')t')}\Big]\\
&= \frac{\hbar}{(2\pi)^3}\int d^3kd^3k'\,\frac{e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'-\omega(\boldsymbol{k})t+\omega(\boldsymbol{k}')t')}}{2\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{k}')}}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\\
&= \frac{\hbar}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-i\omega(\boldsymbol{k})(t-t')}}{2\omega(\boldsymbol{k})} \qquad (2.40)\end{aligned}$$

の $x'\to x$ の極限である。$\omega(\boldsymbol{k})=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\kappa^2}$ を代入すると，$x^2=0$ 付近で，

$$\begin{aligned}D(x) &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{x^2}+\frac{\kappa^2}{8\pi^2}\ln(\frac{\kappa\sqrt{|x^2|}}{2})+\frac{\kappa^2(2\gamma-1)}{16\pi^2}+i\varepsilon(t)\theta(-x^2)\frac{\kappa^2}{16\pi}\\
&\quad +O(x^2\ln(\kappa\sqrt{|x^2|}) \qquad (2.41)\end{aligned}$$

となる（§D.1 参照）。ただし，

$$\theta(z) = \begin{cases}1 & \text{for } z>0\\ 0 & \text{for } z<0\end{cases}$$

であり，$\gamma = 0.57721\cdots$ はオイラー定数である。

同一時空点での演算子の積は，本来定義されないため，時空点を微小量 ε^μ だけずらすと，(2.37) は，

$$\begin{aligned}\psi(x) &= :\psi[x|\varphi]: + 3\lambda\hbar D(\varepsilon)\varphi \\ &= \big[1 + 3\lambda\hbar D(\varepsilon)\big]:\varphi(x): + \lambda :\varphi^3(x):\end{aligned} \tag{2.42}$$

となる[3)]。$D(\varepsilon)$ のような，生成・消滅演算子の並べ替えによって現れる c 数を縮約と言う。縮約は量子効果の高次補正（ループ補正）に対応する。高次補正を無視する近似を tree 近似と言う。以下では，高次補正は本質的でないので無視する。このとき，一般に

$$\psi(x) \overset{\text{tree}}{=} :\psi[x|\varphi]: \equiv F[x : \varphi^{(-)}, \varphi^{(+)}] \tag{2.43}$$

となる。ここで，$\overset{\text{tree}}{=}$ は tree 近似を表わす。

2.2 大域的演算子と準粒子描像

2.2.1 時間に依存しない大域的演算子

$g(\boldsymbol{x})$ を座標 x_i（$i = 1, 2, 3$）に依存するが，陽には依存しない演算子とする（このような演算子を局所演算子と言う）。ここで，陽に依存するとは，$g(\boldsymbol{x}) = x_i h(\boldsymbol{x})$ のように座標 x_i を陽に含むことを意味する。局所演算子 $g(\boldsymbol{x})$ を用いて

$$G = \int d^3x\, g(\boldsymbol{x}) \tag{2.44}$$

の形で表わされる演算子 G を（時間に依存しない）大域的演算子と言う。特に，G が何らかの変換の生成子であるとき，

$$G = G^\dagger, \quad g(\boldsymbol{x}) = g^\dagger(\boldsymbol{x}) \tag{2.45}$$

である。

$\rho(\boldsymbol{x})$ は一般にハイゼンベルグ場の多項式であるから，ハイゼンベルグ場にダイナミカルマップ (2.31) を代入すると，G は生成・消滅演算子のべき級数で表わされる。まず，4 次の項

$$Q \equiv \int d^3k \int d^3l \int d^3p\, c(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{p}) a_i^\dagger(\boldsymbol{k}) a_j^\dagger(\boldsymbol{l}) a_k(\boldsymbol{p}) a_l(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{l} - \boldsymbol{p}) \tag{2.46}$$

を考えよう。ただし，n 種類の準粒子 $\{a_i\}_{i=1}^n$ が存在するとした。$i, j, k, l = 1, 2, \cdots, n$ は準粒子を区別する記号である。消滅演算子 $a_i(\boldsymbol{k})$ と生成演算子 $a_i^\dagger(\boldsymbol{k})$ は，正準交換関係

$$[a_i(\boldsymbol{k}), a_j(\boldsymbol{k}')] = \delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \tag{2.47}$$

[3)] 今，

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{n=1,3,5,\cdots} a_n \varphi^n \\ &= \sum_{m=1,3,5,\cdots} b_m :\varphi^m:\end{aligned}$$

と書くと，一般に a_n と b_n とは異なる。$b_n :\varphi^n:$ には $a_m\varphi^m$（$m > n$）の項の効果が繰り込まれている。つまり，正規積で表わすことは繰り込みと関係している。

を満たし，これ以外の交換関係は 0 であるとする。また，(2.46) では運動量が (2.44) の空間積分で保存されることを考慮した。Q の行列要素 $\langle a|Q|b\rangle$（$|a\rangle, |b\rangle$ は準粒子の波束）を考えると，この積分の範囲は，エネルギー保存則

$$\omega_i(\boldsymbol{k}) + \omega_j(\boldsymbol{l}) = \omega_k(\boldsymbol{p}) + \omega_l(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{l} - \boldsymbol{p}) \tag{2.48}$$

の制限により 1 自由度分制限される。よって，系のサイズを L とするとき，

$$\langle a|Q|b\rangle = O\Big(\frac{1}{L}\Big) \tag{2.49}$$

となる。これは $L \to \infty$ の極限で消滅する。よって，

$$Q \overset{\mathrm{w}}{=} 0 \tag{2.50}$$

である。ただし，弱い等号 $\overset{\mathrm{w}}{=}$ は，展開に用いた準粒子の Fock 空間の元 $|a\rangle$，$|b\rangle$ の間の行列要素が等しいことを意味する：

$$A \overset{\mathrm{w}}{=} B \Leftrightarrow \langle a|A|b\rangle = \langle a|B|b\rangle. \tag{2.51}$$

同様に，高次の N 積もエネルギー保存則の制限のために（弱い等号として）0 となる。

次に 2 次の項を考える。考えられる N 積は，

$$a_i(\boldsymbol{k})a_j(\boldsymbol{l}), \quad a_i^\dagger(\boldsymbol{k})a_j^\dagger(\boldsymbol{l}), \quad a_i^\dagger(\boldsymbol{k})a_j(\boldsymbol{l}) \tag{2.52}$$

であるが，エネルギー保存を満たすことができるのは，

$$a_i^\dagger(\boldsymbol{k})a_j(\boldsymbol{l}) \tag{2.53}$$

のうちの一部である。ところで，運動量保存則を課すと，

$$a_i^\dagger(\boldsymbol{k})a_j(\boldsymbol{k}) \tag{2.54}$$

だけが生き残る。これは，$i = j$ ならエネルギー保存も満足する（先の Q の例では，エネルギー保存則は運動量保存則とは別に要請する必要があった）。$i \neq j$ では $\omega_i(\boldsymbol{k}) = \omega_j(\boldsymbol{k})$ の項のみが生き残る。

今，

$$\omega_\chi(\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}) = 0 \tag{2.55}$$

なる粒子が存在したとしよう。このような粒子を，エネルギーに跳びのない粒子と言う。このときは，

$$\chi(\boldsymbol{k})\delta^3(\boldsymbol{k}), \quad \chi^\dagger(\boldsymbol{k})\delta^3(\boldsymbol{k}) \tag{2.56}$$

という項が生き残る。ただし，生成演算子 $\chi^\dagger(\boldsymbol{k})$ と消滅演算子 $\chi(\boldsymbol{k})$ とは，正準交換関係

$$[\chi(\boldsymbol{k}), \chi^\dagger(\boldsymbol{k}')] = \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \tag{2.57}$$

を満たす。これ以外の交換関係は 0 である。

以上をまとめると，時間に依存しない大域的演算子 G のダイナミカルマップは，

$$G \overset{\mathrm{w}}{=} \int d^3k \Big[\sum_{\omega_i(\boldsymbol{k})=\omega_j(\boldsymbol{k})} c_{ij}(\boldsymbol{k})a_i^\dagger(\boldsymbol{k})a_j(\boldsymbol{k}) + \{b^*\chi(\boldsymbol{k}) + b\chi^\dagger(\boldsymbol{k})\}\delta^3(\boldsymbol{k}) \Big] \tag{2.58}$$

となる。ただし，$c_{ij}(\boldsymbol{k})$，b は c 数であり，エルミート性 (2.45) より，

$$c_{ij}^*(\boldsymbol{k}) = c_{ji}(\boldsymbol{k}) \tag{2.59}$$

である。和は，$i = j$ の対角項と，$\omega_i(\boldsymbol{k}) = \omega_j(\boldsymbol{k})$（$i \neq j$）なる項について取る。(2.58) の右辺には c 数定数 C が加わる余地が，以下ではこれは G に繰り込まれていて（G が $G - C$ で再定義されていて），(2.58) の右辺に定数項はないものとする。

真空 $|0\rangle$ は

$$a_i(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0\,, \quad \chi(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0 \tag{2.60}$$

を満たす。もしも，エネルギーに跳びがない粒子が存在しないならば，$\chi^\dagger(\boldsymbol{k})$ の項はないのだから，$G|0\rangle = 0$ である。逆に，$G|0\rangle = 0$ なら $\chi^\dagger(\boldsymbol{k})$ の項はないことになる。なぜなら，

$$\begin{aligned} \|\chi^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle\|^2 &= \langle 0|\chi(\boldsymbol{k})\chi^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle \\ &= \langle 0|[\chi(\boldsymbol{k}), \chi^\dagger(\boldsymbol{k})]|0\rangle \\ &= \delta^3(\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}) \neq 0 \end{aligned} \tag{2.61}$$

であり，$\chi^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle \neq 0$ だからである。ただし，第 2 項で正準交換関係 (2.57) を用いた。よって，

$$G|0\rangle = 0 \Leftrightarrow \text{エネルギーに跳びのない粒子が存在しない} \tag{2.62}$$

である。

2.2.2 安定真空と準粒子描像

時間に陽に依存しないハミルトニアンは，時間に依存しない大域的演算子である。すなわち，ハミルトニアン $\mathcal{H}(\boldsymbol{x})$ 密度を用いて

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H}(\boldsymbol{x}) \tag{2.63}$$

と書ける。真空 $|0\rangle$ は一般に，時間推進不変性

$$H|0\rangle = 0 \tag{2.64}$$

を満たす。よって，(2.62)，(2.58) より

$$H \overset{\mathrm{w}}{=} \sum_i \int d^3k\, \omega_i(\boldsymbol{k}) a_i^\dagger(\boldsymbol{k}) a_i(\boldsymbol{k}) \tag{2.65}$$

である。ただし，エルミート行列 (2.59) を対角化した。この表式は，$\omega_i(\boldsymbol{k})$ が繰り込まれていれば，粒子の反跳がエネルギーには寄与しないことを表わしている。

粒子の反跳とは，入射自由粒子（初期状態）と射出自由粒子（終状態）との間の遷移である。入射自由粒子と射出自由粒子（あわせて漸近粒子と言う）は，無限遠で観測にかかる粒子である。漸近粒子は Fock 空間を構成する自由粒子，すなわち準粒子である。

漸近場 $\varphi(x)$ が実クライン・ゴルドン場の場合，§2.1.1 で示したように，

$$\varphi(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\boldsymbol{k})}} a(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega(\boldsymbol{k})t)} + \mathrm{h.c.} \tag{2.66}$$

である。今，準粒子エネルギーが $\omega(\boldsymbol{k})$ で与えられた粒子の波束

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \, \tilde{f}(\boldsymbol{k}) e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega(\boldsymbol{k})t)} \tag{2.67}$$

を導入すると，§A.5 に示すように

$$\int d^3x \, [f(x)\partial_t\varphi(x) - \partial_t f(x)\varphi(x)] = -i \int d^3k \, \sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}\tilde{f}(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \tag{2.68}$$

となる。ハイゼンベルグ場 $\psi(x)$ は,

$$\psi(x) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\boldsymbol{k})}} Z^{1/2} a(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega(\boldsymbol{k})t)} + \text{h.c.} + \sum_{n=2}^{\infty} \psi_n(x) \tag{2.69}$$

と表わされるはずである。ここで，$0 \leq Z < 1$ は繰り込み因子であり，$\psi_n(x)$ は準粒子の n 次の N 積である。よって,

$$F_{ab}(t) \overset{\text{def}}{=} \langle a| \int d^3x \, [f(x)\partial_t\psi(x) - \partial_t f(x)\psi(x)] |b\rangle \tag{2.70}$$

とすると,

$$\lim_{t\to\pm\infty} F_{ab}(t) = -iZ^{1/2} \langle a| \int d^3k \, \sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}\tilde{f}(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) |b\rangle \tag{2.71}$$

となる（ただし，$|a\rangle, |b\rangle$ は準粒子 $a(\boldsymbol{k})$ により張られる Fock 空間のベクトルである）。なぜなら，リーマン・ルベーグの定理より，振動数 $\omega(\boldsymbol{k})$ の部分だけが取り出されるからである。この極限は特定の Fock 空間の行列要素におけるものなので，弱い極限である。

$t \to -\infty$ の極限は入射自由粒子場を与え，$t \to \infty$ の極限は射出自由粒子場を与える。射出自由粒子状態は，入射自由粒子場の Fock 空間に属しているべきなので，準粒子場としては入射場，射出場のいずれかを選ぶことができる。

入射粒子の選び方は多数あり得る。例えば，超伝導相にある系は，それに相当する入射電子が選択され，常伝導相にある系では別の入射粒子が選択されるべきである。これが可能なのは，(2.71) の時間極限が弱い関係のもとでの極限だったからである。$t \to \pm\infty$ の極限を取る前に，入射粒子が Fock 空間とどのように関係しているかを知らなくてはならない。つまり，Fock 空間を構成するときに用いる $a(\boldsymbol{k})$ を準備する際，上の極限操作で同一の $a(\boldsymbol{k})$ が得られるようにする必要がある。これは，self-consistent な手続きである。この手続きにより，非可算無限個の非同値 Fock 空間のうち，特定の Fock 空間が self-consistent に選び出されるのである。

繰り込みは，この self-consistent な手続きの一部である。例えば，準粒子のエネルギー $\omega(\boldsymbol{k})$ は self-consistent に準備されなくてはならない。self-consistent な 繰り込みにより，準粒子のエネルギーを決定する方程式は，相によって異なる。また，Fock 空間を self-consistent に選び出すのに繰り込みが必要なので，紫外発散のない物性物理学でも繰り込みが行われる。

2.3 ボソン変換と非同値真空

2.3.1 ボソン変換

今,

$$\Lambda(\partial)f(x) = 0 \tag{2.72}$$

を満たす c 数関数 $f(x)$ を考える。$f(x)$ はフーリエ変換可能でなくても良い。$\varphi_f(x)$ を

$$\varphi_f(x) \stackrel{\rm def}{=} \varphi(x) - f(x) \tag{2.73}$$

によって導入する。(2.2)，(2.72) より，φ_f は準粒子方程式

$$\Lambda(\partial)\varphi_f(x) = 0 \tag{2.74}$$

を満たす。$\varphi(x)$ が実クライン・ゴルドン場の場合，$\varphi_f(x)$ は (2.9)-(2.12) と同様に，

$$\begin{aligned}
\varphi_f(x) &= \varphi_f^{(+)}(x) + \varphi_f^{(-)}(x), && (2.75)\\
\varphi_f^{(+)}(x) &\stackrel{\rm def}{=} \varphi^{(+)} - f^{(+)}(x) && (2.76)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\sqrt{\frac{1}{2\omega(\boldsymbol{k})}}a_f(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k})t)}, && (2.77)\\
\varphi_f^{(-)}(x) &\stackrel{\rm def}{=} \varphi^{(-)} - f^{(-)}(x) && (2.78)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\sqrt{\frac{1}{2\omega(\boldsymbol{k})}}a_f^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k})t)} && (2.79)\\
&= \varphi_f^{(+)}(x)^\dagger && (2.80)
\end{aligned}$$

と書ける。ただし，

$$f(x) = f^{(+)}(x) + f^{(-)}(x), \quad f^{(+)}(x) = f^{(-)}(x)^* \tag{2.81}$$

である。(2.77)，(2.79) を逆に解くと，

$$\begin{aligned}
a_f(\boldsymbol{k}) &= a(\boldsymbol{k}) - \frac{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3x\, f^{(+)}(\boldsymbol{x},0)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, && (2.82)\\
a_f^\dagger(\boldsymbol{k}) &= a^\dagger(\boldsymbol{k}) - \frac{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3x\, f^{(-)}(\boldsymbol{x},0)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} && (2.83)
\end{aligned}$$

である。よって，$a_f(\boldsymbol{k})$ と $a_f^\dagger(\boldsymbol{k})$ との交換関係は，

$$\begin{aligned}
[a_f(\boldsymbol{k}), a_f^\dagger(\boldsymbol{k}')] &= [a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})]\\
&= \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') && (2.84)
\end{aligned}$$

である。ただし，第 2 等号で正準交換関係 (2.13) を用いた。これ以外の交換関係は 0 である。

変換 (2.82)，(2.83) のユニタリー演算子を $U[f]$ とする：

$$a_f(\boldsymbol{k}) = U[f]a(\boldsymbol{k})U^\dagger[f], \quad a_f^\dagger(\boldsymbol{k}) = U[f]a^\dagger(\boldsymbol{k})U^\dagger[f]. \tag{2.85}$$

これより得られる

$$a(\boldsymbol{k}) = U^\dagger[f]a_f(\boldsymbol{k})U[f] \tag{2.86}$$

を真空 $|0\rangle$ の定義 (2.14) に代入して

$$a_f(\boldsymbol{k})U[f]|0\rangle = 0 \tag{2.87}$$

を得る。$|0(f)\rangle$ を

$$|0(f)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} U[f]|0\rangle \tag{2.88}$$

で導入すると，(2.87) は

$$a_f(\boldsymbol{k})|0(f)\rangle = 0 \tag{2.89}$$

となる。$|0(f)\rangle$ 上の Fock 空間を $\mathcal{H}[a_f]$ とする。

今，$f^{(+)}(x)$ が

$$f^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\,\frac{1}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}}f(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k})t)} \tag{2.90}$$

と書ける場合を考える。このとき，(2.82) は

$$a_f(\boldsymbol{k}) = a(\boldsymbol{k}) - f(\boldsymbol{k}) \tag{2.91}$$

なり，$U[f]$ は

$$U[f] \,=\, \exp\Big(\int d^3k\,\big[f(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) - f^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}))\big]\Big) \tag{2.92}$$

となる。公式 (A.169) を用いて (2.88) を計算すると，

$$\begin{aligned}|0(f)\rangle \,&=\, \exp\Big(-\frac{1}{2}\int d^3k\,|f(\boldsymbol{k})|^2\Big)\exp\Big(\int d^3k\,f(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})\Big)\exp\Big(-\int d^3k\,f^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})\Big)|0\rangle\\ &=\, \exp\Big(-\frac{1}{2}\int d^3k\,|f(\boldsymbol{k})|^2\Big)\exp\Big(\int d^3k\,f(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})\Big)|0\rangle\end{aligned} \tag{2.93}$$

となる（§A.6 参照）。最後の表式は，$|0(f)\rangle$ を $\mathcal{H}[a]$ の元で展開したものである。これより，

$$\int d^3k\,|f(\boldsymbol{k})|^2 < \infty \tag{2.94}$$

ならば，$|0(f)\rangle$ は $\mathcal{H}[a]$ の元であり，$|0\rangle$ と異なる新たな真空ではないことが分かる。このとき，$\mathcal{H}[a_f]$ と $\mathcal{H}[a]$ とは同値である。しかし，

$$\int d^3k\,|f(\boldsymbol{k})|^2 = \infty \tag{2.95}$$

ならば，(2.93) は $|0(f)\rangle$ が $\mathcal{H}[a]$ のベクトルではないことを意味する。このとき，$|0(f)\rangle$ は $|0\rangle$ と異なる新たな真空であり，$\mathcal{H}[a_f]$ は $\mathcal{H}[a]$ と非同値である。また，$|0(f)\rangle$ の中に有限個の a-粒子を見つける確率は 0 である。これは，§1.2.2 の場合と同じである（§A.7 参照）。

$\mathcal{H}[a_f]$ が $\mathcal{H}[a]$ と非同値であるとき，$\mathcal{H}[a_f]$ は $\mathcal{H}[a]$ とは別の相を記述する。そのため，(2.73) の場の変換 $\varphi(x) \to \varphi_f(x)$ は相転移に対応する。なお，$f(x)$ をボソン変換関数，変換 $\varphi(x) \to \varphi_f(x)$ をボソン変換と言う。

2.3.2 異常演算子と自発的対称性の破れ

ハイゼンベルグ場 $\psi(x)$ に対するラグランジアンが，連続変換

$$\psi(x) \to \psi_\theta(x) = e^{i\theta N}\psi(x)e^{-i\theta N} \tag{2.96}$$

に対して不変であるとする。N は，この変換の生成子である。このとき，一般にハミルトニアンもこの変換に対して不変である。すなわち，

$$e^{i\theta N} H e^{-i\theta N} = H \tag{2.97}$$

である。これより，

$$[N, H] = 0 \tag{2.98}$$

を得る。従って，N は時間によらない。ところで，N は一般に

$$N = \int d^3x \, \rho(x) \tag{2.99}$$

の形で書ける。よって，$\rho(x)$ が場とその導関数で与えられる局所演算子のとき，N は時間によらない大域的演算子

$$N \overset{\mathrm{w}}{=} \int d^3k \left[c(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) + \{ b^* \chi(\boldsymbol{k}) + b \chi^\dagger(\boldsymbol{k}) \} \delta^3(\boldsymbol{k}) \right] \tag{2.100}$$

となる（§2.2.1 参照）。ただし，a-粒子は 1 種類であるとした。$a(\boldsymbol{k})$，$\chi(\boldsymbol{k})$ は正準交換関係 (2.47)，(2.57) を満たす。

(2.96) に対応して，真空 $|0\rangle$ は，

$$|0\rangle \to |0(\theta)\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} e^{i\theta N} |0\rangle \tag{2.101}$$

と変換される。

$$N|0\rangle = 0 \tag{2.102}$$

の場合は

$$|0(\theta)\rangle = |0\rangle \tag{2.103}$$

である。これは，$|0\rangle$ 上の Fock 空間では，N 対称性（不変性）が保たれていることを意味する。(2.62) よりこの場合，エネルギーに跳びのない粒子（χ-粒子）は存在しない。

今，ある種の粒子の有限密度の凝縮が，N 不変でない真空 $|0\rangle$ を形成したとする：

$$N|0\rangle \neq 0. \tag{2.104}$$

このとき，

$$|0(\theta)\rangle \neq |0\rangle \tag{2.105}$$

である。これは，$|0\rangle$ 上の Fock 空間では，N 対称性が自発的に破れていることを意味する。(2.62) より，(2.104) のとき，エネルギーに跳びのない粒子が存在しなくてはならない。これより，南部-Goldstone 定理

自発的に対称性が破れた状態には，
エネルギーに跳びのないある種の粒子が付随する

が得られる。この定理は，物性物理学の多くの実例（結晶中のフォノン，強磁性体中のマグノンなど）により示されている。自発的対称性に破れに伴う，エネルギーに跳びのない粒子を NG 粒子（南部-Goldstone 粒子）と言う[4)]。

ハイゼンベルグ場

$$\psi(x) \overset{\mathrm{w}}{=} \psi[x : \chi, \partial\chi, \varphi, \cdots] \tag{2.106}$$

に変換 (2.96) を行う。ここで，$\partial\chi$ は χ の導関数 $\partial_\mu\chi$ を表わし，φ は (2.100) の $a(\boldsymbol{k})$ に対する準粒子場を表わす。(2.96) により，$\chi(x)$ は，

$$\begin{aligned} \chi_\theta(x) &\equiv e^{i\theta N}\chi(x)e^{-i\theta N} \\ &= e^{i\theta G}\chi(x)e^{-i\theta G} \end{aligned} \tag{2.107}$$

に変換される。ただし，NG 粒子 $\chi(\boldsymbol{k})$ と準粒子 $a(\boldsymbol{k})$ は可換であることを用いた。G は (2.100) の第 2 項

$$G \overset{\mathrm{def}}{=} \int d^3k \left(b^*\chi(\boldsymbol{k}) + b\chi^\dagger(\boldsymbol{k})\right)\delta^3(\boldsymbol{k}) \tag{2.108}$$

である。$\chi_\theta(\boldsymbol{k})$ を

$$\chi_\theta(\boldsymbol{k}) \overset{\mathrm{def}}{=} e^{i\theta G}\chi(\boldsymbol{k})e^{-i\theta G} \tag{2.109}$$

で導入すると，これは，

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\chi_\theta(\boldsymbol{k}) &= e^{i\theta G}iG\chi(\boldsymbol{k})e^{-i\theta G} - e^{i\theta G}\chi(\boldsymbol{k})iGe^{-i\theta G} \\ &= e^{i\theta G}[iG, \chi(\boldsymbol{k})]e^{-i\theta G} \\ &= -e^{i\theta G}\int d^3k'\, i[b^*\chi(\boldsymbol{k}') + b\chi^\dagger(\boldsymbol{k}')\delta^3(\boldsymbol{k}'), \chi(\boldsymbol{k})]e^{-i\theta G} \\ &= -ie^{i\theta G}\int d^3k'\, b\delta^3(\boldsymbol{k}')\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')e^{-i\theta G} \\ &= -ie^{i\theta G}b\delta^3(\boldsymbol{k})e^{-i\theta G} \\ &= -ib\delta^3(\boldsymbol{k}) \end{aligned} \tag{2.110}$$

を満たす。ただし，第 4 等号で，正準交換関係 (2.57) を用いた。これを初期条件

$$\chi_{\theta=0}(\boldsymbol{k}) = \chi(\boldsymbol{k}) \tag{2.111}$$

の下で解くと，

$$\chi_\theta(\boldsymbol{k}) = \chi(\boldsymbol{k}) - i\theta b\delta^3(\boldsymbol{k}) \tag{2.112}$$

を得る。これより，

$$\chi_\theta(x) = \chi(x) - c\theta \tag{2.113}$$

となる（c については §B.1 参照）。これはボソン変換 (2.73) の一種である。

(2.113) より，次の定理が得られる。すなわち，N 変換で不変な演算子のダイナミカルマップは，$\chi(x)$ をその導関数の形でしか含まない。I_N を N 不変な演算子とする。すなわち，

$$[I_N, N] = 0 \tag{2.114}$$

4) NG 粒子は観測にかかるとは限らない。

である。上の定理より，I_N のダイナミカルマップは

$$I_N = I_N[\partial\chi, \varphi, \partial\varphi, \cdots] \tag{2.115}$$

となる。これより，N 不変な演算子の行列要素へのソフト NG 粒子（運動量の小さい NG 粒子）からの寄与は小さいことが分かる[5)]。これは低エネルギー定理と呼ばれている。I_N として，特に S 行列があげられる。よって，ソフト NG 粒子はいかなる相互作用にも寄与しない。

今，真空 $|0\rangle$ が時空並進不変

$$e^{iHt}|0\rangle = |0\rangle, \quad e^{i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}}|0\rangle = |0\rangle \tag{2.116}$$

であると仮定する。局所演算子 $g(x)$ は,

$$g(x) = e^{i(Ht-\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x})}g(0)e^{-i(Ht-\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x})} \tag{2.117}$$

書けるので，(2.99) の N に対して，$N|0\rangle$ のノルムは,

$$\begin{aligned}
\|N|0\rangle\|^2 &= \int d^3x d^3y\, \langle 0|\rho(\boldsymbol{x},t)\rho(\boldsymbol{y},t)|0\rangle \\
&= \int d^3x d^3y\, \langle 0|e^{i(Ht-\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x})}\rho(0)e^{-i(Ht-\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x})}e^{i(Ht-\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{y})}\rho(0)e^{-i(Ht-\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{y})}|0\rangle \\
&= \int d^3x d^3y\, \langle 0|\rho(0)e^{i\boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\rho(0)|0\rangle \\
&\equiv \int d^3x d^3y\, n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= \int d^3x'\, n(\boldsymbol{x}') \int d^3y
\end{aligned} \tag{2.118}$$

となる。ただし,

$$n(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle 0|\rho(0)e^{i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}}\rho(0)|0\rangle \tag{2.119}$$

である。(2.118) より，もし自発的に対称性が破れていて (2.104) ならば，$N|0\rangle$ は規格化できない[6)]。これは，$N|0\rangle$ は $|0\rangle$ 上の Fock 空間には属さないことを意味している。よって，(2.101) の $|0(\theta)\rangle$ が（互いに異なる）真空の連続集合 $\{|0(\theta)\rangle\}$ を形成する。また，(2.98) より $\{|0(\theta)\rangle\}$ のエネルギーは縮退している。(2.113) は縮退した真空 $\{|0(\theta)\rangle\}$ の間の移動に対応する[7)]。

相転移を記述するため，場の秩序パラメーター

$$\phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle 0(\theta)|\psi(x)|0(\theta)\rangle \tag{2.120}$$

を導入する。$\theta = 0$ のときは，$|0(\theta = 0)\rangle = |0\rangle$ であり，$|0\rangle$ は (2.32) すなわち

$$\langle 0|\psi(x)|0\rangle = 0$$

を満たすとしたので

$$\phi(x) = 0 \qquad \text{for} \quad \theta = 0 \tag{2.121}$$

[5)] 行列要素の計算の積分を考えると，NG 粒子からの（被積分関数への）寄与は，その運動量 $\boldsymbol{k}$ に比例する。

[6)] このような演算子を異常演算子と言う。

[7)] 上の議論の唯一の微妙な点は，N が異常演算子なので，ぼかし技巧のような数学的で形式的な処理が必要になる点である。§**??**の ward-高橋の関係式を用いる方法では，この微妙さはない。

となる。$\psi(x)$ は NG 場 $\chi(x)$ と準粒子場 φ によって

$$\psi(x) = F[x : \chi, \varphi] \tag{2.122}$$

とダイナミカルマップされる。ただし，$F[x : \chi, \varphi]$ は ψ を $\chi(x)$，$\varphi(x)$ で表わしたときの関数形を表わす。もし $\chi_\theta(x)$ でダイナミカルマップするときは，(2.113) より，

$$\psi(x) = F[x : \chi_\theta + c\theta, \varphi] \tag{2.123}$$

となる。(2.101)，(2.109) より

$$\chi_\theta(\boldsymbol{k})|0(\theta)\rangle = e^{\theta N}\chi(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0 \tag{2.124}$$

であるから，場の秩序パラメーター (2.120) は

$$\phi(x) \overset{\text{tree}}{=} F[x : c\theta, 0] \tag{2.125}$$

となる。ただし，(2.60) を用いた[8)]。今の場合は，場の秩序パラメーターは位置と時間 $(\boldsymbol{x}, t)$ によらない定数である。

2.3.3 巨視的物体の存在下におけるダイナミカルマップ

ボソン変換 (2.73) が表わす相転移を記述するために，場の秩序パラメーター

$$\begin{aligned} \phi(x) &\overset{\text{def}}{=} \langle 0(f)|\psi(x)|0(f)\rangle & (2.126)\\ &\overset{\text{tree}}{=} \langle 0(f)|F[x : \varphi_f^{(-)} + f^{(-)}, \varphi_f^{(+)} + f^{(+)}]|0(f)\rangle & (2.127) \end{aligned}$$

を導入する。ただし，$F[x : \varphi_f^{(-)} + f^{(-)}, \varphi_f^{(+)} + f^{(+)}]$ は $F[x : \varphi^{(-)}, \varphi^{(+)}]$ [9)]に $\varphi^{(\pm)} = \varphi_f^{(\pm)} + f^{(\pm)}$ を代入したものである。$f(x)$ の時空依存性のために，ϕ は $(\boldsymbol{x}, t)$ の関数となる。なお，$f(x) = 0$ のときは，$|0(f = 0)\rangle = |0\rangle$ であり，$|0\rangle$ は (2.32) を満たすとしたので

$$\phi(x) = 0 \qquad \text{for} \quad f(x) = 0 \tag{2.128}$$

となる。

また，一般に

$$\begin{aligned} \psi(x) &\overset{\text{tree}}{=} F[x : \varphi_f^{(-)} + f^{(-)}, \varphi_f^{(+)} + f^{(+)}]\\ &\overset{\text{tree}}{=} \phi(x) + :\psi[x|\varphi_f]: & (2.129) \end{aligned}$$

---

8) (2.96) により $a(\boldsymbol{k})$ は

$$e^{i\theta N} a(\boldsymbol{k}) e^{-i\theta N} = a(\boldsymbol{k}) e^{-ic(\boldsymbol{k})\theta}$$

と変換される。また，(2.101) より，

$$e^{i\theta N} a(\boldsymbol{k}) e^{-i\theta N}|0(\theta)\rangle = e^{i\theta N} a(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0$$

である。この 2 式より，

$$a(\boldsymbol{k})|0(\theta)\rangle = 0$$

を得る。

9) これは (2.37) のすぐ下で導入した記号で，(2.43) を満たす。

が成り立つ。ただし，c 数の N 積は 0 とする。例えば，(2.36) のときは，

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\overset{\text{tree}}{=} \varphi_f + f + \lambda\Big[(\varphi_f^{(+)} + f^{(+)})^3 + 3(\varphi_f^{(-)} + f^{(-)})(\varphi_f^{(+)} + f^{(+)})^2 \\
&\quad +3(\varphi_f^{(-)} + f^{(-)})^2(\varphi_f^{(+)} + f^{(+)}) + (\varphi_f^{(-)} + f^{(-)})^3\Big] \\
&= \varphi_f + f + \lambda\Big[\varphi_f^{(+)3} + 3f^{(+)}\varphi_f^{(+)2} + 3f^{(+)2}\varphi_f^{(+)} + f^{(+)3} \\
&\quad +3(\varphi_f^{(-)} + f^{(-)})(\varphi_f^{(+)2} + 2f^{(+)}\varphi_f^{(+)} + f^{(+)2}) \\
&\quad +3(\varphi_f^{(-)2} + 2f^{(-)}\varphi_f^{(-)} + f^{(-)2})(\varphi_f^{(+)} + f^{(+)}) \\
&\quad +\varphi_f^{(-)3} + 3f^{(-)}\varphi_f^{(-)2} + 3f^{(-)2}\varphi_f^{(+)} + f^{(-)3}\Big] \\
&= f + \lambda\Big[f^{(+)3} + 3f^{(-)}f^{(+)2} + 3f^{(-)2}f^{(+)} + f^{(-)3}\Big] + {:}\psi[x|\varphi_f]{:} \\
&= f + \lambda f^3 + {:}\psi[x|\varphi_f]{:} \qquad (2.130)
\end{aligned}$$

となる。よって，

$$\phi \overset{\text{tree}}{=} f + \lambda f^3 \qquad (2.131)$$

である。一般には，(2.35) の $F[x:\varphi]$ を用いて，

$$\phi(x) \overset{\text{tree}}{=} F[x:f] \qquad (2.132)$$

となる。

$\psi(x)$ のダイナミカルマップを

$$\psi(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} \psi_n(x) \qquad (2.133)$$

と書く。$\psi_n(x)$ は準粒子の $(n+1)$ 次の N 積である。N 積の真空期待値は 0 なので，

$$\psi_{-1}(x) = \langle 0(f)|\psi(x)|0(f)\rangle = \phi(x) \qquad (2.134)$$

である。(2.133) を見やすくするために，ψ_n に λ^n をかけ，

$$\psi(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} \lambda^n \psi_n(x) \qquad (2.135)$$

と書く。計算の最後で $\lambda \to 1$ とする。(2.1) で，ψ を $\lambda\psi$ に換えると，

$$\begin{aligned}
\Lambda(\partial)\lambda\psi(x) &= j[\lambda\psi](x), \\
\Lambda(\partial)\psi(x) &= \frac{j[\lambda\psi](x)}{\lambda} \qquad (2.136)
\end{aligned}$$

となる。この左辺に (2.133) を代入して，

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \lambda^n \Lambda(\partial)\psi_n(x) = \frac{j[\lambda\psi](x)}{\lambda} \qquad (2.137)$$

を得る。今，

$$\begin{aligned}
\lambda\psi &= \sum_{n=-1}^{\infty} \lambda^{n+1}\psi_n \\
&= \phi + \lambda\Delta\psi, \quad \Delta\psi \equiv \psi_0 + \lambda\psi_1 + \cdots \qquad (2.138)
\end{aligned}$$

とかき，(2.137) の右辺を ϕ のまわりで展開することを考える。そのために，公式

$$j[\psi+\delta\psi]=j[\psi]+j_1[\psi]\delta\psi+\frac{1}{2}j_2[\psi](\delta\psi)^2+\cdots \tag{2.139}$$

を用いる。ただし，略記法

$$j_1[\psi]\Phi \equiv \int d^4y \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{j[\psi(\bullet)+\varepsilon\Phi(\bullet)\delta^4(\bullet-y)](x)-j[\psi](x)}{\varepsilon} \tag{2.140}$$

を用いた（$\Phi(x)$ は任意の演算子または c 数である）。(2.139) より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}j[\lambda\psi] &= \frac{1}{\lambda}j[\phi]+\frac{1}{\lambda}j_1[\phi]\lambda\Delta\psi+\frac{1}{2\lambda}j_2[\phi]\Big(\lambda\Delta\psi\Big)^2+\cdots \\ &= \frac{1}{\lambda}j[\phi]+j_1[\phi]\psi_0+\lambda\Big(j_1[\phi]\psi_1+\frac{1}{2}j_2[\phi]\psi_0^2\Big)+O(\lambda^2) \end{aligned}\tag{2.141}$$

を得る。(2.141) を (2.137) に代入し，λ の冪で式を分類すると，

$$\Lambda(\partial)\phi = j[\phi]\,, \tag{2.142}$$

$$\Big(\Lambda(\partial)-j_1[\phi]\Big)\psi_0 = 0\,, \tag{2.143}$$

$$\Big(\Lambda(\partial)-j_1[\phi]\Big)\psi_1 = \frac{1}{2}j_2[\phi]\psi_0^2 \tag{2.144}$$

となる。

(2.142) は，tree 近似での場の秩序パラメーターの式である。(2.143) には，巨視的物体の存在を反映したポテンシャル（巨視的ポテンシャル）$-j_1[\phi]$ が存在するが，これは線形斉次方程式である。よって，

$$\psi_0 = \text{準粒子場} \tag{2.145}$$

と解釈すべきである。(2.144) や $\psi_n(n\geq 2)$ の方程式より，$\psi_1,\psi_2,\cdots$ は ϕ と ψ_0 によって表わされることが分かる。

2.3.4 ゼロ・エネルギー・モードと量子力学的演算子

以下では，準静的な物体を考える。ここで，準静的とは，場の秩序パラメーター ϕ が時間によらないような慣性系（物体の静止系）が存在することである。すなわち，物体の静止系 $(\boldsymbol{x}',t')$ が存在し，

$$\phi=\phi(\boldsymbol{x}') \tag{2.146}$$

である。物体の静止系から boost 変換により一般の慣性系に移れるので，場の秩序パラメーターは,

$$e^{-i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{K}}X_i(\boldsymbol{x},t)e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{K}}=X_i(\boldsymbol{x}',t') \tag{2.147}$$

を満たす座標 X_i（一般化座標）によって，

$$\phi=\phi(\boldsymbol{X}) \tag{2.148}$$

と表わされる。ただし，$\boldsymbol{K}$ は boost 演算子であり，$(\boldsymbol{x}',t')$ に対する座標系は，$(\boldsymbol{x},t)$ に対する座標系から見て，$\boldsymbol{\theta}$ の方向に速さ $\tanh|\boldsymbol{\theta}|$ で移動している。一般化座標は，物体の静止系で，

$$X_i(\boldsymbol{x}',t')=x'_i+\text{const.} \qquad \text{in the static system of coordinates} \tag{2.149}$$

であるとする。場の秩序パラメーターは，(2.132) よりボソン変換関数 f の汎関数であるから，f も

$$f = f(\boldsymbol{X}) \tag{2.150}$$

と書ける。この小節の以下では，物体の静止系で議論を進める。

このとき，方程式 (2.142)，(2.143) は，

$$\Lambda(0,\boldsymbol{\nabla})\phi(\boldsymbol{x}) - j[\phi](\boldsymbol{x}) \;=\; 0, \tag{2.151}$$

$$\Lambda(\partial_t,\boldsymbol{\nabla})\psi_0(\boldsymbol{x},t) - \{j_1[\phi]\psi_0\}(\boldsymbol{x},t) \;=\; 0 \tag{2.152}$$

となる（$\{j_1[\phi]\Phi\}(\boldsymbol{x},t)$ は (2.140) を表わす）。ただし，$j[\phi](x)$ が，

$$j[\phi](x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi^n(x) \equiv j\big(\phi(x)\big) \tag{2.153}$$

または，

$$j[\phi](x) = \text{const.} + \sum_{n=1}^{\infty}\int d^3x_1\cdots d^3x_n\, c_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)\phi(\boldsymbol{x}_1,t)\cdots\phi(\boldsymbol{x}_n,t) \tag{2.154}$$

のいずれかの形であると仮定した。前者は主に相対論的場合であり，後者は非相対論的場合である。(2.153) のときは，(2.140) は

$$j_1[\phi]\Phi = j_1\big(\phi(x)\big)\Phi(x)\,, \quad j_1\big(\phi(x)\big) \equiv \frac{\partial j(\phi)}{\partial \phi} \tag{2.155}$$

となる。

今，

$$\psi_0(x) = u_\omega(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t} \tag{2.156}$$

とおくと，(2.152) は $-j_1[\phi]$ がポテンシャルとして作用する固有値方程式となる。すなわち，

$$\Lambda(-i\omega,\boldsymbol{\nabla})u_\omega(\boldsymbol{x}) - \{j_1[\phi]u_\omega\}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{2.157}$$

である。(2.152) に $\boldsymbol{\nabla}$ を作用させると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\Lambda(0,\boldsymbol{\nabla})\phi - \boldsymbol{\nabla}j[\phi] \;&=\; 0, \\ \Lambda(0,\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}\phi - j_1[\phi]\boldsymbol{\nabla}\phi \;&=\; 0 \end{aligned} \tag{2.158}$$

となる。これより，$\partial_i\phi$ は (2.157) の $\omega=0$ の解である。ただし，第 2 式に移る際，

$$\boldsymbol{\nabla}j[\phi] = j_1[\phi]\boldsymbol{\nabla}\phi \tag{2.159}$$

を用いた。これは，(2.153) のときは (2.155) より明らかだが，(2.154) のときは，次のように示される。まず，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i}j[\phi](\boldsymbol{x}) \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty}\int d^3x_1\cdots d^3x_n\,\frac{\partial}{\partial x^i}c_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)\phi(\boldsymbol{x}_1)\cdots\phi(\boldsymbol{x}_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int d^3x_1\cdots d^3x_n\Big(-\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_m^i}\Big)c_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)\phi(\boldsymbol{x}_1)\cdots\phi(\boldsymbol{x}_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\int d^3x_1\cdots d^3x_n\,c_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n) \\ &\qquad\qquad \times\phi(\boldsymbol{x}_1)\cdots\frac{\partial}{\partial x_m^i}\phi(\boldsymbol{x}_m)\cdots\phi(\boldsymbol{x}_n) \end{aligned} \tag{2.160}$$

である。ただし，第 3 項で境界項は消えるとした。ところで，(2.140) は

$$j_1[\phi]\Phi = \int d^4y \, \frac{\delta j[\phi](x)}{\delta\phi(y)} \Phi(y) \tag{2.161}$$

と書ける。公式

$$\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)} = \delta^4(x-y) \tag{2.162}$$

より，(2.154) のとき，

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta j[\phi](x)}{\delta\phi(y)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\int d^3x_1\cdots d^3x_n \, c_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)\delta^3(\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{y})\delta(t-t_y)\prod_{i(\neq m)=1}^{n}\phi(\boldsymbol{x}_i,t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\int\Big(\prod_{i(\neq m)=1}^{n} d^3x_i\Big)\, c_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)|_{\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{y}}\delta(t-t_y)\prod_{i(\neq m)=1}^{n}\phi(\boldsymbol{x}_i,t)
\end{aligned} \tag{2.163}$$

となる。よって，物体の静止系では，

$$\begin{aligned}
j_1[\phi]\Phi &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\int d^4y\Big(\prod_{i(\neq m)=1}^{n} d^3x_i\Big)\, c_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)|_{\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{y}} \\
&\qquad\qquad \times\delta(t-t_y)\Phi(y)\prod_{i(\neq m)=1}^{n}\phi(\boldsymbol{x}_i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\int d^3x_1\cdots d^3x_n\, c_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n) \\
&\qquad\qquad \times\phi(\boldsymbol{x}_1)\cdots\Phi(\boldsymbol{x}_m,t)\cdots\phi(\boldsymbol{x}_n)
\end{aligned} \tag{2.164}$$

となる。これと，(2.160) を比べて，(2.159) を得る。

今，$\{u_i(\boldsymbol{x})\}_{i=1,2,3}$ を，

$$u_i(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \partial_j\phi(\boldsymbol{x})(V^{-1/2})_{ji}\,, \quad V_{ij} \overset{\text{def}}{=} (\partial_i\phi,\partial_j\phi), \tag{2.165}$$

$$(A,B) \equiv \int d^3x\, A^*(\boldsymbol{x})B(\boldsymbol{x}) \tag{2.166}$$

と定義する[10)]。これは規格直交化されている：

$$\begin{aligned}
(u_i,u_j) &= \Big(\partial_k\phi(V^{-1/2})_{ki},\partial_l\phi(V^{-1/2})_{lj}\Big) \\
&= (V^{-1/2})^*_{ki}\Big(\partial_k\phi,\partial_l\phi\Big)(V^{-1/2})_{lj} \\
&= (V^{-1/2})^*_{ki}V_{kl}(V^{-1/2})_{lj} \\
&= (V^{-1/2})^*_{ki}(V^{1/2})_{kj} \\
&= (V^{-1/2})_{ik}(V^{1/2})_{kj} \\
&= \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{2.167}$$

[10)] この小節の以下の部分では，アインシュタインの規約を用いる。ただし，(2.169)，(2.172) は例外である。i,j,k は $1,2,3$ の値を走る。

$u_i(\boldsymbol{x})$ も (2.157) の $\omega=0$ の解であるが，これは c 数である。ψ_0 は演算子であるから，

$$[\chi_i,\chi_j^\dagger] \,=\, \delta_{ij}\,, \quad [\chi_i,\chi_j]=0\,, \quad [\chi_i^\dagger,\chi_j^\dagger]=0 \tag{2.168}$$

を満たすゼロ・エネルギー・モードの生成・消滅演算子（$i=1,2,3$ ）を用いて，

$$\psi_0(x)=\frac{\gamma}{\sqrt{2}}(\chi_i e^{-i\omega t}+\chi_i^\dagger e^{i\omega t})u_i(\boldsymbol{x})\,, \quad \omega=0 \tag{2.169}$$

と記せるはずである。γ は定数である。代わりに正準演算子

$$\beta_i \,=\, \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(\chi_i+\chi_i^\dagger)\,, \quad \pi_i=-i\frac{1}{\sqrt{2}\gamma}(\chi_i-\chi_i^\dagger) \tag{2.170}$$

を導入する。これは,

$$[\beta_i,\pi_j]=i\delta_{ij} \tag{2.171}$$

を満たす。(2.169) は,

$$\psi_0(x)=\beta_i u_i(\boldsymbol{x}) \tag{2.172}$$

となる。

ゼロ・エネルギー・モード以外の (2.152) の解を $\varphi(x)$ すると，準粒子場 $\psi_0(x)$ は,

$$\psi_0(x)=\sum_{i=1}^{3}\beta_i u_i(\boldsymbol{x})+\varphi(x) \tag{2.173}$$

となる。$\varphi(x)$ は,

$$\varphi(x) \,=\, \int d^3k\,\frac{1}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}}\alpha(\boldsymbol{k})u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t}+\mathrm{h.c.}\,, \quad \omega(\boldsymbol{k})>0 \tag{2.174}$$

と書ける。ただし，$u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ は (2.157) の解であり,

$$(u_{\boldsymbol{k}},u_{\boldsymbol{l}}) \,=\, \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l})\,, \quad (u_i,u_{\boldsymbol{k}})=0 \tag{2.175}$$

を満たす。$\{u_i(\boldsymbol{x})\}_{i=1}^3$，$\{u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\}$ は完全系を張る。すなわち,

$$\sum_{i=1}^{3}u_i^*(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{y})+\int d^3k\,u_{\boldsymbol{k}}^*(\boldsymbol{x})u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{y})=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2.176}$$

である。β_i が生成する波動関数 $u_i(\boldsymbol{x})$ と，$\alpha(\boldsymbol{k})$ が生成する波動関数 $u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ とは直交し，これらはボソンであるから,

$$[\beta_i,\alpha(\boldsymbol{k})]=0\,, \quad [\pi_i,\alpha(\boldsymbol{k})]=0 \tag{2.177}$$

である。すなわち，ゼロ・エネルギー・モードと粒子モードとは独立である。このゼロ・エネルギー・モードは，巨視的物体の存在によって，空間並進対称性が自発的に破れたことに付随する NG モードである。巨視的物体の位置が任意なので，その移動にはエネルギーを費やさない。この NG モードは，離散的なゼロ・エネルギー・モードである。

今,

$$q_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} -(V^{-1/2})_{ij}\beta_j\,, \quad p_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\pi_j(V^{1/2})_{ji} \tag{2.178}$$

を定義すると，

$$\beta_i u_i = \beta_i \partial_j \phi (V^{-1/2})_{ji} = -q_i \partial_i \phi \tag{2.179}$$

となる。よって，(2.173) は，

$$\psi_0(x) = -\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi(\boldsymbol{x}) + \varphi(x) \tag{2.180}$$

となり，(2.133) は，

$$\psi(x) = \phi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi(\boldsymbol{x}) + \varphi(x) + \cdots \tag{2.181}$$

$$= \phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}) + \varphi(x) + \cdots \tag{2.182}$$

となる。「$\cdots$」は q_i，p_i および φ の N 積で構成される高次の項である。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{q}$ とが $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}$ の組み合わせで現れていることは特筆に値する。

(2.171)，(2.178) より，

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \tag{2.183}$$

$$\begin{aligned} [q_i, p_j] &= \left[-(V^{-1/2})_{ik}\beta_k, -\pi_l (V^{1/2})_{lj}\right] \\ &= (V^{-1/2})_{ik}\left[\beta_k, \pi_l\right](V^{1/2})_{lj} \\ &= (V^{-1/2})_{ik} i\delta_{kl} (V^{1/2})_{lj} \\ &= i(V^{-1/2})_{ik}(V^{1/2})_{kj} \\ &= i\delta_{ij}\,, \end{aligned} \tag{2.184}$$

$$[q_i, \alpha(\boldsymbol{k})] = 0, \quad [p_i, \alpha(\boldsymbol{k})] = 0 \tag{2.185}$$

を得る。(2.185) より，q_i，p_i が場の演算子としてよりは，むしろ量子力学的演算子として作用するので，このゼロ・エネルギー・モードを粒子モードと別々に扱うことができる。これは低エネルギー定理に相当する（§2.3.2 参照）。Hibert 空間 $\mathcal{H}$ は，準粒子の Fock 空間 $\mathcal{H}[\alpha]$ と量子力学的 Hibert 空間 $\mathcal{H}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ の直積である：

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}[\alpha] \otimes \mathcal{H}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}). \tag{2.186}$$

ここで，$\mathcal{H}[\alpha]$ は

$$\alpha(\boldsymbol{k})|0(f)\rangle = 0 \tag{2.187}$$

で定義される $|0(f)\rangle$ に $\alpha^\dagger(\boldsymbol{k})$ をくり返し作用させて得られる。$|0(f)\rangle$ は，ボソン変換関数 $f(x)$ で特徴づけられる粒子凝縮をしている。なお，場の秩序パラメーター $\phi(x)$ は，

$$\phi(x) = \langle 0(f)|\psi(x)|0(f)\rangle|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}} \tag{2.188}$$

と表わせる。

この小節で量子力学的演算子 q_i，p_i が現れた。これが現れたのは，準粒子方程式 (2.152) の離散的なゼロ・エネルギー・モードの解 $u_i(\boldsymbol{x}) = \partial_j \phi(\boldsymbol{x})(V^{-1/2})_{ji}$ が存在したためである。$\partial_j \phi(\boldsymbol{x})$ が (2.152) の解になる上で本質的だったのは，(2.152) の左辺第 2 項の巨視的ポテンシャルの存在である。これが量子力学的演算子の起源である。

2.3.5 c-q 転化条件

c-q 転化条件

量子力学において，位置は演算子であった。しかし，場の量子論では，位置は時間と同様，c 数パラメーターである。c 数 c は，任意の演算子 U と可換であり，

$$UcU^{-1} = c \tag{2.189}$$

である。場の理論の発展当初，これは

量子論では，いかなる変化もヒルベルト空間における q 数変換により誘起される (2.190)

という基本要請に反するように見えた。しかしこれは，矛盾ではない。実際，位置の変換 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$ は，全運動量演算子 $\boldsymbol{P}$ により誘起される。例えば，実クライン・ゴルドン場 (2.9)-(2.12) では，変換変換 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$ は

$$a(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{c}) \overset{\text{def}}{=} e^{-i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{c}} a(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{c}} = a(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{c}} \tag{2.191}$$

により誘起される。この式は，$\boldsymbol{P}$ が実クライン・ゴルドン場の場合，

$$\boldsymbol{P} = \int d^3k\, \boldsymbol{k} a^\dagger(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) \tag{2.192}$$

と書ける（付録 C 参照）ことから容易に確かめられる。(2.191) の左辺で $\boldsymbol{c} \to x\boldsymbol{c}$ としたものを x で微分すると，

$$\frac{d}{dx} a(\boldsymbol{k}, x\boldsymbol{c}) = e^{-ix\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{c}} [a(\boldsymbol{k}), i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{c}] e^{ix\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{c}} \tag{2.193}$$

となる。$[a(\boldsymbol{k}), i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{c}]$ は

$$\begin{aligned}
[a(\boldsymbol{k}), i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{c}] &= \int d^3k'\, i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{c} [a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k}') a(\boldsymbol{k}')] \\
&= \int d^3k'\, i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{c} \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') a(\boldsymbol{k}') \\
&= i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{c} a(\boldsymbol{k})
\end{aligned} \tag{2.194}$$

となる。ただし，正準交換関係 (2.13) を用いた。これを (2.193) に代入して

$$\frac{d}{dx} a(\boldsymbol{k}, x\boldsymbol{c}) = i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{c} a(\boldsymbol{k}, x\boldsymbol{c}) \tag{2.195}$$

を得る。これ $x = 0$ から $x = 1$ まで積分し，初期条件

$$a(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{0}) = a(\boldsymbol{k}) \tag{2.196}$$

を用いると (2.191) が得られる。

位置の変換は q 数の変換により誘起された。このことから「いかなる c 数の変換も，q 数の変換， すなわち，Hilbert 空間での変換で作られるべきである」という要請が示唆される。これを c-q 転化条件と言う。これを課せば基本要請 (2.190) も満たされる。

(2.178) の $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{p}$ について考える。$\boldsymbol{q}$ はその正準共役量 $\boldsymbol{p}$ によって，

$$e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{p}} q_i e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{p}} = q_i - \xi_i \tag{2.197}$$

のように変換される。c-q 転化規則によると，この q 数変換

$$q_i \to q_i - \xi_i \tag{2.198}$$

が，c 数変換

$$x_i \to x_i + \xi_i \tag{2.199}$$

を誘起するはずである。よって，場の演算子のダイナミカルマップには，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{q}$ とが $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}$ の組み合わせで含まれなくてはならない。$\boldsymbol{x}$ は実数なので，$\boldsymbol{q}$ はエルミートである。(2.197) において，$e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{p}}$ はユニタリーのはずであり，従って，$\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{p}$ はエルミートであり，$\boldsymbol{\xi}$ は実数なので，$\boldsymbol{p}$ はエルミートのはずである：

$$q_i^\dagger = q_i\,, \quad p_i^\dagger = p_i\,. \tag{2.200}$$

　場の演算子 $F(x)$ は，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}$ の組み合わせでしか $\boldsymbol{x}$ に依存できない。すなわち，

$$F(\boldsymbol{x},t) \overset{\mathrm{w}}{=} F\big[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q},t:\boldsymbol{p};\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q},t:\boldsymbol{p})\big] \tag{2.201}$$

である。ここで，弱い等号 $\overset{\mathrm{w}}{=}$ は，$\mathcal{H}$ の元 $|a\rangle$，$|b\rangle$ の間の行列要素が等しいことを意味する：

$$A \overset{\mathrm{w}}{=} B \Leftrightarrow \langle a|A|b\rangle = \langle a|B|b\rangle. \tag{2.202}$$

また，一般化座標 $\boldsymbol{X}$ も，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}$ の組み合わせでしか $\boldsymbol{x}$ に依存できないため，

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q},t:\boldsymbol{p};\boldsymbol{\theta}) \tag{2.203}$$

と書ける。ここで，$\boldsymbol{\theta}$ は物体の位置と速度を表わすパラメーターである。

　ところで，$\varphi(x)$ の表式は (2.174) であった。空間並進 (2.199) によって，$\alpha^\dagger(\boldsymbol{k}),\alpha(\boldsymbol{k})$ は変換されるべきではない。よって，空間並進を生成する全運動量 $\boldsymbol{P}$ のダイナミカルマップが準粒子を含んでいないことが分かる：

$$\boldsymbol{P} \overset{\mathrm{w}}{=} \boldsymbol{p}. \tag{2.204}$$

　座標の回転や原点の移動では，物理的な変化は起こらないので，

$$[H,\boldsymbol{J}] \overset{\mathrm{w}}{=} 0\,, \tag{2.205}$$
$$[H,\boldsymbol{P}] \overset{\mathrm{w}}{=} 0 \tag{2.206}$$

である。ただし，$\boldsymbol{J}$ は，全角運動量である。(2.206) より，H のダイナミカルマップは，$\boldsymbol{q}$ を含まないことが分かる：

$$H \overset{\mathrm{w}}{=} H[\boldsymbol{p};\alpha^\dagger(\boldsymbol{k}),\alpha(\boldsymbol{k})]. \tag{2.207}$$

一般に，大域的演算子

$$N = \int d^3x\,\rho(\boldsymbol{x},t) \tag{2.208}$$

は，$\boldsymbol{q}$ を含まない。すなわち，

$$N \overset{\mathrm{w}}{=} N\big[t:\boldsymbol{p};\alpha^\dagger(\boldsymbol{k}),\alpha(\boldsymbol{k})\big] \tag{2.209}$$

である。なぜなら，いかなる局所演算子 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ も，

$$\rho(\boldsymbol{x},t) \stackrel{\mathrm{w}}{=} \rho\big[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}, t : \boldsymbol{p}; \alpha^\dagger(\boldsymbol{k}), \alpha(\boldsymbol{k})\big] \tag{2.210}$$

のように $\boldsymbol{q}$ を $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}$ の形でのみ含むため，空間積分により $\boldsymbol{q}$ が消えるからである。

boost 生成子 $\boldsymbol{K}$ は，(C.51) のように，

$$K_i = \int d^3x\,(T^0{}_i x_0 - T^0{}_0 x_i) \tag{2.211}$$

で与えられる（付録 C 参照）。この積分は座標 x_i を陽に含むので，$\boldsymbol{K}$ は大域的演算子ではなく，$\boldsymbol{q}$ を陽に含み得る[11)]。すなわち，

$$\boldsymbol{K} \stackrel{\mathrm{w}}{=} \boldsymbol{K}\big[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}; \alpha(\boldsymbol{k}), \alpha^\dagger(\boldsymbol{k})\big] \tag{2.212}$$

である。

[11)] 角運動量も大域的演算子ではない。角運動量のダイナミカルマップは，§D.2 で議論する。

3　巨視的物体としての量子ソリトン

3.1　sine-Gordon モデル

(1+1) 次元での sine-Gordon モデル

$$\Bigl(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Bigr)\psi(x,t)=\frac{\mu^2}{\lambda}\sin[\lambda\psi(x,t)] \tag{3.1}$$

を考える。準粒子 φ の方程式は,

$$\Bigl(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\mu^2\Bigr)\varphi(x,t)=0 \tag{3.2}$$

と設定する。このとき，(3.1) を (2.1) の形で書くと,

$$\Lambda(\partial)\psi(x) \;=\; j\bigl(\psi(x)\bigr), \tag{3.3}$$

$$\Lambda(\partial) \;=\; -\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\mu^2, \tag{3.4}$$

$$j\bigl(\psi(x)\bigr) \;=\; -\mu^2\psi(x)+\frac{\mu^2}{\lambda}\sin[\lambda\psi(x,t)] \tag{3.5}$$

となる。$j\bigl(\psi(x)\bigr)$ は,

$$\begin{aligned} j\bigl(\psi(x)\bigr) \;&=\; -\mu^2\psi(x,t)+\frac{\mu^2}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}[\lambda\psi(x,t)]^{2k+1} \\ &=\; \frac{\mu^2}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}[\lambda\psi(x,t)]^{2k+1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

とも書ける。これを (3.3) に代入すると,

$$\Lambda(\partial)\lambda\psi(x) \;=\; \mu^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}[\lambda\psi(x,t)]^{2k+1} \tag{3.7}$$

となる。この方程式に，ψ は $\lambda\psi$ の形で含まれる。よって，しばらくの間 $\lambda\psi$ を単に ψ と書く。このとき，(3.7) は,

$$\Lambda(\partial)\psi(x) \;=\; \mu^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}[\psi(x,t)]^{2k+1} \tag{3.8}$$

となる。以下では，tree 近似の範囲で，場の秩序パラメーター $\phi\bigl(X(x,t)\bigr)$ を求める。

(3.2) の解は，(2.9)-(2.12) となる。(2.14) で定義された真空 $|0\rangle$ が対称相にあるとする。このとき，ψ は,

$$\psi(x,t) \;=\; F[x:\varphi] \tag{3.9}$$

$$\;=\; \sum_{n=1,3,5,\cdots}\psi_n(x,t) \tag{3.10}$$

とダイナミカルマップされる。ただし，ψ_n（$n=1,3,5,\cdots$）は φ の n 次の項である。(3.10) を (3.8) に代入して,

$$\sum_{n=1,3,5,\cdots}\Lambda(\partial)\psi_n \;=\; \mu^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\Bigl(\sum_{n'=1,3,5,\cdots}\psi_{n'}\Bigr)^{2k+1} \tag{3.11}$$

となる。n 次の項を比べて，

$$\Lambda(\partial)\psi_n = \mu^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \Big[\big(\sum_{n'} \psi_{n'}\big)^{2k+1} \Big]_n \qquad \text{for} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \tag{3.12}$$

を得る。ただし，$[\cdots]_n$ は $\cdots$ のうち n 次の部分を表わす。明らかに

$$\Big[\big(\sum_{n'} \psi_{n'}\big)^{2k+1} \Big]_n = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{2k+1}=n} \psi_{i_1}\psi_{i_2}\cdots\psi_{i_{2k+1}} \tag{3.13}$$

である。ただし，

$$i_1, i_2, \cdots, i_{2k+1} = 1, 3, 5, \cdots \tag{3.14}$$

であり，以下では，$\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{2k+1}=n}$ の和は，常に (3.14) の下でとるものとする。$2k+1 \geq 3$ であるから，

$$\Big[\big(\sum_{n'} \psi_{n'}\big)^{2k+1} \Big]_1 = 0 \qquad \text{for} \quad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.15}$$

となる。また，$i_j \geq 1$ より，

$$\Big[\big(\sum_{n'} \psi_{n'}\big)^{2k+1} \Big]_n = 0 \qquad \text{for} \quad k > \frac{n-1}{2} \tag{3.16}$$

である。よって，(3.12) は，

$$\Lambda(\partial)\psi_1 = 0, \tag{3.17}$$

$$\Lambda(\partial)\psi_n = \mu^2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{i_1+\cdots+i_{2k+1}=n} \psi_{i_1}\psi_{i_2}\cdots\psi_{i_{2k+1}} \qquad \text{for} \quad n = 3, 5, \cdots \tag{3.18}$$

となる。(3.17) より，

$$\psi_1 = \varphi \tag{3.19}$$

が分かる。

ボソン変換 $\varphi \to \varphi_f$：

$$\varphi_f = \varphi - f\big(X(x,t)\big) \tag{3.20}$$

を行う。このとき，場の秩序パラメーター (2.126) は，(2.132)，(3.10) より，

$$\phi \stackrel{\text{tree}}{=} \sum_{n=1,3,5,\cdots} \phi_n \tag{3.21}$$

となる。ただし，

$$\phi_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle 0(f)|\psi_n|0(f)\rangle \qquad \text{for} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \tag{3.22}$$

である。特に，

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \langle 0(f)|\psi_1|0(f)\rangle \\ &= \langle 0(f)|\varphi|0(f)\rangle \\ &= \langle 0(f)|\varphi_f + f|0(f)\rangle \\ &= f \end{aligned} \tag{3.23}$$

である。(3.3) の真空期待値より

$$\Lambda(\partial)\phi(x) \stackrel{\mathrm{tree}}{=} j\big(\phi(x)\big) \tag{3.24}$$

が得られ，(3.17)，(3.18) の真空期待値より，

$$\begin{aligned} \Lambda(\partial)\phi_1 &= 0, \qquad (3.25)\\ \Lambda(\partial)\phi_n &\stackrel{\mathrm{tree}}{=} \mu^2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{i_1+\cdots+i_{2k+1}=n} \phi_{i_1}\phi_{i_2}\cdots\phi_{i_{2k+1}} \quad \text{for} \quad n=3,5,\cdots \qquad (3.26) \end{aligned}$$

が得られる。(3.25) は，(3.23) より，

$$\Lambda(\partial)f\big(X(x,t)\big) = 0 \tag{3.27}$$

となる。以下では，$\stackrel{\mathrm{tree}}{=}$ を単に $=$ と書く。

今，一般化時間 T を

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{\partial^2}{\partial X^2}, \qquad (3.28)\\ T(x,t)|_{\dot{q}=0} &= t \qquad (3.29) \end{aligned}$$

を満たすものとして導入すると，

$$\Lambda(\partial) = -\frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \mu^2 \tag{3.30}$$

となり，(3.27) は，

$$\Big(-\frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \mu^2\Big)f(X) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \mu^2\Big)f(X) = 0 \tag{3.31}$$

となる。この方程式の一般解は，

$$f(X) = ae^{\mu X} + be^{-\mu X} \tag{3.32}$$

である。a, b は c 数定数である。

(3.26) より，

$$\begin{aligned} \Lambda(\partial)\phi_3 &= \mu^2 \frac{-1}{3!} \sum_{i_1+i_2+i_3=3} \phi_{i_1}\phi_{i_2}\phi_{i_3}\\ &= \frac{-\mu^2}{3!}\phi_1^3 \end{aligned} \tag{3.33}$$

である。これに，(3.23)，(3.32) を代入して，

$$\begin{aligned} \Lambda(\partial)\phi_3 &= \frac{-\mu^2}{3!}(a^3e^{3\mu X} + 3a^2be^{\mu X} + 3ab^2e^{-\mu X} + b^3e^{-3\mu X}), \qquad (3.34)\\ \phi_3 &= \frac{-\mu^2}{3!}\Lambda^{-1}(\partial)(a^3e^{3\mu X} + 3a^2be^{\mu X} + 3ab^2e^{-\mu X} + b^3e^{-3\mu X}) \qquad (3.35) \end{aligned}$$

を得る。ところで，

$$\Lambda(\partial)e^{\alpha\mu X} = \mu^2(\alpha^2 - 1)e^{\alpha\mu X} \tag{3.36}$$

であるから，$\Lambda^{-1}(\partial)$ は,

$$\Lambda^{-1}(\partial)e^{\alpha\mu X} \equiv \frac{1}{\mu^2(\alpha^2-1)}e^{\alpha\mu X} \qquad \text{for} \quad \alpha \neq \pm 1 \tag{3.37}$$

として定義することができる。しかし，(3.35) には，$ab=0$ でない限り $e^{\pm\mu X}$ の項が含まれていて，$\Lambda^{-1}(\partial)$ を定義することができない。よって，以下では,

$$a = 1\,, \quad b = 0\,, \tag{3.38}$$

$$f(X) = \phi_1 = e^{\mu X} \tag{3.39}$$

として話を進める。このとき,

$$\begin{aligned}\phi_3 &= \frac{-\mu^2}{3!}\Lambda^{-1}(\partial)e^{3\mu X} \\ &= \frac{-\mu^2}{3!}\frac{1}{\mu^2(3^2-1)}e^{3\mu X} \\ &= -\frac{1}{3}\frac{1}{4^2}e^{3\mu X}\end{aligned} \tag{3.40}$$

となる。ϕ_5 は,

$$\begin{aligned}\Lambda(\partial)\phi_5 &= \mu^2\Big(\frac{-1}{3!}\sum_{i_1+i_2+i_3=5}\phi_{i_1}\phi_{i_2}\phi_{i_3} + \frac{(-1)^2}{5!}\sum_{i_1+\cdots+i_5=5}\phi_{i_1}\cdots\phi_{i_5}\Big) \\ &= \mu^2\Big(\frac{-1}{3!}3\phi_1^2\phi_3 + \frac{(-1)^2}{5!}\phi_1^5\Big) \\ &= \mu^2\Big(\frac{-3}{3!}(e^{\mu X})^2\big(-\frac{1}{3}\frac{1}{4^2}e^{3\mu X}\big) + \frac{(-1)^2}{5!}(e^{\mu X})^5\Big) \\ &= \mu^2\frac{3}{2^5\cdot 5}e^{5\mu X}\end{aligned} \tag{3.41}$$

を満たす。よって,

$$\begin{aligned}\phi_5 &= \mu^2\frac{3}{2^5\cdot 5}\Lambda^{-1}(\partial)e^{5\mu X} \\ &= \mu^2\frac{3}{2^5\cdot 5}\frac{1}{\mu^2(5^2-1)}e^{5\mu X} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{4^4}e^{5\mu X}\end{aligned} \tag{3.42}$$

となる。

一般に,

$$\phi_n = A_n e^{n\mu X} \qquad \text{for} \quad n = 1, 3, 5, \cdots \tag{3.43}$$

となる。特に,

$$A_1 = 1\,, \quad A_3 = -\frac{1}{3}\frac{1}{4^2}\,, \quad A_5 = \frac{1}{5}\frac{1}{4^4} \tag{3.44}$$

であった。(3.37)，(3.26) より,

$$(n^2-1)A_n = \sum_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\sum_{i_1+\cdots+i_{2k+1}=n}A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_{2k+1}} \qquad \text{for} \quad n = 3, 5, \cdots \tag{3.45}$$

を得る。

3.2 キンク解

今,

$$\alpha_{n-2}(z) \stackrel{\text{def}}{=} A_1 z + A_3 z^3 + \cdots + A_{n-2} z^{n-2}, \tag{3.46}$$

$$F_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sin \alpha_{n-2}(z) \tag{3.47}$$

を導入する。z は形式変数（c 数）である。$[\cdots]_n$ という記号を，$\cdots$ のうち z^n に比例する部分を表わすものとすると，F_n は,

$$[F_n(z)]_n = (n^2-1) A_n z^n \tag{3.48}$$

という性質をもつ。これは以下のようにして示される。まず,

$$[F_n(z)]_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \Big[\Big(\sum_{m=1,3,\cdots,n-2} A_m z^m \Big)^{2k+1}\Big]_n \tag{3.49}$$

である。$k=0$ に対して,

$$\Big[\Big(\sum_{m=1,3,\cdots,n-2} A_m z^m \Big)^{1}\Big]_n = 0 \tag{3.50}$$

となり，また,

$$\Big[\Big(\sum_{m=1,3,\cdots,n-2} A_m z^m \Big)^{2k+1}\Big]_n = 0 \qquad \text{for} \ \ k > \frac{n-1}{2} \tag{3.51}$$

となる。よって，(3.49) は,

$$[F_n(z)]_n = \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{i_1+\cdots+i_{2k+1}=n} A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_{2k+1}} z^n \tag{3.52}$$

を満たす。これと (3.45) より，(3.48) が成り立つ。

$\alpha_{n-2}(z)$ は,

$$\alpha_{n-2}(z) = \alpha_\infty(z) - \varphi_n(z), \tag{3.53}$$

$$\alpha_\infty(z) = A_1 z + A_3 z^3 + \cdots + A_{n-2} z^{n-2} + B_n z^n + B_{n+2} z^{n+2} + \cdots, \tag{3.54}$$

$$\varphi_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} B_n z^n + B_{n+2} z^{n+2} + \cdots \tag{3.55}$$

とも書ける。ここで，B_k の k 依存性は任意だが，特に,

$$B_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k} \frac{1}{4^{k-1}} \tag{3.56}$$

と選ぶ。よって,

$$\begin{aligned} F_n(z) &= \sin(\alpha_\infty - \varphi_n) \\ &= \sin\alpha_\infty \cos\varphi_n - \cos\alpha_\infty \sin\varphi_n \\ &= \sin\alpha_\infty \Big(1 - \frac{\varphi_n^2}{2} + \cdots\Big) - \Big(1 - \frac{\alpha_\infty^2}{2} + \cdots\Big)\Big(\varphi_n - \frac{\varphi_n^3}{3!} \cdots\Big) \end{aligned} \tag{3.57}$$

であり,

$$
\begin{aligned}
[F_n(z)]_n &= [\sin\alpha_\infty(z)]_n - [\varphi_n(z)]_n \\
&= [\sin\alpha_\infty(z)]_n - B_n z^n
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

となる。

(3.44) は,

$$
A_k = B_k \qquad \text{for} \quad k = 1, 3, 5 \tag{3.59}
$$

と書ける。よって,

$$
A_k = B_k \qquad \text{for} \quad k = 1, 3, \cdots, n-2 \tag{3.60}
$$

を仮定し，$A_n = B_n$ を導く [3]。

(3.60) のとき,

$$
\begin{aligned}
\alpha_\infty(z) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+l} \frac{1}{4^{2l}} z^{2l+1} \\
&= 4 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+l} \Bigl(\frac{z}{4}\Bigr)^{2l+1} \\
&= 4 \tan^{-1} \frac{z}{4}
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

となる。ただし,

$$
\tan^{-1} z = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+l} z^{2l+1} \qquad \text{for} \quad |z| < 1 \tag{3.62}
$$

を用いた。今,

$$
\theta(z) \stackrel{\text{def}}{=} \tan^{-1} \frac{z}{4} \tag{3.63}
$$

とおくと,

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha_\infty(z) &= \sin(4\theta) \\
&= 2 \sin 2\theta \cos 2\theta \\
&= 4 \sin\theta \cos\theta (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\
&= 4 \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \Bigl(\frac{1}{1+\tan^2\theta} - \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \Bigr) \\
&= 4 \frac{z/4}{\sqrt{1+(z/4)^2}} \frac{1}{\sqrt{1+(z/4)^2}} \Bigl(\frac{1}{1+(z/4)^2} - \frac{(z/4)^2}{1+(z/4)^2} \Bigr) \\
&= z \frac{1-(z/4)^2}{[1+(z/4)^2]^2} \\
&= z \Bigl[\Bigl(1 + \frac{z^2}{4^2}\Bigr)^{-1} \Bigr]^2 - \frac{z^3}{4^2} \Bigl[\Bigl(1 + \frac{z^2}{4^2}\Bigr)^{-1} \Bigr]^2 \\
&= z \Bigl[\sum_{k=0}^{\infty} \Bigl(-\frac{z^2}{4^2}\Bigr)^k \Bigr]^2 - \frac{z^3}{4^2} \Bigl[\sum_{k=0}^{\infty} \Bigl(-\frac{z^2}{4^2}\Bigr)^k \Bigr]^2
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

となる。ただし，第 4 等号で

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}, \quad \sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \qquad \text{for} \quad |\theta| < \frac{\pi}{2} \tag{3.65}$$

を用い，第 5 等号で

$$\begin{aligned} \tan\theta(z) &= \tan\bigl(\tan^{-1}\frac{z}{4}\bigr) \\ &= \frac{z}{4} \end{aligned} \tag{3.66}$$

を用いた。今，$n = 2l+1$ とすると，

$$\begin{aligned} [\sin\alpha_\infty(z)]_n &= [\sin\alpha_\infty(z)]_{2l+1} \\ &= z\Bigl[\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{z^2}{4^2})^k\Bigr)^2\Bigr]_{2l} - \frac{z^3}{4^2}\Bigl[\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{z^2}{4^2})^k\Bigr)^2\Bigr]_{2l-2} \\ &= z\sum_{m=0}^{l}\Bigl(-\frac{z^2}{4^2}\Bigr)^m\Bigl(-\frac{z^2}{4^2}\Bigr)^{l-m} - \frac{z^3}{4^2}\sum_{m=0}^{l-1}\Bigl(-\frac{z^2}{4^2}\Bigr)^m\Bigl(-\frac{z^2}{4^2}\Bigr)^{l-1-m} \\ &= z(l+1)(-1)^l\frac{z^{2l}}{4^{2l}} - \frac{z^3}{4^2}l(-1)^{l-1}\frac{z^{2l-2}}{4^{2l-2}} \\ &= (2l+1)\frac{(-1)^l}{4^{2l}}z^{2l+1} \\ &= n\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{4^{n-1}}z^n \\ &= n^2 B_n \end{aligned} \tag{3.67}$$

となる。これを (3.58) に代入して，

$$[F_n(z)]_n = n^2 B_n z^n - B_n z^n \tag{3.68}$$

を得る。この式の右辺が (3.48) の右辺と等しいとして，

$$\begin{aligned} (n^2-1)A_n &= (n^2-1)B_n, \\ A_n &= B_n \end{aligned} \tag{3.69}$$

が得られる。よって，数学的帰納法より，

$$A_k = B_k \qquad \text{for} \quad k = 1, 3, \cdots \tag{3.70}$$

を得る。

(3.60)，(3.43) を (3.21) に代入して，

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \sum_{l=0}^{\infty} A_{2l+1} e^{(2l+1)\mu X} \\ &= 4\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2l+l}\Bigl(\frac{e^{\mu X}}{4}\Bigr)^{2l+1} \\ &= 4\tan^{-1}\frac{e^{\mu X}}{4} \qquad (3.71) \\ &= 4\tan^{-1}\frac{f(X)}{4} \qquad (3.72) \end{aligned}$$

を得る。ただし，最後の等号で (3.39) を用いた。(3.71) は sine-Gordon 方程式のキンク解として知られているものである。

λ を復活させると，(3.71) は

$$\begin{aligned}\phi(X) &= \frac{4}{\lambda}\tan^{-1}\frac{e^{\mu X}}{4} &(3.73)\\ &= \frac{4}{\lambda}\tan^{-1}\frac{\lambda f(X)}{4} &(3.74)\end{aligned}$$

となる。(3.71) の等号は次のように考える。簡単のため X を c 数と思うと，(3.62) より，

$$\begin{gathered}\frac{|e^{\mu X}|}{4} < 1,\\ \mu \mathrm{Re} X < \ln 4 \qquad (3.75)\end{gathered}$$

の範囲で (3.71) が成立する。ところで，$\phi(X)$ は微分方程式 (3.24) の解であるから，解析関数であるはずである。よって，(3.75) 以外での領域の解は，(3.75) での解を解析接続したものであり，従って，任意の X に対して (3.71) が成り立つ。つまり，(3.39) のとき，(3.21) の仮定は，(3.75) の範囲でしか妥当でないのである。すなわち，(3.75) 以外での範囲では，$\phi(X)$ は $f(X)$ の関数ではあるが，$f(X)$ の級数展開では表わせない。

4 まとめ

本論文では真空の属性について詳しく考察した。§1.2.2 において場の量子論では，非可算無限個の真空が存在することを見た。§1.2.1 でみたように，量子力学では真空は 1 個しかないので，場の量子論の方がはるかに豊かな体系であることが分かる。§2.1 ではダイナミカルマップの考え方を学んだ。すなわち，いかなる演算子も Fock 空間への作用によって定義されるため，準粒子によって表わされる。異なる準粒子を用いることは，異なる相を記述することに対応する。§2.2.1 では，時間に依存しない大域的演算子が (2.58) で与えられることを見た。この表式はエネルギー保存則と運動量保存則から導かれた。§2.3.2 では，(2.58) の表式から南部-Goldstone 定理を得た。この導出法は，相対論的な場合にも非相対論的場合にも適用できる一般のものであった。南部-Goldstone 定理の証明には，通常，付録 B の ward-高橋の関係式が用いられるが，§2.3.2 での証明は極めて直感的である。

§2.3.2 で見たように，変換 (2.96) に伴い NG 場は (2.113)，すなわち

$$\chi_\theta(x) = \chi(x) - c\theta \tag{4.1}$$

と変換される。これは真空の並進対称性が保たれているときのボソン変換である。この変換により，場の秩序パラメーターは (2.125) となり，これは位置と時間 $(\boldsymbol{x}, t)$ によらない定数である。真空の並進対称性を破るボソン変換は (2.73)，すなわち，位置と時間 $(\boldsymbol{x}, t)$ に依存する $f(x)$ により

$$\varphi_f(x) = \varphi(x) - f(x) \tag{4.2}$$

で与えられる。このとき，場の秩序パラメーターは (2.132) となり，位置と時間 $(\boldsymbol{x}, t)$ に依存する。ハイゼンベルグ場 $\psi(x)$ の方程式を準粒子で展開し，準粒子の次元で式を分類すると，最低次とその次の次数の方程式として (2.142)，(2.143)，すなわち，

$$\Lambda(\partial)\phi \;=\; j[\phi]\,, \tag{4.3}$$

$$\Big(\Lambda(\partial) - j_1[\phi]\Big)\psi_0 \;=\; 0 \tag{4.4}$$

が得られる。(4.4) は，巨視的物体が存在するときの準粒子場の従う方程式である。この左辺第 2 項の巨視的ポテンシャル $-j_1[\phi]$ の存在が本質的である（これはボソン変換前は 0 である）。巨視的物体の静止系では，$\partial_i\phi(\boldsymbol{x})$ が (4.4) のゼロ・エネルギー・モードの解となる。このことから，量子力学的演算子の存在が導かれる。量子力学的演算子は，巨視的物体が存在することにより，真空の並進対称性が自発的に破れたことに付随する南部-Goldostone 粒子である。量子力学的演算子は巨視的物体の位置や運動量を表わす。場の量子論から自然に，真空の属性として，このような演算子が現れるというのは，新鮮な驚きであった。

第 3 章では sine-Gordon モデルを考え，$f(x) = e^{\mu X}$ のとき，場の秩序パラメーターが

$$\phi(X) \overset{\text{tree}}{=} \frac{4}{\lambda}\tan^{-1}\frac{e^{\mu X}}{4} \tag{4.5}$$

となることを見た。

A　生成・消滅演算子に対する公式集

A.1　個数状態

正準交換関係

$$[a, a^\dagger] = 1\,, \quad [a, a] = 0\,, \quad [a^\dagger, a^\dagger] = 0 \tag{A.1}$$

を満たしている生成演算子 $a^\dagger$ と消滅演算子 a を考える。今,

$$N \stackrel{\text{def}}{=} a^\dagger a \tag{A.2}$$

を定義すると，これはエルミート演算子である。N の固有状態 $|n\rangle$（a の個数状態）を

$$N|n\rangle = n|n\rangle \tag{A.3}$$

によって定義する。この式の $\dagger$ をとって，n を m に換えて,

$$\langle m|N = m^*\langle m| \tag{A.4}$$

を得る。(A.3) に $\langle m|$ を作用させたものから，(A.4) に $|n\rangle$ を作用させたものを引いて,

$$(n - m^*)\langle m|n\rangle = 0 \tag{A.5}$$

を得る。この式の $m = n$ の場合から,

$$n^* = n \tag{A.6}$$

が得られ，$m \neq n$ の場合から

$$\langle m|n\rangle = 0 \qquad \text{for} \quad m \neq n \tag{A.7}$$

が得られる。

(A.3) に $\langle n|$ を作用させると,

$$\langle n|N|n\rangle = n\langle n|n\rangle \tag{A.8}$$

となる。左辺は,

$$\begin{aligned}\langle n|N|n\rangle &= \langle n|a^\dagger a|n\rangle \\ &= \|a|n\rangle\|^2 \geq 0\end{aligned} \tag{A.9}$$

であり，右辺は,

$$n\langle n|n\rangle = n\||n\rangle\|^2 \tag{A.10}$$

であるから,

$$n \geq 0 \qquad \text{for} \quad \||n\rangle\| \neq 0 \tag{A.11}$$

を得る。

また，交換関係 (1.6) より，

$$[N, a] = [a^\dagger, a]a = -a, \tag{A.12}$$
$$[N, a^\dagger] = a^\dagger[a, a^\dagger] = a^\dagger \tag{A.13}$$

である。これを用いて，

$$Na|n\rangle = (aN - a)|n\rangle = (n-1)a|n\rangle, \tag{A.14}$$
$$Na^\dagger|n\rangle = (a^\dagger N + a^\dagger)|n\rangle = (n+1)a^\dagger|n\rangle \tag{A.15}$$

を得る。これより，$a|n\rangle$，$a^\dagger|n\rangle$ は N の固有値 $(n-1)$，$(n+1)$ に属する固有状態であると分かる。ところで，$n \geq 0$ であるから，これが (A.14) と両立するためには，ある最小値 $n_0(\geq 0)$ が存在して

$$a|n_0\rangle = 0 \tag{A.16}$$

でなくてはならない。この式に $a^\dagger$ を作用させて

$$a^\dagger a|n_0\rangle = N|n_0\rangle = 0 \tag{A.17}$$

を得る。これと (A.3) より

$$n_0 = 0 \tag{A.18}$$

と分かる。以上より，

$$n = 0, 1, 2, \cdots \tag{A.19}$$

を得る。なぜなら，もしこれ以外の n が存在すると，(A.14) より，$a^{\lceil n \rceil}|n\rangle$（$\lceil n \rceil$ は n 以上の最小の整数）は N の固有値が負の固有状態となってしまうからである。

今，$|n\rangle$ を

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} \tag{A.20}$$

と規格化する。ところで，(A.15) より，

$$a^\dagger|n\rangle = c_n|n+1\rangle \tag{A.21}$$

である。両辺のノルムをとると，

$$\langle n|aa^\dagger|n\rangle = |c_n|^2 \tag{A.22}$$

となる。左辺は，

$$\langle n|aa^\dagger|n\rangle = \langle n|(N+1)|n\rangle = n+1 \tag{A.23}$$

となるので，

$$c_n = \sqrt{n+1} \tag{A.24}$$

を得る。ただし，位相は c_n が正の実数になるように選んだ。これを (A.21) に代入して，

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \tag{A.25}$$
$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}a^\dagger|n-1\rangle \tag{A.26}$$

が分かる。この第 2 式をくり返し用いて，

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle \tag{A.27}$$

を得る。

A.2　生成・消滅演算子の導入

実クライン・ゴルドン場の場合，(2.4) の一般解は,

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{k},\omega) \;=\; q_1(\boldsymbol{k})e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t}\delta\big(\omega-\omega(\boldsymbol{k})\big)+q_2(\boldsymbol{k})e^{i\omega(\boldsymbol{k})t}\delta\big(\omega+\omega(\boldsymbol{k})\big) \tag{A.28}$$

となる。これを (2.3) に代入して

$$\varphi(x) \;=\; \int d^3k\,\tilde{\varphi}_{\boldsymbol{k}}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{A.29}$$

$$\tilde{\varphi}_{\boldsymbol{k}}(t) \;\equiv\; q_1(\boldsymbol{k})e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t}+q_2(\boldsymbol{k})e^{i\omega(\boldsymbol{k})t} \tag{A.30}$$

を得る。(A.29) を $\tilde{\varphi}_{\boldsymbol{k}}(t)$ について解くと,

$$\tilde{\varphi}_{\boldsymbol{k}}(t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\,\varphi(x)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{A.31}$$

である。$\varphi^\dagger(x)=\varphi(x)$ より,

$$\tilde{\varphi}^\dagger_{\boldsymbol{k}}(t)=\tilde{\varphi}_{-\boldsymbol{k}}(t) \tag{A.32}$$

となり，(A.30) を代入して,

$$\begin{aligned} q_1^\dagger(\boldsymbol{k})e^{i\omega(\boldsymbol{k})t}+q_2^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t} \;&=\; q_1(-\boldsymbol{k})e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t}+q_2(-\boldsymbol{k})e^{i\omega(\boldsymbol{k})t}, \\ q_2(-\boldsymbol{k}) \;&=\; q_1^\dagger(\boldsymbol{k}) \end{aligned} \tag{A.33}$$

を得る。よって，(A.29) は,

$$\begin{aligned} \varphi(x) \;&=\; \int d^3k\left[q_1(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k})t)}+q_1^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k})t)}\right] \\ &\equiv\; \varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x), \end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\varphi^{(+)}(x) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \int d^3k\,q_1(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k})t)}, \tag{A.35}$$

$$\varphi^{(-)}(x) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \int d^3k\,q_1^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k})t)} \tag{A.36}$$

$$\;=\; \varphi^{(+)}(x)^\dagger \tag{A.37}$$

となる。

実クライン・ゴルドン場 $\varphi(x)$ のラグランジアン密度は,

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi-\frac{\kappa^2}{2}\varphi^2 \tag{A.38}$$

である。よって，$\varphi(x)$ の正準共役場 $\pi(x)$ は,

$$\begin{aligned} \pi \;&=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \\ &=\; \frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2-\cdots) \\ &=\; \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{A.39}$$

である。これは,

$$[\varphi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x}',t)] \;=\; i\hbar\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{A.40}$$

を満たす[12)]。

$\mathcal{L}$ の次元は，EL^{-3} であるから，

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{L}] &= [\dot{\varphi}]^2 = EL^{-3}, && \text{(A.41)}\\
[\dot{\varphi}] &= E^{1/2}L^{-3/2}, && \text{(A.42)}\\
[\varphi] &= E^{1/2}L^{-3/2+1}, && \text{(A.43)}\\
[q_1(\boldsymbol{k})] &= E^{1/2}L^{3/2+1} = E^{1/2}L\cdot L^{3/2} && \text{(A.44)}
\end{aligned}
$$

が分かる。今，$L^{3/2}$ の次元の量 $a(\boldsymbol{k})$ を導入すると，$q_1(\boldsymbol{k})$ は，

$$
q_1(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\boldsymbol{k})}}a(\boldsymbol{k}) \tag{A.45}
$$

と書ける。ただし，

$$
\begin{aligned}
[\omega(\boldsymbol{k})] &= L^{-1}, && \text{(A.46)}\\
[\hbar] &= EL, && \text{(A.47)}\\
\left[\sqrt{\frac{\hbar}{\omega(\boldsymbol{k})}}\right] &= E^{1/2}L && \text{(A.48)}
\end{aligned}
$$

を用いた。また，係数は都合が良いように導入した。(A.45) を (A.35)，(A.36) に代入して，

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x), && \text{(A.49)}\\
\varphi^{(+)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\boldsymbol{k})}}a(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k})t)}, && \text{(A.50)}\\
\varphi^{(-)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\boldsymbol{k})}}a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k})t)} && \text{(A.51)}\\
&= \varphi^{(+)}(x)^\dagger && \text{(A.52)}
\end{aligned}
$$

を得る。これが (2.9)-(2.12) である。また，$\pi = \dot{\varphi}$ に，(A.49)，(A.50)，(A.51) を代入して，

$$
\begin{aligned}
\pi(x) &= \dot{\varphi}(x)\\
&= \pi^{(+)}(x) + \pi^{(-)}(x), && \text{(A.53)}\\
\pi^{(+)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\sqrt{\frac{\hbar\omega(\boldsymbol{k})}{2}}a(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k})t)}, && \text{(A.54)}\\
\pi^{(-)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\sqrt{\frac{\hbar\omega(\boldsymbol{k})}{2}}a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(\boldsymbol{k})t)} && \text{(A.55)}\\
&= \pi^{(+)}(x)^\dagger && \text{(A.56)}
\end{aligned}
$$

を得る。

[12)] この節では，$\hbar$ を復活させる。

(A.40) に (A.49)，(A.52)，(A.53)，(A.56) を代入して，

$$
\begin{aligned}
& [\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t)+\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t)^\dagger,\pi^{(+)}(\boldsymbol{x}',t)+\pi^{(+)}(\boldsymbol{x}',t)^\dagger] \\
=\ & [\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t),\pi^{(+)}(\boldsymbol{x}',t)]+[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t),\pi^{(+)}(\boldsymbol{x}',t)^\dagger] \\
& +[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t)^\dagger,\pi^{(+)}(\boldsymbol{x}',t)]+[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t)^\dagger,\pi^{(+)}(\boldsymbol{x}',t)^\dagger] \\
=\ & [\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t),\pi^{(+)}(\boldsymbol{x}',t)]+[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t),\pi^{(-)}(\boldsymbol{x}',t)] \\
& -[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t),\pi^{(-)}(\boldsymbol{x}',t)]^\dagger-[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t),\pi^{(+)}(\boldsymbol{x}',t)]^\dagger \\
=\ & i\hbar\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')
\end{aligned}
\tag{A.57}
$$

を得る。ただし，第 2 等号で $\pi^{(+)}(\boldsymbol{x}',t)^\dagger$ を一部 $\pi^{(-)}(\boldsymbol{x}',t)$ と記した。今，a は自分自身と可換であること

$$
[a(\boldsymbol{k}),a(\boldsymbol{k}')]=0 \tag{A.58}
$$

を要請する。これより，

$$
[\varphi^{(+)}(x),\pi^{(+)}(x')]=0 \tag{A.59}
$$

である。これを (A.57) に代入して，

$$
[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t),\pi^{(-)}(\boldsymbol{x}',t)]-[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t),\pi^{(-)}(\boldsymbol{x}',t)]^\dagger \;=\; i\hbar\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{A.60}
$$

を得る。

$[a(\boldsymbol{k}),a^\dagger(\boldsymbol{k}')]$ は，(A.60) から以下のように求められる。今，

$$
[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t),\pi^{(-)}(\boldsymbol{x}',t)] \;=\; i\mu\hbar\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')+\Delta \tag{A.61}
$$

と置くと，(A.60) より，

$$
\begin{aligned}
i\hbar(\mu+\mu^*)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')+\Delta-\Delta^* \;&=\; i\hbar\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \\
\mu+\mu^* \;&=\; 1, \qquad\qquad (A.62)\\
\Delta-\Delta^* \;&=\; 0 \qquad\qquad (A.63)
\end{aligned}
$$

を得る。さらに，$\hbar\to 0$ の極限で (A.61) の右辺が 0 になることを要請すると，

$$
[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},t),\pi^{(-)}(\boldsymbol{x}',t)] \;=\; i\mu\hbar\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\quad \mathrm{Re}\,\mu=\frac{1}{2} \tag{A.64}
$$

となる。

(A.50)，(A.55) より，

$$
\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3x\,\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},0)e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{k}} \;=\; \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\boldsymbol{k})}}a(\boldsymbol{k}) \tag{A.65}
$$

$$
\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3x\,\pi^{(-)}(\boldsymbol{x},0)e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{k}} \;=\; i\sqrt{\frac{\hbar\omega(\boldsymbol{k})}{2}}a^\dagger(\boldsymbol{k}) \tag{A.66}
$$

である。これより，

$$
\begin{aligned}
&\Big[\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\boldsymbol{k})}}a(\boldsymbol{k}), i\sqrt{\frac{\hbar\omega(\boldsymbol{k}')}{2}}a^\dagger(\boldsymbol{k}')\Big]\\
&= \int d^3xd^3x'\,[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{x},0),\pi^{(-)}(\boldsymbol{x}',0)]e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{k}+i\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{k}'}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3xd^3x'\,i\mu\hbar\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{k}+i\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{k}'}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\,i\mu\hbar e^{-i\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')}\\
&= i\mu\hbar\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \qquad \text{(A.67)}
\end{aligned}
$$

である。ただし，第 2 等号で (A.64) を代入した。最右辺と最左辺とが等しいので，

$$
\begin{aligned}
\frac{i\hbar}{2}\sqrt{\frac{\omega(\boldsymbol{k}')}{\omega(\boldsymbol{k})}}[a(\boldsymbol{k}),a^\dagger(\boldsymbol{k}')] &= i\mu\hbar\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),\\
[a(\boldsymbol{k}),a^\dagger(\boldsymbol{k}')] &= 2\mu\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \qquad \text{(A.68)}
\end{aligned}
$$

を得る（ただし，第 2 等号で，

$$
\sqrt{\frac{\omega(\boldsymbol{k}')}{\omega(\boldsymbol{k})}}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') = \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')
$$

を用いた）。(A.68) の † をとって，

$$
\begin{aligned}
[a(\boldsymbol{k}'),a^\dagger(\boldsymbol{k})] &= 2\mu^*\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\\
&= 2\mu^*\delta^3(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}), \qquad \text{(A.69)}\\
[a(\boldsymbol{k}),a^\dagger(\boldsymbol{k}')] &= 2\mu^*\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \qquad \text{(A.70)}
\end{aligned}
$$

を得る。これと (A.68) とを比べて，

$$
\mu^* = \mu \qquad \text{(A.71)}
$$

を得る。これと (A.62)，すなわち $\mathrm{Re}\,\mu = \frac{1}{2}$ より，

$$
\mu = \frac{1}{2} \qquad \text{(A.72)}
$$

となり，(A.68) は，

$$
[a(\boldsymbol{k}),a^\dagger(\boldsymbol{k}')] = \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \qquad \text{(A.73)}
$$

となる。

A.3 Bogoliubov 変換

(1.19)，(1.34) は

$$
\alpha(\theta) = e^{iG(\theta)}\alpha e^{-iG(\theta)} \qquad \text{(A.74)}
$$

の形に書ける。ただし，

$$\alpha = a_i, b_i\,,\ \ a(\boldsymbol{k}), b(\boldsymbol{k}), \tag{A.75}$$

$$\alpha(\theta) = a_i(\theta), b_i(\theta)\,,\ \ a_\theta(\boldsymbol{k}), b_\theta(\boldsymbol{k}) \tag{A.76}$$

であり，

$$iG(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i (b_i^\dagger a_i^\dagger - a_i b_i)\,,\ \ \int d^3k\, \theta(\boldsymbol{k})[b^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) - a(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})] \tag{A.77}$$

である。(A.74) の θ を $x\theta$ に置き換えたものを x で微分すると，

$$\frac{d}{dx}\alpha(x\theta) = e^{iG(x\theta)}[iG(\theta), \alpha]e^{-iG(x\theta)} \tag{A.78}$$

を得る。$\alpha = a_i$，b_i の場合，$[iG(\theta), \alpha]$ は

$$\begin{aligned}
[\sum_{j=1}^{N} \theta_j (b_j^\dagger a_j^\dagger - a_j b_j), a_i] &= \sum_{j=1}^{N} \theta_j b_j^\dagger [a_j^\dagger, a_i] \\
&= \sum_{j=1}^{N} \theta_j b_j^\dagger (-\delta_{ij}) \\
&= -\theta_i b_i^\dagger,
\end{aligned} \tag{A.79}$$

$$\begin{aligned}
[\sum_{j=1}^{N} \theta_j (b_j^\dagger a_j^\dagger - a_j b_j), b_i] &= \sum_{j=1}^{N} \theta_j b_j^\dagger [b_j^\dagger, b_i] a_j^\dagger \\
&= \sum_{j=1}^{N} \theta_j (-\delta_{ij}) a_j^\dagger \\
&= -\theta_i a_i^\dagger
\end{aligned} \tag{A.80}$$

となる。ただし，正準交換関係 (1.6) を用いた。この 2 式を (A.78) に代入して，

$$\frac{d}{dx}a_i(x\theta) = -\theta_i b_i^\dagger(x\theta), \tag{A.81}$$

$$\frac{d}{dx}b_i(x\theta) = -\theta_i a_i^\dagger(x\theta) \tag{A.82}$$

を得る。$\alpha = a(\boldsymbol{k})$，$b(\boldsymbol{k})$ の場合，$[iG(\theta), \alpha]$ は

$$\begin{aligned}
\Big[\int d^3k'\, \theta(\boldsymbol{k}')[b^\dagger(\boldsymbol{k}')a^\dagger(\boldsymbol{k}') - a(\boldsymbol{k}')b(\boldsymbol{k}')], a(\boldsymbol{k})\Big] &= \int d^3k'\, \theta(\boldsymbol{k}')b^\dagger(\boldsymbol{k}')[a^\dagger(\boldsymbol{k}'), a(\boldsymbol{k})] \\
&= \int d^3k'\, \theta(\boldsymbol{k}')b^\dagger(\boldsymbol{k}')[-\delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')] \\
&= -\theta(\boldsymbol{k})b^\dagger(\boldsymbol{k}),
\end{aligned} \tag{A.83}$$

$$\begin{aligned}
\Big[\int d^3k'\, \theta(\boldsymbol{k}')[b^\dagger(\boldsymbol{k}')a^\dagger(\boldsymbol{k}') - a(\boldsymbol{k}')b(\boldsymbol{k}')], b(\boldsymbol{k})\Big] &= \int d^3k'\, \theta(\boldsymbol{k}')[b^\dagger(\boldsymbol{k}'), b(\boldsymbol{k})]a^\dagger(\boldsymbol{k}') \\
&= \int d^3k'\, \theta(\boldsymbol{k}')[-\delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')]a^\dagger(\boldsymbol{k}') \\
&= -\theta(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})
\end{aligned} \tag{A.84}$$

となる。ただし，交換関係 (1.32) を用いた。この 2 式を (A.78) に代入して，

$$\frac{d}{dx}a_{x\theta}(\boldsymbol{k}) = -\theta(\boldsymbol{k})b^\dagger_{x\theta}(\boldsymbol{k}), \tag{A.85}$$
$$\frac{d}{dx}b_{x\theta}(\boldsymbol{k}) = -\theta(\boldsymbol{k})a^\dagger_{x\theta}(\boldsymbol{k}) \tag{A.86}$$

を得る。

今，

$$a = a_i, a(\boldsymbol{k}), \quad b = b_i, b(\boldsymbol{k}), \tag{A.87}$$
$$a(\theta) = a_i(\theta), a_\theta(\boldsymbol{k}), \quad b(\theta) = b_i(\theta), b_\theta(\boldsymbol{k}), \tag{A.88}$$
$$\theta = \theta_i, \theta(\boldsymbol{k}) \tag{A.89}$$

とすると，(A.81)，(A.82) および (A.85)，(A.86) は，まとめて

$$\frac{d}{dx}a(x\theta) = -\theta b^\dagger(x\theta), \tag{A.90}$$
$$\frac{d}{dx}b(x\theta) = -\theta a^\dagger(x\theta) \tag{A.91}$$

と書ける。この 2 式の † より

$$\frac{d}{dx}a^\dagger(x\theta) = -\theta b(x\theta), \tag{A.92}$$
$$\frac{d}{dx}b^\dagger(x\theta) = -\theta a(x\theta) \tag{A.93}$$

を得る。これらを初期条件

$$a^\dagger(0) = a^\dagger, \quad b^\dagger(0) = b^\dagger, \quad a(0) = a, \quad b(0) = b \tag{A.94}$$

の下で解く。(A.90)，(A.93) は，

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a(x\theta) \\ b^\dagger(x\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(x\theta) \\ b^\dagger(x\theta) \end{pmatrix} \tag{A.95}$$

と書ける。(A.91)，(A.92) はこの式の † に対応する。この式を $x = 0$ から $x = 1$ まで積分し，初期条件 (A.94) を用いると，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a(\theta) \\ b^\dagger(\theta) \end{pmatrix} &= \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a \\ b^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \cosh\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b^\dagger \end{pmatrix} - \sinh\theta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\cosh\theta - b^\dagger\sinh\theta \\ b^\dagger\cosh\theta - a\sinh\theta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.96}$$

を得る。この第 1 成分が (1.21) または (1.36) であり，第 2 成分の † が (1.22) または (1.37) である。

A.4　(1.30)，(1.42) の導出

正準交換関係

$$[a, a^\dagger] = 1\,, \quad [b, b^\dagger] = 1 \tag{A.97}$$

を満たす（これ以外の交換関係は 0 である）生成・消滅演算子に対して，

$$S_+ \stackrel{\mathrm{def}}{=} b^\dagger a^\dagger\,, \quad S_- \stackrel{\mathrm{def}}{=} ab\,, \quad S_z \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}(aa^\dagger + b^\dagger b) \tag{A.98}$$

を定義する。これらの交換関係は

$$\begin{aligned}
[S_-, S_+] &= [ab, b^\dagger a^\dagger] \\
&= [ab, b^\dagger]a^\dagger + b^\dagger[ab, a^\dagger] \\
&= aa^\dagger + b^\dagger b \\
&= 2S_z, && \text{(A.99)} \\
[S_-, S_z] &= \frac{1}{2}[ab, aa^\dagger + b^\dagger b] \\
&= \frac{1}{2}(a[a, a^\dagger]b + a[b, b^\dagger]b) \\
&= \frac{1}{2}(ab + ab) \\
&= S_-, && \text{(A.100)} \\
[S_+, S_z] &= -S_+ && \text{(A.101)}
\end{aligned}$$

である。最後の式は，2 つ目の式の $\dagger$ をとって，$S_-^\dagger = S_+$，$S_z^\dagger = S_z$ を用いれば得られる。

今，

$$\begin{aligned}
U(x) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{x(b^\dagger a^\dagger - ab)} = e^{x(S_+ - S_-)} && \text{(A.102)} \\
&\equiv e^{f(x)S_+}F(x) && \text{(A.103)}
\end{aligned}$$

を導入する。ただし，

$$F(0) = 1\,, \quad f(0) = 0 \tag{A.104}$$

であり，$f(x)$ は c 数とする。(A.103) を x で微分して，

$$(S_+ - S_-)U(x) = f'(x)S_+e^{f(x)S_+}F(x) + e^{f(x)S_+}F'(x) \tag{A.105}$$

を得る。ただし，

$$' \equiv \frac{d}{dx}$$

である。(A.105) の $U(x)$ に (A.103) を代入した後，$F'(x)$ について解くと

$$F'(x) = \left[\{1 - f'(x)\}S_+ - e^{-f(x)S_+}S_-e^{f(x)S_+}\right]F(x) \tag{A.106}$$

となる。

今，

$$t_\alpha(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{-f(x)S_+}S_\alpha e^{f(x)S_+} \qquad (\alpha = +, -, z) \tag{A.107}$$

とすると，

$$\begin{aligned} t_-'(x) &= -e^{-f(x)S_+}f'(x)S_+S_-e^{f(x)S_+} + e^{-f(x)S_+}S_-f'(x)S_+e^{f(x)S_+} \\ &= f'(x)e^{-f(x)S_+}[S_-, S_+]e^{f(x)S_+} \\ &= f'(x)e^{-f(x)S_+}2S_ze^{f(x)S_+} \\ &\equiv 2f'(x)t_z(x) \end{aligned} \tag{A.108}$$

である。ただし，第 3 等号で (A.99) を用いた。また，

$$\begin{aligned} t_z'(x) &= f'(x)e^{-f(x)S_+}[S_z, S_+]e^{f(x)S_+} \\ &= f'(x)e^{-f(x)S_+}S_+e^{f(x)S_+} \\ &= f'(x)S_+ \end{aligned} \tag{A.109}$$

である。第 2 等号で (A.101) を用いた。ところで，(A.104)，(A.107) より

$$t_-(0) = S_-\,, \quad t_z(0) = S_z \tag{A.110}$$

である。(A.109) をこの初期条件の下で解くと，

$$t_z(x) = S_z + f(x)S_+ \tag{A.111}$$

となる。これを (A.108) に代入して

$$\begin{aligned} t_-'(x) &= 2f'(x)[S_z + f(x)S_+] \\ &= \frac{d}{dx}[2f(x)S_z + f^2(x)S_+] \end{aligned} \tag{A.112}$$

を得る。これを初期条件 (A.110) の下で解いて，

$$t_-(x) = S_- + 2f(x)S_z + f^2(x)S_+ \tag{A.113}$$

を得る。

(A.113) を (A.106) に代入して

$$F'(x) = \big[\{1 - f'(x) - f^2(x)\}S_+ - 2f(x)S_z - S_-\big]F(x) \tag{A.114}$$

を得る。今，$f(x)$ に条件

$$1 - f'(x) - f^2(x) = 0 \tag{A.115}$$

を課す。このとき，(A.114) は

$$F'(x) = \big[-2f(x)S_z - S_-\big]F(x) \tag{A.116}$$

となる。(A.115) は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{df} &= \frac{1}{1 - f^2(x)}, \\ \int_0^x dx' &= \int_{f(0)}^{f(x)} \frac{df}{1 - f^2} \end{aligned} \tag{A.117}$$

と変形できる。(**??**) より，これは

$$\begin{aligned} x &= \tanh^{-1} f(x) - \tanh^{-1} f(0) \\ &= \tanh^{-1} f(x), \end{aligned} \tag{A.118}$$

$$f(x) = \tanh x \tag{A.119}$$

となる。ただし，(A.104) を代入した。これを (A.116) に代入して

$$F'(x) = \big[-2S_z \tanh x - S_-\big]F(x) \tag{A.120}$$

を得る。

今，

$$F(x) = e^{g(x)S_z}G(x), \tag{A.121}$$

$$g(0) = 0, \quad G(0) = F(0) = 1 \tag{A.122}$$

によって c 数 $g(x)$ と演算子 $G(x)$ を導入する。(A.121) を微分し，(A.120) を代入すると，

$$\big[-2S_z \tanh x - S_-\big]F(x) = g'(x)S_z e^{g(x)S_z}G(x) + e^{g(x)S_z}G'(x) \tag{A.123}$$

となる。左辺の $F(x)$ に (A.121) を代入した後，$G'(x)$ について解いて

$$G'(x) = [\{-2\tanh x - g'(x)\}S_z - e^{-g(x)S_z}S_-e^{g(x)S_z}]G(x) \tag{A.124}$$

を得る。今，

$$u_-(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-g(x)S_z}S_-e^{g(x)S_z} \tag{A.125}$$

を導入すると，

$$\begin{aligned} u'_-(x) &= g'(x)e^{-g(x)S_z}[S_-, S_z]e^{g(x)S_z} \\ &= g'(x)e^{-g(x)S_z}S_-e^{g(x)S_z} \\ &= g'(x)u_-(x) \end{aligned} \tag{A.126}$$

である。ただし，第 2 等号で，(A.100) を用いた。これを初期条件

$$u_-(0) = S_- \tag{A.127}$$

の下で解くと，

$$u_-(x) = e^{g(x)}S_- \tag{A.128}$$

を得る。これを (A.124) に代入して，

$$G'(x) = [\{-2\tanh x - g'(x)\}S_z - e^{g(x)S_-}]G(x) \tag{A.129}$$

を得る。今，$G(x)$ に S_z が含まれないように，$g(x)$ を

$$-2\tanh x - g'(x) = 0 \tag{A.130}$$

を満たすように選ぶ。これを (A.122) の下で解いて

$$g(x) = -2\ln\cosh x \tag{A.131}$$

を得る。これを (A.129) に代入して

$$G'(x) = -\frac{1}{\cosh^2 x}S_- G(x) \tag{A.132}$$

を得る。これを (A.122) の下で解いて

$$G(x) = e^{-S_- \tanh x} \tag{A.133}$$

を得る。(A.103) に (A.119)，(A.121)，(A.131)，(A.133) を代入して

$$\begin{aligned} U(x) &= e^{f(x)S_+}e^{g(x)S_z}G(x) \\ &= e^{S_+ \tanh x}e^{-2S_z \ln\cosh x}e^{-S_- \tanh x} \end{aligned} \tag{A.134}$$

を得る。$U(x)$ の定義 (A.102) と (A.98) を思い出すと，この式は

$$e^{\theta(b^\dagger a^\dagger - ab)} = e^{a^\dagger b^\dagger \tanh\theta}e^{-(aa^\dagger + b^\dagger b)\ln\cosh\theta}e^{-ab\tanh\theta} \tag{A.135}$$

となる。

ユニタリー演算子 (1.20) は，(A.135) と交換関係 (1.6) より，

$$e^{\sum_i \theta_i(b_i^\dagger a_i^\dagger - a_i b_i)} = e^{\sum_i a_i^\dagger b_i^\dagger \tanh\theta_i}e^{-\sum_i(a_i a_i^\dagger + b_i^\dagger b_i)\ln\cosh\theta_i}e^{-\sum_i a_i b_i \tanh\theta_i} \tag{A.136}$$

となる。また，ユニタリー演算子 (1.35) については，(A.136) とのアナロジーから

$$\begin{aligned} &\exp\Big(\int d^3k\,\theta(\boldsymbol{k})[b^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) - a(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})]\Big) \\ =\ &\exp\Big(\int d^3k\,a^\dagger(\boldsymbol{k})b^\dagger(\boldsymbol{k})\tanh\theta(\boldsymbol{k})\Big)\exp\Big(-\int d^3k\,[a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) + b^\dagger(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})]\ln\cosh\theta(\boldsymbol{k})\Big) \\ \times\ &\exp\Big(-\int d^3k\,a(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})\tanh\theta(\boldsymbol{k})\Big) \end{aligned} \tag{A.137}$$

となることが分かる。

A.5 (2.68) の導出

(2.68) の左辺の第 1 項に (2.67)，(2.66) を代入すると，

$$\begin{aligned} \int d^3x\,f(x)\partial_t\varphi(x) &= \int d^3x\int d^3k\int d^3k'\,\frac{\tilde{f}(\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega(\boldsymbol{k})t}\frac{1}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k}')}} \\ &\quad\times\partial_t[a(\boldsymbol{k}')e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}-i\omega(\boldsymbol{k}')t} + a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}+i\omega(\boldsymbol{k}')t}] \\ &= \int d^3x\int d^3k\int d^3k'\,\frac{\tilde{f}(\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega(\boldsymbol{k})t}\frac{1}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k}')}} \\ &\quad\times[-i\omega(\boldsymbol{k}')a(\boldsymbol{k}')e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}-i\omega(\boldsymbol{k}')t} + i\omega(\boldsymbol{k}')a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}+i\omega(\boldsymbol{k}')t}] \end{aligned} \tag{A.138}$$

となる。同様にして，左辺の第 2 項は

$$\begin{aligned} -\int d^3x\,\partial_t f(x)\varphi(x) &= -\int d^3x\int d^3k\int d^3k'\,\frac{\tilde{f}(\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3}i\omega(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega(\boldsymbol{k})t}\frac{1}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k}')}} \\ &\quad\times[a(\boldsymbol{k}')e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}-i\omega(\boldsymbol{k}')t} + a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}+i\omega(\boldsymbol{k}')t}] \end{aligned} \tag{A.139}$$

となる。よって，(2.68) の左辺は，

$$
\begin{aligned}
&\int d^3x \left[f(x)\partial_t\varphi(x) - \partial_t f(x)\varphi(x)\right] \\
&= \int d^3x \int d^3k \int d^3k' \, \frac{\tilde{f}(\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega(\boldsymbol{k})t} \frac{-i\omega(\boldsymbol{k}) - i\omega(\boldsymbol{k}')}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k}')}} a(\boldsymbol{k}') e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}-i\omega(\boldsymbol{k}')t} \\
&\quad + \int d^3x \int d^3k \int d^3k' \, \frac{\tilde{f}(\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega(\boldsymbol{k})t} \frac{-i\omega(\boldsymbol{k}) + i\omega(\boldsymbol{k}')}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k}')}} a^\dagger(\boldsymbol{k}') e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}+i\omega(\boldsymbol{k}')t} \\
&= \int d^3k \int d^3k' \, \frac{\tilde{f}(\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3} e^{i\omega(\boldsymbol{k})t} \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \frac{-i\omega(\boldsymbol{k}) - i\omega(\boldsymbol{k}')}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k}')}} a(\boldsymbol{k}') e^{-i\omega(\boldsymbol{k}')t} \\
&\quad + \int d^3k \int d^3k' \, \frac{\tilde{f}(\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3} e^{i\omega(\boldsymbol{k})t} \delta^3(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}') \frac{-i\omega(\boldsymbol{k}) + i\omega(\boldsymbol{k}')}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k}')}} a^\dagger(\boldsymbol{k}') e^{+i\omega(\boldsymbol{k}')t} \\
&= \int d^3k \, \tilde{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\omega(\boldsymbol{k})t} \frac{-i\omega(\boldsymbol{k}) - i\omega(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}} a(\boldsymbol{k}) e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t} + \int d^3k \, \tilde{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\omega(\boldsymbol{k})t} \frac{-i\omega(\boldsymbol{k}) + i\omega(-\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\omega(-\boldsymbol{k})}} a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{+i\omega(\boldsymbol{k})t} \\
&= -i \int d^3k \, \sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})} \tilde{f}(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t} \qquad \text{(A.140)}
\end{aligned}
$$

となる。これが (2.68) である。ただし，第 2 等号で

$$
\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \, e^{\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} \pm i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}} = \delta^3(\mp\boldsymbol{k} \mp \boldsymbol{k}') \qquad \text{(A.141)}
$$

を用い，第 4 等号で $\omega(-\boldsymbol{k}) = \omega(\boldsymbol{k})$ を用いた。

A.6 (2.93) の導出

$U(x)$ を

$$
e^{x(A+B)} = U(x) e^{xB} \qquad \text{(A.142)}
$$

で定義する。ただし，x は実数パラメーターである。これを x で微分すると，

$$
e^{x(A+B)}(A + B) = U'(x) e^{xB} + U(x) e^{xB} B \qquad \text{(A.143)}
$$

となる。ここで，

$$
' \equiv \frac{d}{dx}
$$

である。(A.143) に (A.142) を代入して，

$$
\begin{aligned}
U(x)e^{xB}(A + B) &= U'(x)e^{xB} + U(x)e^{xB}B, \\
U(x)e^{xB}A &= U'(x)e^{xB}, \\
U'(x) &= U(x)e^{xB}Ae^{-xB} \\
&\equiv U(x)f(x) \qquad \text{(A.144)}
\end{aligned}
$$

を得る。ただし，

$$
f(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{xB}Ae^{-xB} \qquad \text{(A.145)}
$$

である。(A.144) を積分して

$$U(x) = U(0) + \int_0^x dy_1\, U(y_1) f(y_1) \tag{A.146}$$

を得る。(A.142) より

$$U(0) = 1 \tag{A.147}$$

である。(A.146) の右辺の $U(y_1)$ に (A.146) の右辺全体を代入し，この操作を繰り返して，

$$\begin{aligned} U(x) &= 1 + \int_0^x dy_1\, U(y_1) f(y_1) \\ &= 1 + \int_0^x dy_1\, f(y_1) + \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2\, U(y_2) f(y_2) f(y_1) \\ &= 1 + \int_0^x dy_1\, f(y_1) + \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2\, f(y_2) f(y_1) + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \cdots \int_0^{y_{n-1}} dy_n\, f(y_n) f(y_{n-1}) \cdots f(y_1) \end{aligned} \tag{A.148}$$

を得る。

$f(x)$ を求める。(A.145) を x で微分して，

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{xB} B A e^{-xB} - e^{xB} A B e^{-xB} \\ &= e^{xB} [B, A] e^{-xB} \end{aligned} \tag{A.149}$$

を得る。さらに，x で微分して，

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{xB} B [B, A] e^{-xB} - e^{xB} [B, A] B e^{-xB} \\ &= e^{xB} \big[B, [B, A]\big] e^{-xB} \end{aligned} \tag{A.150}$$

となる。もし，

$$\big[B, [B, A]\big] = 0 \tag{A.151}$$

であるなら，

$$f''(x) = 0 \tag{A.152}$$

となる。また，(A.145)，(A.149) より，

$$f(0) = A, \tag{A.153}$$

$$f'(0) = [B, A] \tag{A.154}$$

である。この初期条件の下で (A.152) を解いて，

$$f(x) = A - [A, B] x \qquad \text{for} \quad \big[B, [B, A]\big] = 0 \tag{A.155}$$

を得る。これは，

$$f(x) = \frac{dg(x)}{dx}, \tag{A.156}$$

$$g(x) = Ax - \frac{1}{2}[A, B] x^2 \tag{A.157}$$

とも書ける。$g(0)$ は，

$$g(0) \;=\; 0 \tag{A.158}$$

である。(A.156) を (A.148) に代入して，

$$\begin{aligned}
U(x) \;&=\; 1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x dy_1\cdots\int_0^{y_{n-1}} dy_n\,\frac{dg(y_n)}{dy_n}\cdots\frac{dg(y_1)}{dy_1} \\
&=\; 1+\int_0^x dy_1\frac{dg(y_1)}{dy_1}+\int_0^x dy_1\int_0^{y_1} dy_2\,\frac{dg(y_2)}{dy_2}\frac{dg(y_1)}{dy_1}+\cdots \\
&=\; 1+g(x)+\int_0^x g(y_1)\frac{dg(y_1)}{dy_1}+\int_0^x dy_1\int_0^{y_1} dy_2\,g(y_2)\frac{dg(y_2)}{dy_2}\frac{dg(y_1)}{dy_1}+\cdots
\end{aligned} \tag{A.159}$$

を得る。

今，a，b を，互いに可換

$$[a,b]=0 \tag{A.160}$$

な演算子として，

$$h(x)=\alpha(x)a+\beta(x)b \tag{A.161}$$

を定義する。(A.160) のために，

$$h^n(x)=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\alpha^r(x)\beta^{n-r}(x)a^rb^{n-r} \tag{A.162}$$

となる。このとき，

$$\frac{d}{dx}h^n(x)=nh^{n-1}(x)\frac{dh(x)}{dx}=n\frac{dh(x)}{dx}h^{n-1}(x) \tag{A.163}$$

となることは，c 数関数のときと同様に示せる。今，

$$a \;=\; A, \quad b=[A,B] \tag{A.164}$$

選ぶと，もしも，

$$\big[A,[A,B]\big]=0 \tag{A.165}$$

であるなら，(A.160) が成立し，したがって (A.163) が成り立つ。よって，(A.165) のとき，

$$\begin{aligned}
g(y_1)\frac{dg(y_1)}{dy_1} \;&=\; \frac{d}{dy_1}[\frac{1}{2}g(y_1)], \\
\int_0^x dy_1\int_0^{y_1} dy_2\,g(y_2)\frac{dg(y_2)}{dy_2}\frac{dg(y_1)}{dy_1} \;&=\; \int_0^x dy_1\int_0^{y_1} dy_2\,\frac{d}{dy_2}[\frac{1}{2}g^2(y_2)]\frac{dg(y_1)}{dy_1} \\
&=\; \int_0^x dy_1\,\frac{1}{2}g^2(y_1)\frac{dg(y_1)}{dy_1} \\
&=\; \frac{1}{3!}g^3(x)
\end{aligned} \tag{A.166}$$

などが成立し，したがって (A.159) は，

$$\begin{aligned}
U(x) \;&=\; 1+g(x)+\frac{1}{2!}g^2(x)+\frac{1}{3!}g^3(x)+\cdots \\
&=\; \exp\big(g(x)\big)
\end{aligned} \tag{A.167}$$

となる。これを (A.142) に代入して，

$$
\begin{aligned}
e^{x(A+B)} &= \exp(Ax - \frac{1}{2}[A,B]x^2)e^{xB} \\
&= \exp\bigl(-\frac{1}{2}[A,B]x^2\bigr)e^{xA}e^{xB}
\end{aligned}
\tag{A.168}
$$

を得る。ただし，第 2 等号で再び (A.165) を用いた。この式で $x=1$ として，

$$
e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^Ae^B \qquad \text{for} \quad \bigl[A,[A,B]\bigr] = \bigl[B,[A,B]\bigr] = 0 \tag{A.169}
$$

を得る。

(2.88) は

$$
|0(f)\rangle = \exp\Bigl(\int d^3k\,\bigl[f(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) - f^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})\bigr]\Bigr)|0\rangle \tag{A.170}
$$

である。公式 (A.169) において，

$$
A = \int d^3k\,f(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}), \quad B = -\int d^3k\,f^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})
$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
[A,B] &= -\int d^3kd^3k'\,f(\boldsymbol{k})f^*(\boldsymbol{k}')[a^\dagger(\boldsymbol{k}),a(\boldsymbol{k}')] \\
&= \int d^3kd^3k'\,f(\boldsymbol{k})f^*(\boldsymbol{k}')\delta^3(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}) \\
&= \int d^3k\,|f(\boldsymbol{k})|^2
\end{aligned}
\tag{A.171}
$$

である。よって，(A.170) は，

$$
\begin{aligned}
|0(f)\rangle &= \exp\Bigl(-\frac{1}{2}\int d^3k\,|f(\boldsymbol{k})|^2\Bigr)\exp\Bigl(\int d^3k\,f(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})\Bigr)\exp\Bigl(-\int d^3k\,f^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})\Bigr)|0\rangle \\
&= \exp\Bigl(-\frac{1}{2}\int d^3k\,|f(\boldsymbol{k})|^2\Bigr)\exp\Bigl(\int d^3k\,f(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})\Bigr)|0\rangle
\end{aligned}
\tag{A.172}
$$

となる。ただし，第 2 等号で，(2.14) を用いた。

A.7 §1.2.2，§2.3.1 へのコメント

§1.2.2 の議論は，次のことを意味する。$\{f_i(\boldsymbol{k})\}_{i=1}^{\infty}$ を 2 乗可積分の任意の規格直交完全系とし，

$$
a_i \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3k\,f_i(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}), \quad b_i \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3k\,f_i(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k}), \tag{A.173}
$$

$$
a_i(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3k\,f_i(\boldsymbol{k})a_\theta(\boldsymbol{k}), \quad b_i(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3k\,f_i(\boldsymbol{k})b_\theta(\boldsymbol{k}) \tag{A.174}
$$

を定義する。ただし，$a_\theta(\boldsymbol{k})$，$b_\theta(\boldsymbol{k})$ は (1.34) で定義される。(1.33)，(1.41) を満たす真空 $|0\rangle$，$|0[\theta]\rangle$ は，

$$
a_i|0\rangle = 0, \quad b_i|0\rangle = 0, \tag{A.175}
$$

$$
a_i(\theta)|0[\theta]\rangle = 0, \quad b_i(\theta)|0[\theta]\rangle = 0 \tag{A.176}
$$

も満たす。$\mathcal{H}[a_\theta, b_\theta]$ を $|0[\theta]\rangle$ の上の $a_i(\theta)$，$b_i(\theta)$ に対する Fock 空間とすると，$\mathcal{H}[a,b]$ と $\mathcal{H}[a_\theta, b_\theta]$ は非同値である（$\mathcal{H}[a,b]$ は $\theta(\boldsymbol{k}) = 0$ のときの $\mathcal{H}[a_\theta, b_\theta]$ である）。

(2.81) の $f^{(+)}(x)$ が (2.90) の形に書けないときには，(2.82) の a_f は一般に存在しない。しかし，ある 2 乗可積分の規格直交完全系 $\{f_i(\boldsymbol{k})\}_{i=0}^{\infty}$ に対して，

$$a_i(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3k\, f_i(\boldsymbol{k}) a_f(\boldsymbol{k})$$
$$= a_i - \int d^3x\, \zeta_i(\boldsymbol{x}) f^{(+)}(\boldsymbol{x}, 0), \tag{A.177}$$
$$\zeta_i(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3k\, \frac{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}}{(2\pi)^{3/2}} f_i(\boldsymbol{k}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{A.178}$$

を定義すると，これは多くの場合存在する[13)]。また，(2.89) の真空 $|0(f)\rangle$ は

$$a_i(f)|0(f)\rangle = 0 \tag{A.179}$$

を満たす。§2.3.1 の議論の意味は，$|0(f)\rangle$ 上の $a_i(f)$ に対する Fock 空間を $\mathcal{H}[a_f]$ とすると，これは一般に $\mathcal{H}[a]$ とは非同値であるということである。

A.8　ぼかし技巧

(2.118) は，一般の時間によらない大域的 G について成り立つ。よって，G に (2.58) の χ-項があるとき，$G|0\rangle$ は規格化できない（このような演算子を異常演算子と言う）。意味のある結果を得るために，ぼかし技巧（smearing out trick）を用いる。すなわち，

$$G = \int d^3x\, g(x) f(\boldsymbol{x}) \tag{A.180}$$

とする[14)]。ただし，$f(\boldsymbol{x})$ は 2 乗可積分な c 数関数

$$\int d^3x\, |f(\boldsymbol{x})|^2 < \infty \tag{A.181}$$

である。これは，空間並進不変性の要請を外すことに対応する。$f(\boldsymbol{x})$ は最後に $f(\boldsymbol{x}) \to 1$ とする。

同様の方法は，(1.42) にも用いることができる。(1.42) の表式は係数が 0 となり，数学的には意味がない。しかし，ぼかし技巧により意味のある結果を得ることができる。ユニタリー演算子 (1.35) の生成子

$$iG[\theta] \equiv \int d^3k\, \theta(\boldsymbol{k}) \left[b^\dagger(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k}) - a(\boldsymbol{k}) b(\boldsymbol{k}) \right] \tag{A.182}$$

---

13) 例えば，(3.32) の $f(x)$ について考える。$\{f_i(k)\}_{i=0}^{\infty}$ として，

$$f_i(k) = \alpha^{1/2} [\sqrt{\pi} 2^i i!]^{-1/2} H_i(\alpha k) \exp(-\alpha^2 k^2/2)$$

を選ぶと $a_i(f)$ が存在することが示せる。ただし，$\alpha > 0$ は長さの次元の任意の実数であり，H_i はエルミート多項式である。他の 2 乗可積分の規格直交完全系 $\{g_i(k)\}_{i=0}^{\infty}$ は $\{f_i(k)\}_{i=0}^{\infty}$ によって，

$$g_i(k) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} f_j(k)$$

のように展開できるので，任意の 2 乗可積分の規格直交完全系に対して $a_i(f)$ は存在する。

14) $g(x) f(\boldsymbol{x})$ は (2.117) の形に書けない。$f(\boldsymbol{x})$ は c 数なので

$$e^{i(Ht - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x})} g(0) f(\boldsymbol{0}) e^{-i(Ht - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x})} = g(x) f(\boldsymbol{0})$$

である。

を

$$iG[\theta, f] = \int d^3k d^3p \, \theta(\boldsymbol{k}) f(\boldsymbol{p}) \big[b^\dagger(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}) - a(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}) b(\boldsymbol{k}) \big] \tag{A.183}$$

に置き換える。ただし，$f(\boldsymbol{k})$ は 2 乗可積分な c 数関数

$$\int d^3k \, |f(\boldsymbol{k})|^2 < \infty \tag{A.184}$$

である。$f(\boldsymbol{k})$ が 2 乗可積分である限り，病的な性質は現れない。(1.42) の異常性は，計算の最後に $f(\boldsymbol{k}) \to \delta^3(\boldsymbol{k})$ の極限を取るところで現れる。ぼかし技巧を用いる方法は，(A.173)，(A.174) を使う方法と密接に関係している。

B　自発的対称性の破れ

B.1　NG 場のシフト

非相対論的場合，$\chi(x)$ は,

$$\chi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, \chi(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega_\chi(\boldsymbol{k})t)} \tag{B.1}$$

と書ける。このとき，(2.107) は,

$$\chi_\theta(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, \chi_\theta(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega_\chi(\boldsymbol{k})t)} \tag{B.2}$$

と書ける。これに (2.112) を代入して

$$\begin{aligned} \chi_\theta(x) \;&=\; \chi(x) - \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, ib\delta^3(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega_\chi(\boldsymbol{k})t)} \\ &=\; \chi(x) - c, \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$c \;\equiv\; \frac{ib}{(2\pi)^{3/2}} \tag{B.4}$$

を得る。ただし，$\omega_\chi(\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}) = 0$ を用いた。(2.91) で,

$$a(\boldsymbol{k}) = \chi(\boldsymbol{k}), \quad c(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{3/2} c\theta\, \delta^3(\boldsymbol{k}) \tag{B.5}$$

の場合に対応する。

(2.108) で $b \to (2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\chi(\boldsymbol{k})}d(\boldsymbol{k})$ としたものも，$\delta^3(\boldsymbol{k})$ のおかげで運動量保存則を満たす。このとき，(2.108) は

$$G = \int d^3k\, (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_\chi(\boldsymbol{k})} \Big(d^*(\boldsymbol{k})\chi(\boldsymbol{k}) + d(\boldsymbol{k})\chi^\dagger(\boldsymbol{k}) \Big) \delta^3(\boldsymbol{k}) \tag{B.6}$$

となる。G は異常演算子であるから，意味のある結果を得るために，ぼかし技巧を用いる。すなわち，$\delta^3(\boldsymbol{k}) \to f(\boldsymbol{k})$ とする：

$$G = \int d^3k\, (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_\chi(\boldsymbol{k})} \Big(d^*(\boldsymbol{k})\chi(\boldsymbol{k}) + d(\boldsymbol{k})\chi^\dagger(\boldsymbol{k}) \Big) f(\boldsymbol{k}). \tag{B.7}$$

ただし，$f(\boldsymbol{k})$ は 2 乗可積分な c 数関数である。これは，空間並進不変性の要請を外すことに対応する。$f(\boldsymbol{k})$ は最後に $f(\boldsymbol{k}) \to \delta^3(\boldsymbol{k})$ とする。

$\chi(x)$ が（質量ゼロの）実クラインゴルドン場であるとする。このとき，(2.9)-(2.12) と同様に

$$\chi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, \frac{1}{\sqrt{2\omega_\chi(\boldsymbol{k})}} \chi(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega_\chi(\boldsymbol{k})t)} + \text{h.c.} \tag{B.8}$$

となる。(2.107) を θ で微分して

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\chi_\theta(x) \;&=\; e^{i\theta G} iG\chi(x) e^{-i\theta G} - e^{i\theta G}\chi(x) iG e^{-i\theta G} \\ &=\; e^{i\theta G}[iG, \chi(x)] e^{-i\theta G} \end{aligned} \tag{B.9}$$

を得る。$[iG, \chi(x)]$ は

$$\begin{aligned}
[iG, \chi(x)] \;=\; & \int d^3k d^3k' \sqrt{\frac{\omega_\chi(\boldsymbol{k}')}{\omega_\chi(\boldsymbol{k})}} i \Big[\chi(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_\chi(\boldsymbol{k})t)} \\
& +\chi^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_\chi(\boldsymbol{k})t)}, d^*(\boldsymbol{k}')\chi(\boldsymbol{k}') + d(\boldsymbol{k}')\chi^\dagger(\boldsymbol{k}')\Big] f(\boldsymbol{k}') \\
\;=\; & \int d^3k d^3k' \sqrt{\frac{\omega_\chi(\boldsymbol{k}')}{\omega_\chi(\boldsymbol{k})}} i \Big(\delta^3(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}) d(\boldsymbol{k}') e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_\chi(\boldsymbol{k})t)} \\
& -\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') d^*(\boldsymbol{k}') e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_\chi(\boldsymbol{k})t)}\Big) f(\boldsymbol{k}') \\
\;=\; & \int d^3k \, i \Big(d(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_\chi(\boldsymbol{k})t)} - d^*(\boldsymbol{k}) e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_\chi(\boldsymbol{k})t)}\Big) f(\boldsymbol{k})
\end{aligned} \tag{B.10}$$

である。$f(\boldsymbol{k}) \to \delta^3(\boldsymbol{k})$ として，

$$\begin{aligned}
[iG, \chi(x)] \;&=\; i\big(d(\mathbf{0}) - d^*(\mathbf{0})\big) \\
&=\; -2\mathrm{Im}[d(\mathbf{0})] \\
&\equiv\; -c'
\end{aligned} \tag{B.11}$$

を得る。よって，(B.9) は，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}\chi_\theta(x) \;&=\; e^{i\theta G}(-c')e^{-i\theta G} \\
&=\; -c'
\end{aligned} \tag{B.12}$$

となる。これより

$$\chi_\theta(x) = \chi(x) - c'\theta \tag{B.13}$$

を得る。これは，(2.91) で，

$$a(\boldsymbol{k}) = \chi(\boldsymbol{k}), \quad f(\boldsymbol{k}) = \frac{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\chi(\boldsymbol{k})}}{2} c'\theta\, \delta^3(\boldsymbol{k}) \tag{B.14}$$

の場合である[15)]。

B.2 Nother current と生成子

ラグランジアンは，場 ψ^A（$A = 1, 2, \cdots, n$）とその微分よりなるとする：

$$\mathcal{L} \;=\; \mathcal{L}[\psi^A, \psi^A_{,\mu}]. \tag{B.15}$$

ただし，

$$\psi^A_{,\mu} \;\equiv\; \partial_\mu \psi^A \tag{B.16}$$

15) このとき，

$$\int d^3k \, |f(\boldsymbol{k})|^2 = \frac{(2\pi)^3\omega_\chi(\mathbf{0})}{2} |c'|^2 \theta^2 \, \delta^3(\mathbf{0}) = 0$$

である。

である。以下では，A と $\mu, \nu, \cdots = 0,1,2,3$ および $i, j, \cdots = 1,2,3$ に対しては，アインシュタインの規約を用いる。

ある微小変換

$$x^\mu \;\to\; x'^\mu \equiv x^\mu + \delta x^\mu, \tag{B.17}$$
$$\psi^A(x) \;\to\; \psi'^A(x') \equiv \psi^A(x) + \delta\psi^A(x) \tag{B.18}$$

を考える。このとき，作用

$$I = \int d^4x\, \mathcal{L}[\psi^A(x), \psi^A_{,\mu}(x)] \tag{B.19}$$

は,

$$\begin{aligned} I \to I' \;&=\; \int d^4x'\, \mathcal{L}[\psi'^A(x'), \psi'^A_{,\mu}(x')] \\ &=\; \int d^4x\, \det\Big[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\Big]\mathcal{L}[\psi^A(x) + \delta\psi^A(x), \psi^A_{,\mu}(x) + \delta\psi^A_{,\mu}(x)] \\ &\equiv\; \int d^4x\, (\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}) \end{aligned} \tag{B.20}$$

のように変換される。今,

$$N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3x\, N^0(x) \tag{B.21}$$

を導入する。ただし,

$$N^\mu \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^A_{,\mu}}\bar{\delta}\psi^A + \mathcal{L}\delta x^\mu \tag{B.22}$$

は，Nother current である。また，$\bar{\delta}$ は，$F(x)$ を任意の量として,

$$\bar{\delta}F(x) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; F'(x) - F(x) \tag{B.23}$$

で定義される。付録 C で示すように，N は変換の生成子である。すなわち,

$$[\psi^A(\boldsymbol{x}, t), N(t)] \;=\; i\bar{\delta}\psi^A(\boldsymbol{x}, t) \tag{B.24}$$

である。今，$\delta F(x)$，$\bar{\delta}F(x)$ が θ を微小量として

$$\delta F(x) \;=\; \theta\delta^* F(x), \tag{B.25}$$
$$\bar{\delta}F(x) \;=\; \theta\bar{\delta}^* F(x) \tag{B.26}$$

と書けたとする。$\delta^* F(x)$，$\bar{\delta}^* F(x)$ は $F(x)$ と同程度の大きさとする。以下では，上に出てきた δ，$\bar{\delta}$ を全て δ^*，$\bar{\delta}^*$ に置き換えたものとして議論する。

(C.26) で,

$$\dot{N}(t) \;=\; \int d^3x\, (\delta\mathcal{L} - [\mathcal{L}]_A\bar{\delta}\psi^A) - \int d^3x\, \partial_i N^i \tag{B.27}$$

が示される。ただし,

$$[\mathcal{L}]_A \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^A} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^A_{,\mu}} \tag{B.28}$$

である。

B.3 Ward-高橋の関係式

$\{A_i(x)\}_{i=1}^n$ をボソン演算子とする。このとき，T 積は

$$T[A_1(x_1)\cdots A_n(x_n)] = A_{i_1}(x_{i_1})\cdots A_{i_n}(x_{i_n}), \quad t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \cdots \geq t_{i_n} \tag{B.29}$$

で定義される。とくに，$n=2$ のときは,

$$T[A_1(x_1)A_2(x_2)] = \theta(t_1-t_2)A_1(x_1)A_2(x_2) + \theta(t_2-t_1)A_2(x_2)A_1(x_1) \tag{B.30}$$

である。これを t_1 で微分して

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t_1}T[A_1(x_1)A_2(x_2)] &= \frac{\partial}{\partial t_1}\theta(t_1-t_2)A_1(x_1)A_2(x_2) + \theta(t_1-t_2)\frac{\partial}{\partial t_1}A_1(x_1)A_2(x_2) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t_1}\theta(t_2-t_1)A_2(x_2)A_1(x_1) + \theta(t_2-t_1)A_2(x_2)\frac{\partial}{\partial t_1}A_1(x_1) \\ &= \delta(t_1-t_2)A_1(x_1)A_2(x_2) + \theta(t_1-t_2)\dot{A}_1(x_1)A_2(x_2) \\ &\quad - \delta(t_2-t_1)A_2(x_2)A_1(x_1) + \theta(t_2-t_1)A_2(x_2)\dot{A}_1(x_1) \\ &= \delta(t_1-t_2)[A_1(x_1), A_2(x_2)] + T[\dot{A}_1(x_1)A_2(x_2)]\end{aligned} \tag{B.31}$$

を得る。今,

$$A_1(x_1) \to N(t), \quad A_2(x_2) \to A(x_1) \tag{B.32}$$

の置き換えをすると，(B.31) は,

$$\frac{\partial}{\partial t}T[N(t)A(x_1)] = \delta(t-t_1)[N(t), A(x_1)] + T[\dot{N}(t)A(x_1)] \tag{B.33}$$

となる。真空期待値を取って,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle 0|T[N(t)A(x_1)]|0\rangle = \delta(t-t_1)\langle 0|[N(t), A(x_1)]|0\rangle + \langle 0|T[\dot{N}(t)A(x_1)]|0\rangle \tag{B.34}$$

を得る。

(B.24) より,

$$\bar{\delta}A(x) = i[N(t), A(x)] \tag{B.35}$$

である。これと (B.27) を (B.34) に代入して,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\langle 0|T[N(t)A(x_1)]|0\rangle \\ &= -i\delta(t-t_1)\langle 0|\bar{\delta}A(x_1)|0\rangle + \int d^3x\,\langle 0|T[\{\delta\mathcal{L}(x) - \partial_i N^i(x)\}A(x_1)]|0\rangle\end{aligned} \tag{B.36}$$

を得る。これを $t=-\infty$ から $t=\infty$ で積分し,

$$i\langle 0|\bar{\delta}A(x_1)|0\rangle = \int d^4x\,\langle 0|T[\{\delta\mathcal{L}(x) - \partial_i N^i(x)\}A(x_1)]|0\rangle \tag{B.37}$$

が得られる。これは ward-高橋の関係式と呼ばれ，対称性のモデルによらない解析に有用である。

C　Nother current と生成子

今，任意の量 $F(x)$ に対して

$$\delta F(x) \stackrel{\text{def}}{=} F'(x') - F(x), \tag{C.1}$$
$$\bar{\delta} F(x) \stackrel{\text{def}}{=} F'(x) - F(x) \tag{C.2}$$

を導入する。前者と後者の関係は，

$$\begin{aligned} \delta F(x) &= \big[F'(x') - F'(x)\big] + \big[F'(x) - F(x)\big] \\ &= \partial_\nu F(x) \delta x^\nu + \bar{\delta} F(x) \end{aligned} \tag{C.3}$$

である。(C.2) の定義より

$$\begin{aligned} \bar{\delta} \psi^A_{,\mu}(x) &= \frac{\partial \psi'^A(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \psi^A(x)}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\big(\psi'^A(x) - \psi^A(x)\big) \\ &= \partial_\mu \bar{\delta} \psi^A(x) \end{aligned} \tag{C.4}$$

である。すなわち，$\bar{\delta}$ と ∂_μ は可換である。この式と (C.3) より

$$\begin{aligned} \delta \psi^A_{,\mu} &= \partial_\nu \psi^A_{,\mu} \delta x^\nu + \bar{\delta} \psi^A_{,\mu} \\ &= \psi^A_{,\mu\nu} \delta x^\nu + \partial_\mu \bar{\delta} \psi^A(x) \end{aligned} \tag{C.5}$$

を得る。

(B.20) の $\delta \mathcal{L}$ は，

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \det\Big[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\Big] \mathcal{L}[\psi^A + \delta \psi^A, \psi^A_{,\mu} + \delta \psi^A_{,\mu}] - \mathcal{L} \\ &= (1 + \partial_\nu \delta x^\nu)\Big(\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} \delta \psi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \delta \psi^A_{,\mu}\Big) - \mathcal{L} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} \delta \psi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \delta \psi^A_{,\mu} + \mathcal{L} \partial_\nu \delta x^\nu \end{aligned} \tag{C.6}$$

となる。これに (C.5) を代入すると，

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A}(\partial_\nu \psi^A \delta x^\nu + \bar{\delta} \psi^A) \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}}(\psi^A_{,\mu\nu} \delta x^\nu + \partial_\mu \bar{\delta} \psi^A) + \mathcal{L} \partial_\nu \delta x^\nu \\ &= \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}}\Big) \bar{\delta} \psi^A + \partial_\mu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}}\Big) \bar{\delta} \psi^A \\ &\quad + \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} \psi^A_{,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\nu}} \psi^A_{,\nu\mu}\Big) \delta x^\mu + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu \\ &= \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}}\Big) \bar{\delta} \psi^A + \partial_\mu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}} \bar{\delta} \psi^A + \mathcal{L} \delta x^\mu\Big) \\ &\equiv [\mathcal{L}]_A \bar{\delta} \psi^A + \partial_\mu N^\mu \end{aligned} \tag{C.7}$$

を得る。ただし，第 3 等号で

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A}\psi^A_{,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\nu}}\psi^A_{,\nu\mu} = \partial_\mu \mathcal{L} \tag{C.8}$$

を用い，第 4 等号で

$$[\mathcal{L}]_A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}}, \tag{C.9}$$

$$N^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}}\bar{\delta}\psi^A + \mathcal{L}\delta x^\mu \tag{C.10}$$

を導入した。N^μ は,

$$N^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}}(\delta\psi^A - \psi^A_{,\nu}\delta x^\nu) + \mathcal{L}\delta x^\mu \tag{C.11}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}}\delta\psi^A - T^\mu{}_\nu \delta x^\nu, \tag{C.12}$$

$$T^\mu{}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A_{,\mu}}\delta\psi^A - \mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu \tag{C.13}$$

とも書ける。N^μ は，Nother current と呼ばれ，$T^\mu{}_\nu$ は正準エネルギー・運動量テンソルと呼ばれる。N^0 は，(C.11) より

$$\begin{aligned}
N^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^A}(\delta\psi^A - \psi^A_{,\nu}\delta x^\nu) + \mathcal{L}\delta x^0 \\
&= \pi_A(\delta\psi^A - \psi^A_{,\nu}\delta x^\nu) + \mathcal{L}\delta x^0 \\
&= \pi_A(\delta\psi^A - \psi^A_{,i}\delta x^i) - (\pi_A\dot{\psi}^A - \mathcal{L})\delta x^0 \\
&= \pi_A(\delta\psi^A - \psi^A_{,i}\delta x^i) - \mathcal{H}\delta x^0
\end{aligned} \tag{C.14}$$

である。ただし，第 2，第 4 等号で

$$\pi_A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^A}, \tag{C.15}$$

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_A\dot{\psi}^A - \mathcal{L} \tag{C.16}$$

を用いた。

今,

$$N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3x\, N^0(x) \tag{C.17}$$

を定義すると，以下に示すように，次の仮定の下で,

$$[\psi^A(\boldsymbol{x}, t), N(t)] = i\bar{\delta}\psi^A(\boldsymbol{x}, t) \tag{C.18}$$

となる。

仮定 (1) δx^0 は $\boldsymbol{x}$ によらない：

$$\delta x^0 = \delta x^0(t). \tag{C.19}$$

仮定 (2) $\delta\psi^A, \partial_i\psi^A$ は π_A を含まない。

仮定 (3) $\mathcal{L}$ は特異でない。すなわち,

$$[\psi^A(\boldsymbol{x},t), H(t)] \;=\; i\dot{\psi}^A(\boldsymbol{x},t), \tag{C.20}$$

$$H(t) \;\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; \int d^3x\,\mathcal{H}(x) \tag{C.21}$$

および,

$$[\psi^A(\boldsymbol{x},t), \pi_B(\boldsymbol{x'},t)] = i\delta^A{}_B\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \tag{C.22}$$

が成り立つ。

仮定 (1) より,

$$\begin{aligned} N(t) \;&=\; \int d^3x\,\big[\pi_A(\delta\psi^A - \psi^A_{,i}\delta x^i) - \mathcal{H}\delta x^0\big] \\ &=\; \int d^3x\,\pi_A(\delta\psi^A - \psi^A_{,i}\delta x^i) - H\delta x^0 \end{aligned} \tag{C.23}$$

である。これと,仮定 (2),(3) より

$$\begin{aligned} [\psi^A(\boldsymbol{x},t), N(t)] \;&=\; \int d^3x'\,[\psi^A(\boldsymbol{x},t), \pi_B(\boldsymbol{x'},t)]\big(\delta\psi^B - \psi^B_{,i}\delta x^i\big)(\boldsymbol{x'},t) \\ &\quad -[\pi_A(\boldsymbol{x},t), H(t)]\delta x^0(t) \\ &=\; i(\delta\psi^A - \psi^A_{,i}\delta x^i)(\boldsymbol{x},t) - [\pi_A(\boldsymbol{x},t), H(t)]\delta x^0(t) \\ &=\; i(\delta\psi^A - \psi^A_{,i}\delta x^i - \dot{\psi}^A\delta x^0)(\boldsymbol{x},t) \\ &=\; i\bar{\delta}\psi^A(\boldsymbol{x},t) \end{aligned} \tag{C.24}$$

となる。これより,

$$e^{iN(t)}\psi^A(\boldsymbol{x},t)e^{-iN(t)} \;=\; \psi^A(\boldsymbol{x},t) + \bar{\delta}\psi^A(\boldsymbol{x},t) + O(\bar{\delta}^2) \tag{C.25}$$

が導かれる。

また,(C.17),(C.7) より,

$$\begin{aligned} \dot{N}(t) \;&=\; \int d^3x\,\partial_0 N^0 \\ &=\; \int d^3x\,(\partial_\mu N^\mu - \partial_i N^i) \\ &=\; \int d^3x\,(\delta\mathcal{L} - [\mathcal{L}]_A\bar{\delta}\psi^A) - \int d^3x\,\partial_i N^i \end{aligned} \tag{C.26}$$

が得られる。

今,連続変換が m 個のパラメーターで特徴づけられ,(B.17),(B.18) が,微小量 $\{\varepsilon^r\}_{r=1}^m$ を用いて,

$$\delta x^\mu \;=\; x'^\mu - x^\mu = \varepsilon^r f_r{}^\mu, \tag{C.27}$$

$$\delta\psi^A(x) \;=\; \psi'^A(x') - \psi^A(x') = \varepsilon^r F_r{}^A{}_B\psi^B(x) \tag{C.28}$$

と書ける場合を考える。これは大域的な変換である。このとき,Nother current(C.11) は,

$$\begin{aligned} N^\mu \;&=\; \varepsilon^r\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^A_{,\mu}}F_r{}^A{}_B\psi^B - T^\mu{}_\nu f_r{}^\nu\Big) \\ &\equiv\; \varepsilon^r J^\mu{}_r, \end{aligned} \tag{C.29}$$

$$J^\mu{}_r \;\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^A_{,\mu}}F_r{}^A{}_B\psi^B - T^\mu{}_\nu f_r{}^\nu \tag{C.30}$$

と書ける。今，

$$J_r \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3x\, J^0{}_r \tag{C.31}$$

を定義すると，これはパラメーター ε^r が表わす変換の生成子である。
　例えば，時空並進の変換は

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu,$$
$$\delta\psi^A(x) = 0$$

である。これは (C.27)，(C.28) で

$$\begin{aligned} r &= \mu, \\ f_\mu{}^\nu &= \delta_\mu{}^\nu, \\ F_\mu{}^A{}_B &= 0 \end{aligned}$$

としたものである。また，このとき，

$$\begin{aligned} \bar\delta\psi^A(x) &= \delta\psi^A(x) - \partial_\mu\psi^A(x)\delta x^\mu \\ &= -\varepsilon^\mu\partial_\mu\psi^A(x) \end{aligned} \tag{C.32}$$

である。$J^\mu{}_r$，J_r は，

$$\begin{aligned} J^\nu{}_\mu &= 0 - T^\nu{}_\lambda\delta_\mu{}^\lambda \\ &= -T^\nu{}_\mu\,, \end{aligned} \tag{C.33}$$

$$J_\mu = -\int d^3x\, T^0{}_\mu \tag{C.34}$$

となる。
　Lorentz 変換のときは，

$$\delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\nu}x_\nu\,, \tag{C.35}$$
$$\varepsilon^{\beta a} = -\varepsilon^{a\beta}\,, \tag{C.36}$$
$$\delta\psi^A(x) = \frac{1}{2}\varepsilon^{a\beta}(\boldsymbol{F}_{a\beta})^A{}_B\psi^B(x) \tag{C.37}$$

である。このとき，

$$\begin{aligned} \bar\delta\psi^A &= \delta\psi^A - \partial_\alpha\psi^A\delta x^\alpha \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(\boldsymbol{F}_{\alpha\beta})^A{}_B\psi^B - \partial_\alpha\psi^A\varepsilon^{\alpha\beta}x_\beta \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\Big[(\boldsymbol{F}_{\alpha\beta})^A{}_B\psi^B + (x_\beta\partial_\alpha - x_\alpha\partial_\beta)\psi^A\Big] \end{aligned} \tag{C.38}$$

である[16)]。

[16)] $\varepsilon^{0\beta}$ があると，仮定 (1),(および仮定 (2)) を破る。

δx^μ は,

$$\begin{aligned}\delta x^\mu &= \varepsilon^{\mu\beta}\eta_{\beta\nu}x^\nu \\ &= \varepsilon^{\alpha\beta}\delta^\mu{}_\alpha\eta_{\beta\nu}x^\nu \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(\delta^\mu{}_\alpha\eta_{\beta\nu} - \delta^\mu{}_\beta\eta_{\alpha\nu})x^\nu \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(\boldsymbol{f}_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu x^\nu\,, \end{aligned} \tag{C.39}$$

$$(\boldsymbol{f}_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \delta^\mu{}_\alpha\eta_{\beta\nu} - \delta^\mu{}_\beta\eta_{\alpha\nu} \tag{C.40}$$

とも書ける。直接計算によって,

$$[\boldsymbol{f}_{\alpha\beta}, \boldsymbol{f}_{\mu\nu}] = \eta_{\beta\mu}\boldsymbol{f}_{\alpha\nu} - \eta_{\alpha\mu}\boldsymbol{f}_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu}\boldsymbol{f}_{\beta\mu} - \eta_{\beta\nu}\boldsymbol{f}_{\alpha\mu} \tag{C.41}$$

が確かめられる。$\boldsymbol{f}_{\alpha\beta}$, $\boldsymbol{F}_{\alpha\beta}$ はともに Lorentz 群の Lie 代数の表現行列であるから,

$$[\boldsymbol{F}_{\alpha\beta}, \boldsymbol{F}_{\mu\nu}] = \eta_{\beta\mu}\boldsymbol{F}_{\alpha\nu} - \eta_{\alpha\mu}\boldsymbol{F}_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu}\boldsymbol{F}_{\beta\mu} - \eta_{\beta\nu}\boldsymbol{F}_{\alpha\mu} \tag{C.42}$$

が分かる。

Nother current は,

$$\begin{aligned}N^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^A_{,\mu}}\delta\psi^A - T^\mu{}_\alpha\delta x^\alpha \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^A_{,\mu}}(\boldsymbol{F}_{\alpha\beta})^A{}_B\psi^B - T^\mu{}_\alpha\varepsilon^{\alpha\beta}x_\beta \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\Big[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^A_{,\mu}}(\boldsymbol{F}_{\alpha\beta})^A{}_B\psi^B - (T^\mu{}_\alpha x_\beta - T^\mu{}_\beta x_\alpha)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}J^\mu{}_{\alpha\beta}\,, \end{aligned} \tag{C.43}$$

$$J^\mu{}_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^A_{,\mu}}(\boldsymbol{F}_{\alpha\beta})^A{}_B\psi^B - (T^\mu{}_\alpha x_\beta - T^\mu{}_\beta x_\alpha) \tag{C.44}$$

となる。よって，Lorentz 変換の生成子は,

$$J_{\alpha\beta} = \int d^3x\,\Big[\pi_A(\boldsymbol{F}_{\alpha\beta})^A{}_B\psi^B - (T^0{}_\alpha x_\beta - T^0{}_\beta x_\alpha)\Big] \tag{C.45}$$

である。

(C.27) は P_μ とかかれ，(C.45) の (-1) 倍は通常 $M_{\alpha\beta}$ とかかれる。すなわち

$$P_\mu \equiv -\int d^3x\,T^0{}_\mu \equiv (-H, \boldsymbol{P})\,, \tag{C.46}$$

$$M_{\mu\nu} \equiv \int d^3x\,(T^0{}_\mu x_\nu - T^0{}_\nu x_\mu) - \int d^3x\,\pi_A(\boldsymbol{F}_{\mu\nu})^A{}_B\psi^B \tag{C.47}$$

である。P_μ の時空並進の生成子であり，$M_{\mu\nu}$ は Lorentz 変換の生成子である。今,

$$J_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{ij} \tag{C.48}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\int d^3x\,T^0{}_j x_k - \varepsilon_{ijk}\int d^3x\,\pi_A(\boldsymbol{F}_{jk})^A{}_B\psi^B\,, \tag{C.49}$$

$$K_i \stackrel{\text{def}}{=} M_{i0} \tag{C.50}$$

$$= \int d^3x\,(T^0{}_i x_0 - T^0{}_0 x_i) - \int d^3x\,\pi_A(\boldsymbol{F}_{i0})^A{}_B\psi^B \tag{C.51}$$

を定義すると，J_i は角運動量であり，K_i は Lorentz boost である。

実スカラー場のときの P_μ，$M_{\mu\nu}$ を計算する。ラグランジアンを，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi) \tag{C.52}$$

とする。$V(\phi) = -(\kappa^2/2)\phi^2$ のときが自由 Klein-Gordon 場，$V(\phi) = (\mu^2/\lambda^2)[\cos(\lambda\phi) - 1]$ のときが sine-Gordon 場に対応する。ϕ の正準共役場は,

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \\ &= \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \cdots) \\ &= \dot{\phi}\end{aligned} \tag{C.53}$$

である。正準エネルギー・運動量テンソル (C.13) は,

$$\begin{aligned}T^\mu{}_\nu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\phi_{,\nu} - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L} \\ &= \frac{\partial}{\partial\phi_{,\mu}}\big[-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi)\big]\phi_{,\nu} - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L} \\ &= -\partial^\mu\phi\partial_\nu\phi - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L} \\ &= -\partial^\mu\phi\partial_\nu\phi + \delta^\mu{}_\nu\big[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - V(\phi)\big]\end{aligned} \tag{C.54}$$

であり，(C.46) は,

$$\begin{aligned}P_\mu &= -\int d^3x\, T^0{}_\mu \\ &= -\int d^3x\left(\dot{\phi}\partial_\mu\phi - \delta^0{}_\mu\big[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - V(\phi)\big]\right) \\ &= -\int d^3x\left(\pi\partial_\mu\phi - \delta^0{}_\mu\big[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - V(\phi)\big]\right)\end{aligned} \tag{C.55}$$

となる。スカラー場では，$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = 0$ であるから，(C.47) は,

$$\begin{aligned}M_{\mu\nu} &= \int d^3x\,(T^0{}_\mu x_\nu - T^0{}_\nu x_\mu) \\ &= \int d^3x\,(\pi\partial_\mu\phi x_\nu - \pi\partial_\nu\phi x_\mu)\end{aligned} \tag{C.56}$$

となり，角運動量は,

$$\begin{aligned}J_i &= \varepsilon_{ijk}\int d^3x\, T^0{}_j x_k \\ &= \varepsilon_{ijk}\int d^3x\,\pi\partial_j\phi x_k \\ &= -\varepsilon_{ijk}\int d^3x\,\pi x_j\partial_k\phi \\ &= -\int d^3x\,\pi(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\nabla}\phi)_i\end{aligned} \tag{C.57}$$

となる。

(C.55) より，

$$\boldsymbol{P} = -\int d^3x\, \pi \boldsymbol{\nabla}\phi \tag{C.58}$$

である。実クライン・ゴルドン場の場合にこれを計算する。(A.49)-(A.51)，(A.53)-(A.56) を代入して

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x \int d^3k \int d^3k' \sqrt{\frac{\omega(\boldsymbol{k})}{2}}\big[-ia(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega(\boldsymbol{k})t} + ia^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega(\boldsymbol{k})t}\big] \\
&\quad \times\sqrt{\frac{1}{2\omega(\boldsymbol{k}')}}\big[i\boldsymbol{k}'a(\boldsymbol{k}')e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}-i\omega(\boldsymbol{k}')t} - i\boldsymbol{k}'a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}+i\omega(\boldsymbol{k}')t}\big] \\
&= \int d^3k \int d^3k' \sqrt{\frac{\omega(\boldsymbol{k})}{\omega(\boldsymbol{k}')}}\frac{1}{2}\big[-a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}')\delta^3(-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{k}'e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t-i\omega(\boldsymbol{k}')t} \\
&\quad +a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}')\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{k}'e^{i\omega(\boldsymbol{k})t-i\omega(\boldsymbol{k}')t} + a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')\delta^3(-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\boldsymbol{k}'e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t+i\omega(\boldsymbol{k}')t} \\
&\quad -a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\boldsymbol{k}'e^{i\omega(\boldsymbol{k})t+i\omega(\boldsymbol{k}')t}\big] \\
&= \int d^3k\, \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\big[a(\boldsymbol{k})a(-\boldsymbol{k})e^{-i2\omega(\boldsymbol{k})t} + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{2i\omega(\boldsymbol{k})t}\big] \\
&= \int d^3k\, \frac{\boldsymbol{k}}{2}\big[a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})\big]
\end{aligned} \tag{C.59}$$

を得る。ただし，第 2 等号で (A.141) を，第 3 等号で $\omega(-\boldsymbol{k}) = \omega(\boldsymbol{k})$ を用いた。第 4 等号では，第 1 項と第 4 項

$$\boldsymbol{I}_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int d^3k\, \boldsymbol{k}a(\boldsymbol{k})a(-\boldsymbol{k})e^{-i2\omega(\boldsymbol{k})t}, \quad \boldsymbol{I}_4 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int d^3k\, \boldsymbol{k}a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{2i\omega(\boldsymbol{k})t} \tag{C.60}$$

は変数変換 $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$ により，

$$\boldsymbol{I}_1 = -\boldsymbol{I}_1\,, \quad \boldsymbol{I}_4 = -\boldsymbol{I}_4 \tag{C.61}$$

となるので消えることを用いた。(C.59) は正準交換関係 (2.13) より，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \int d^3k\, \boldsymbol{k}a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + \frac{1}{2}\delta^3(\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{0})\int d^3k\, \boldsymbol{k} \\
&= \int d^3k\, \boldsymbol{k}a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})
\end{aligned} \tag{C.62}$$

となる。

D　その他の補足

D.1　高次補正

この節では，$\hbar$ を復活させる。空間次元が d のときの

$$D(x-y) = \frac{1}{\hbar}[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y)] \tag{D.1}$$

を $D_d(x-y)$ と書くと，

$$D_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dk\, \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega(\boldsymbol{k})t}}{2\omega(\boldsymbol{k})}, \quad \omega(\boldsymbol{k}) = \sqrt{\boldsymbol{k}^2+\kappa^2} \tag{D.2}$$

である。これは,

$$\begin{aligned} D_d(x) = -\kappa^{(d-1)/2}\theta(-x^2)&\left[\frac{N_{-(d-1)/2}(\kappa\sqrt{-x^2}) + i\varepsilon(t)J_{-(d-1)/2}(\kappa\sqrt{-x^2})}{2^{(d+3)/2}\pi^{(d-1)/2}(\sqrt{-x^2})^{(d-1)/2}}\right] \\ &+\kappa^{(d-1)/2}\theta(x^2)\frac{K_{(d-1)/2}(\kappa\sqrt{x^2})}{(2\pi)^{(d+1)/2}(\sqrt{x^2})^{(d-1)/2}} \end{aligned} \tag{D.3}$$

となることが知られている（[4] の pp.424-425)。ただし，$x^2=0$ における特異性は無視した。ここで,

$$x^2 = -t^2 + \boldsymbol{x}^2, \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} +1 & \text{for } t>0 \\ -1 & \text{for } t<0 \end{cases}, \quad \theta(z) = \begin{cases} 1 & \text{for } z>0 \\ 0 & \text{for } z<0 \end{cases} \tag{D.4}$$

であり，$J_{-(d-1)/2}$，$N_{-(d-1)/2}$，$K_{(d-1)/2}$ はそれぞれベッセル関数，第 2 種ベッセル関数，第 2 種変形ベッセル関数である。特に，$d=3$ のとき，

$$D_3(x) = \begin{cases} \frac{\kappa}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{-x^2}}[N_1(\kappa\sqrt{-x^2}) + i\varepsilon(t)J_1(\kappa\sqrt{-x^2})] & \text{for } x^2<0 \\ \frac{\kappa}{4\pi^2}\frac{1}{\sqrt{x^2}}K_1(\kappa\sqrt{x^2}) & \text{for } x^2>0 \end{cases} \tag{D.5}$$

であり，$d=1$ のとき，

$$D_1(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}[N_0(\kappa\sqrt{-x^2}) - i\varepsilon(t)J_0(\kappa\sqrt{-x^2})] & \text{for } x^2<0 \\ \frac{1}{2\pi}K_0(\kappa\sqrt{x^2}) & \text{for } x^2>0 \end{cases} \tag{D.6}$$

である。ただし，$J_{-n} = (-1)^nJ_n$，$N_{-n} = (-1)^nN_n$（$n=0,1,2,\cdots$）を用いた。$x^2=0$ 付近で展開すると，

$$\begin{aligned} D_3(x) &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{x^2} + \frac{\kappa^2}{8\pi^2}\ln\Big(\frac{\kappa\sqrt{|x^2|}}{2}\Big) + \frac{\kappa^2(2\gamma-1)}{16\pi^2} + i\varepsilon(t)\theta(-x^2)\frac{\kappa^2}{16\pi} \\ &\quad + O\Big(x^2\ln\big(\kappa\sqrt{|x^2|}\big)\Big), \end{aligned} \tag{D.7}$$

$$D_1(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln\Big(\frac{\kappa\sqrt{|x^2|}}{2}\Big) - \frac{\gamma}{2\pi} + \frac{i}{4}\varepsilon(t)\theta(-x^2) - \frac{\kappa^2x^2}{8\pi}\ln\Big(\frac{\kappa\sqrt{|x^2|}}{2}\Big) + O(x^2) \tag{D.8}$$

となる。$\gamma = 0.57721\cdots$ はオイラー定数である。ただし，$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，

$$
\begin{aligned}
J_n(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{n+2m}, && \text{(D.9)} \\
N_n(z) &= \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln\frac{z}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{-n+2m} \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m+1)+\psi(m+n+1)}{m!(m+n)!}(-1)^m\Big(\frac{z}{2}\Big)^{n+2m}, && \text{(D.10)} \\
K_n(z) &= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m(n-m-1)!}{m!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{-n+2m} \\
&\quad +(-1)^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+n)!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{n+2m}\left[\ln\frac{z}{2} - \frac{\psi(m+1)+\psi(m+n+1)}{2}\right], && \text{(D.11)} \\
\psi(z) &= \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z), \quad \psi(1) = -\gamma && \text{(D.12)}
\end{aligned}
$$

であることを用いた。

(2.36) を例に，高次補正を計算する。まず，場の秩序パラメーター (2.126) は，(2.42) より

$$\phi = f + \lambda f^3 + 3\hbar\lambda D(\varepsilon) f \tag{D.13}$$

である。第 3 項が高次補正である。今，

$$:\tilde{\psi}[x|\varphi_f]: \stackrel{\text{def}}{=} \psi - \phi \tag{D.14}$$

を定義すると，これは $:\psi[x|\varphi]:$ とは高次補正の分だけ異なる。(2.36) の例では，

$$
\begin{aligned}
:\tilde{\psi}[x|\varphi_f]: &= \psi - \phi \\
&= \varphi_f + f + \lambda(\varphi_f^3 + 3\varphi_f^2 f + 3\varphi_f f^2 + f^3) - (f + \lambda f^3 + 3\hbar\lambda f D(\varepsilon)) \\
&= \varphi_f + \lambda(\varphi_f^3 + 3\varphi_f^2 f + 3\varphi_f f^2 - 3\hbar f D(\varepsilon)) \\
&= \varphi_f(1 + 3\lambda f^2) + \lambda(\varphi_f^3 + 3\varphi_f^2 f - 3\hbar f D(\varepsilon))
\end{aligned}
\tag{D.15}
$$

である。

$$
\begin{aligned}
\varphi_f^3 &= \varphi_f^{(+)3} + \varphi_f^{(+)}\varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)} + \varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)2} + \varphi_f^{(-)2}\varphi_f^{(+)} \\
&\quad + \varphi_f^{(+)2}\varphi_f^{(-)} + \varphi_f^{(+)}\varphi_f^{(-)2} + \varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)}\varphi_f^{(-)} + \varphi_f^{(-)3} && \text{(D.16)} \\
:\varphi_f^3: &= \varphi_f^{(+)3} + \varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)}\varphi_f^{(+)} + \varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)2} + \varphi_f^{(-)2}\varphi_f^{(+)} \\
&\quad + \varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)2} + \varphi_f^{(-)2}\varphi_f^{(+)} + \varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)} + \varphi_f^{(-)3} && \text{(D.17)} \\
\varphi_f^3 - :\varphi_f^3: &= [\varphi_f^{(+)}\varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)} - \varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)}\varphi_f^{(+)}] + [\varphi_f^{(+)2}\varphi_f^{(-)} - \varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)2}] \\
&\quad + [\varphi_f^{(+)}\varphi_f^{(-)2} - \varphi_f^{(-)2}\varphi_f^{(+)}] + [\varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)}\varphi_f^{(-)} - \varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)}] \\
&= [\varphi_f^{(+)}, \varphi_f^{(-)}]\varphi_f^{(+)} + [\varphi_f^{(+)2}, \varphi_f^{(-)}] + [\varphi_f^{(+)}, \varphi_f^{(-)2}] + \varphi_f^{(-)}[\varphi_f^{(+)}, \varphi_f^{(-)}] \\
&= \hbar D(\varepsilon)\varphi_f^{(+)} + 2\hbar D(\varepsilon)\varphi_f^{(+)} + 2\hbar D(\varepsilon)\varphi_f^{(-)} + \varphi_f^{(-)}\hbar D(\varepsilon) \\
&= 3\hbar D(\varepsilon)[\varphi_f^{(+)} + \varphi_f^{(-)}] \\
&= 3\hbar D(\varepsilon)\varphi_f && \text{(D.18)}
\end{aligned}
$$

および,

$$
\begin{aligned}
\varphi_f^2 &= \varphi_f^{(+)2} + \varphi_f^{(+)}\varphi_f^{(-)} + \varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)} + \varphi_f^{(-)2} &\text{(D.19)}\\
:\varphi_f^2: &= \varphi_f^{(+)2} + \varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)} + \varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)} + \varphi_f^{(-)2} &\text{(D.20)}\\
\varphi_f^2 - :\varphi_f^2: &= \varphi_f^{(+)}\varphi_f^{(-)} - \varphi_f^{(-)}\varphi_f^{(+)}\\
&= \hbar D(\varepsilon) &\text{(D.21)}
\end{aligned}
$$

より,(D.15) は,

$$
\begin{aligned}
:\tilde{\psi}[x|\varphi_f]: &= \varphi_f(1+3\lambda f^2) + \lambda[:\varphi_f^3: + 3\hbar D(\varepsilon)\varphi_f + 3(:\varphi_f^2: + \hbar D(\varepsilon))f - 3\hbar f D(\varepsilon)]\\
&= \varphi_f(1+3\lambda f^2 + 3\hbar\lambda D(\varepsilon)) + \lambda(:\varphi_f^3: + 3:\varphi_f^2: f) &\text{(D.22)}
\end{aligned}
$$

となる。また,$:\psi[x|\varphi_f]:$ は,

$$
\begin{aligned}
:\psi[x|\varphi_f]: &= :\varphi_f + f + \lambda(\varphi_f^3 + 3\varphi_f^2 f + 3\varphi_f f^2 + f^3):\\
&= \varphi_f + \lambda(:\varphi_f^3: + 3:\varphi_f^2: f + 3\varphi_f f^2)\\
&= \varphi_f(1+3\lambda f^2) + \lambda(:\varphi_f^3: + 3:\varphi_f^2: f) &\text{(D.23)}
\end{aligned}
$$

である。ただし,c 数の N 積は 0 であるとした。(D.22),(D.23) より

$$
\begin{aligned}
:\tilde{\psi}[x|\varphi_f]: - :\psi[x|\varphi_f]: &= 3\hbar\lambda D(\varepsilon)\varphi_f(x) &\text{(D.24)}\\
&\overset{\mathrm{w}}{=} 0 &\text{(D.25)}
\end{aligned}
$$

である。

準粒子方程式 (2.1) の真空期待値を取ると,巨視的物体に対する古典的方程式

$$
\Lambda(\partial)\phi(x) = \langle 0(f)|j[\psi(x)]|0(f)\rangle \tag{D.26}
$$

を得る。(D.14) より

$$
\begin{aligned}
\langle 0(f)|j[\psi](x)|0(f)\rangle &= \langle 0(f)|j[\phi(\bullet) + :\tilde{\psi}[\bullet|\varphi_f]:](x)|0(f)\rangle\\
&= j[\phi](x) + (\text{高次補正}) &\text{(D.27)}
\end{aligned}
$$

となる。従って,(D.26) は

$$
\Lambda(\partial)\phi(x) = j[\phi](x) + (\text{高次補正}) \tag{D.28}
$$

となり,tree 近似での ϕ の方程式は

$$
\Lambda(\partial)\phi(x) \overset{\text{tree}}{=} j[\phi](x) \tag{D.29}
$$

となる。

(D.27) を示そう。以下では,N 積は φ_f についてのものとし,必要がない限り引数は省略する。$j[\psi](x)$ には,$\psi^n(x)$ のような項が含まれる。ψ^n に $\psi = \phi + :\tilde{\psi}:$ を代入すると,

$$
\begin{aligned}
\psi^n &= (\phi + :\tilde{\psi}:)(\phi + :\tilde{\psi}:)\cdots(\phi + :\tilde{\psi}:)\\
&= \phi^n + n\phi^{n-1} :\tilde{\psi}: + \frac{n(n-1)}{2}\phi^{n-2} :\tilde{\psi}::\tilde{\psi}: + \cdots &\text{(D.30)}
\end{aligned}
$$

となる。この真空期待値は，

$$\langle 0(f)|\psi^n|0(f)\rangle = \phi^n + \frac{n(n-1)}{2}\phi^{n-2}\langle 0(f)|\,{:}\tilde{\psi}{:}{:}\tilde{\psi}{:}\,|0(f)\rangle + \cdots \tag{D.31}$$

である。第 2 項以降が，(D.27) の (高次補正) に対応する。tree 近似では，

$${:}A{:}{:}B{:} \overset{\text{tree}}{=} {:}AB{:} \tag{D.32}$$

である。よって，

$$\langle 0(f)|\psi^n|0(f)\rangle \overset{\text{tree}}{=} \phi^n \tag{D.33}$$

となる。同様にして，(D.29) を得る。
　今の例では，

$$\begin{aligned}
{:}\tilde{\psi}{:}{:}\tilde{\psi}{:} =\ & (1+3\lambda f^2)^2\varphi_f^2 + \lambda(1+3\lambda f^2)\varphi_f^4 + 3\lambda(1+3\lambda f^2)f\varphi_f^3 - 3\lambda\hbar f D(\varepsilon)(1+3\lambda f^2)\varphi_f \\
+\ & \lambda(1+3\lambda f^2)\varphi_f^4 + \lambda^2\varphi_f^6 + 3\lambda^2 f\varphi_f^5 - 3\lambda^2\hbar f D(\varepsilon)\varphi_f^3 \\
+\ & 3\lambda(1+3\lambda f^2)f\varphi_f^3 + 3\lambda^2 f\varphi_f^5 + 9\lambda^2 f\varphi_f^4 - 9\lambda^2\hbar f^2 D(\varepsilon)\varphi_f^2 \\
-\ & 3\lambda\hbar f(1+3\lambda f^2)D(\varepsilon)\varphi_f - 3\lambda^2\hbar f D(\varepsilon)\varphi_f^3 - 9\lambda^2\hbar f^2 D(\varepsilon)\varphi_f^2 + 9\lambda^2\hbar^2 f^2 D^2(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{D.34}$$

であり，真空期待値は，φ_f の偶数次だけが残り，

$$\begin{aligned}
\langle 0(f)|\,{:}\tilde{\psi}{:}{:}\tilde{\psi}{:}\,|0(f)\rangle =\ & \langle 0(f)|(1+3\lambda f^2)^2\varphi_f^2 + \lambda(1+3\lambda f^2)\varphi_f^4 + \lambda^2\varphi_f^6 + 9\lambda^2 f\varphi_f^4 \\
& -18\lambda^2\hbar f^2 D(\varepsilon)\varphi_f^2 + 9\lambda^2\hbar^2 f^2 D^2(\varepsilon)|0(f)\rangle \\
=\ & \langle 0(f)|\left[(1+3\lambda^2)^2 - 18\lambda^2\hbar f^2 D(\varepsilon)\right]\varphi_f^2 + \lambda(1+12\lambda f^2)\varphi_f^4 + \lambda^2\varphi_f^6 \\
& +9\lambda^2\hbar^2 f^2 D^2(\varepsilon)|0(f)\rangle
\end{aligned} \tag{D.35}$$

である。Wick の定理より得られる公式

$$\langle 0(f)|\varphi_f^{2n}|0(f)\rangle = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\,\hbar^n D^n(\varepsilon) \tag{D.36}$$

より，

$$\begin{aligned}
\langle 0(f)|\,{:}\tilde{\psi}{:}{:}\tilde{\psi}{:}\,|0(f)\rangle =\ & \left[(1+3\lambda f^2)^2 - 18\lambda^2\hbar f^2 D(\varepsilon)\right]\hbar D(\varepsilon) + \lambda(1+12\lambda f^2)3\hbar^2 D^2(\varepsilon) \\
& +15\lambda^2\hbar^3 D^3(\varepsilon) + 9\lambda^2\hbar^2 f^2 D^2(\varepsilon) \\
=\ & (1+3\lambda f^2)^2\hbar D(\varepsilon) + 3\lambda(1+9\lambda f^2)\hbar^2 D^2(\varepsilon) + 15\lambda^2\hbar^3 D^3(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{D.37}$$

を得る。

D.2　角運動量のダイナミカルマップ

　空間回転のユニタリー演算子を $R(\boldsymbol{\varphi})$ とする：

$$R(\boldsymbol{\varphi}) = \exp(i\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\varphi}). \tag{D.38}$$

$\boldsymbol{\varphi}$ の回転によって，各量は，

$$\begin{aligned}
R^{-1}(\boldsymbol{\varphi})\psi(x_i,t)R(\boldsymbol{\varphi}) &= \psi(\bar{R}_{ij}(\boldsymbol{\varphi})x_j,t), && \text{(D.39)}\\
R^{-1}q_i R &= (\bar{R}^{-1})_{ij}q_j, && \text{(D.40)}\\
R^{-1}p_i R &= (\bar{R}^{-1})_{ij}p_j, && \text{(D.41)}\\
R^{-1}\alpha(k_i)R &= \alpha(\bar{R}_{ij}k_j) && \text{(D.42)}
\end{aligned}$$

と変換される。ただし，$x'_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bar{R}_{ij}(\boldsymbol{\varphi})x_j$ に対する座標系は，x_i に対する座標系を $\boldsymbol{\varphi}$ の向きの軸のまわりに，$|\boldsymbol{\varphi}|$ だけ回転させたものである。このとき，

$$\begin{aligned} x_i - q_i \;\rightarrow\; & R^{-1}(x_i - q_i)R \\ = \; & x_i - R^{-1}q_i R \\ = \; & x_i - (\bar{R}^{-1})_{ij}q_j \\ = \; & (\bar{R}^{-1})_{ij}(\bar{R}_{jk}x_k - q_j) \end{aligned} \tag{D.43}$$

となる。(D.40)，(D.41) の変換に寄与する部分は，

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p} \tag{D.44}$$

である。(D.42) の変換に寄与するのは，準粒子の部分

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}[\alpha(\boldsymbol{k}), \alpha^\dagger(\boldsymbol{k})] \tag{D.45}$$

である。$\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{l}$ とは可換であり，

$$\boldsymbol{J} \stackrel{\mathrm{w}}{=} \boldsymbol{L} + \boldsymbol{l} \tag{D.46}$$

である。準粒子は全運動量には寄与しない（(2.204) を見よ）が，このように角運動量には寄与する。

巨視的物体が球対称でない場合は，真空は回転対称性を破る。回転対称性の自発的破れにより，新しいゼロ・エネルギー NG モードが生じ，交換関係

$$[s_i, s_j] = i\varepsilon_{ijk}s_k \tag{D.47}$$

を満たす，回転にかかわる量子力学的演算子となる。s_i は量子力学的スピンと呼ばれる。このとき，回転の生成子は，

$$\boldsymbol{J} \stackrel{\mathrm{w}}{=} \boldsymbol{L} + \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s} \tag{D.48}$$

となる。以下では，簡単のため，$\boldsymbol{s}$ はないものとする。

回転の生成子 $\boldsymbol{J}$ は $\boldsymbol{q}$ を $\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}$ の形で含んでいる。これは，$\boldsymbol{J}$ が大域的演算子ではないからである。実スカラー場 ψ の角運動量は，(C.49) によると

$$J_i \;=\; \varepsilon_{ijk}\int d^3x\, T^0{}_j x_k\,, \tag{D.49}$$

$$T^\mu{}_\nu \;\equiv\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\nu\psi - \mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu \tag{D.50}$$

である。(D.49) は c 数 x_k を陽に含んでおり，J_i は大域的演算子ではない。

参考文献

[1] H.Umezawa（著）, 有光敏彦・有光直子（訳）『場の量子論—ミクロ，マクロ，そして熱物理学の最前線』, 培風館 (1995 年)

[2] H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki, “*Thermo Field Dynamics and Condensed States*” (North-Holland, Amsterdam, New York, London, 1982).

[3] G.Oberlechner, M.Umezawa and Ch.Zenses, *Lett.Nuovo Cimento* **23** (1978) 641.

[4] 新井朝雄, 『フォック空間と量子場（下）』, 日本評論社 (2000 年)

[5] 保江邦夫（著）, 高橋康（監修）『量子場脳理論入門』, サイエンス社 (2003 年)

謝辞

卒業研究を通して，場の量子論における真空の属性について詳しく勉強しました。本論文の内容は，場の理論の本質的な一面であるにも関わらず，一般にあまり知れていないと思われます。この論文を書くにあたって身に付けた知識や研究への姿勢は，今後の研究に大いに役立つと思います。卒業研究を通して，いつも厳格かつ丁寧に指導，助言をして下った有光敏彦 教授に心より感謝申し上げます。また，吉田恭 助教にもセミナーの際にいつも貴重な助言をして頂きました。この場を借りてお礼を申し上げます。また，大学院の先輩方には，セミナー以外の場所でも大変お世話になりました。併せてお礼を申し上げます。同期の鈴木君にも貴重なコメントを頂きました。感謝しています。最後に，いつも私を温かく見守り，励まして下さった家族に厚く感謝いたします。