場の量子論における真空の属性と量子ソリトン
―巨視的物体に伴う量子力学的演算子の出現機構―

中嶋慧
指導教員：有光敏彦

多数の異なる相の出現は、ハイゼンベルグ場の運動を、異なる Fock 空間で記述することに対応する。各 Fock 空間は、それぞれの真空への粒子凝縮の形によって区別される。ある Fock 空間の真空 $|0\rangle$ が $a(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0$ により定義されるとき、$a^\dagger(\boldsymbol{k})$ により生成される粒子を準粒子と言う。いかなる演算子も、ある準粒子の真空 $|0\rangle$ 上の Fock 空間への作用として定義される。従って、ハイゼンベルグ場 $\psi(x)$ は、準粒子場 $\varphi(x)$ または、準粒子の生成・消滅演算子 $a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})$ によって、$\psi(x) = \psi[x|\varphi] = \psi[x|a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})]$ のように表わされなければならない。このように、ハイゼンベルグ場を準粒子場で表わしたものをダイナミカルマップと言う。

変換の生成子 N は、一般に $N = \int d^3x\, \rho(x)$ の形で書ける。N 変換に対してハミルトニアンは不変であるとする。$\rho(x)$ が場とその導関数で与えられるとき、N は、

$$N \stackrel{\mathrm{w}}{=} \int d^3k \left[c(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) + \{ b^* \chi(\boldsymbol{k}) + b \chi^\dagger(\boldsymbol{k}) \} \delta^3(\boldsymbol{k}) \right]$$

の形となる。ただし、$a(\boldsymbol{k})$, $\chi(\boldsymbol{k})$ は準粒子であり、$\chi(\boldsymbol{k})$ のエネルギー $\omega_\chi(\boldsymbol{k})$ は、$\omega_\chi(\boldsymbol{0}) = 0$ を満たす。N による変換により、χ 場は $e^{i\theta N} \chi(x) e^{-i\theta N} = \chi(x) - c\theta$ と変換される。ある種の粒子の有限密度の凝縮が、N 不変でない真空を形成したとする：$N|0\rangle \neq 0$. これは $|0\rangle$ 上の Fock 空間では N 対称性が自発的に破れていることを表わす。このとき χ 粒子が存在する。よって、自発的に対称性が破れると $\omega_\chi(\boldsymbol{0}) = 0$ なる粒子が存在する (南部-Goldstone 定理)。

量子場 $\psi(x)$, 準粒子場 $\varphi(x)$ の方程式を、それぞれ、$\Lambda(\partial)\psi(x) = j[\psi]$, $\Lambda(\partial)\varphi(x) = 0$ とする。$\Lambda(\partial) f(x) = 0$ なる c 数関数によって $\varphi_f(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi(x) - f(x)$ を定義する。変換 $\varphi(x) \to \varphi_f(x)$ は一般に相転移に対応する。$\varphi(x)$, $\varphi_f(x)$ の準粒子消滅演算子を $a(\boldsymbol{k})$, $a_f(\boldsymbol{k})$ とし、真空 $|0\rangle$, $|0(f)\rangle$ を $a(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0$, $a_f(\boldsymbol{k})|0(f)\rangle = 0$ で定義する。また、$\langle 0|\psi(x)|0\rangle = 0$ とする。このとき、$\phi(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle 0(f)|\psi(x)|0(f)\rangle$ を場の秩序パラメーターという。

$\psi(x)$ のダイナミカルマップを $\psi(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} \psi_n(x)$ とかく。ただし、ψ_n は $(n+1)$ 次の N 積である。特に、$\psi_{-1}(x)$ は場の秩序パラメーター $\phi(x)$ である。場の方程式を $\phi(x)$ のまわりでテーラー展開し、準粒子の次数で式を分類すると、最低次と次の次数の方程式として、それぞれ

$$\Lambda(\partial)\phi(x) = j[\phi], \quad \Big(\Lambda(\partial) - j_1[\phi]\Big)\psi_0 = 0$$

を得る。ただし、$j_1[\psi]\psi_0 \equiv \int d^4y\, \lim_{\varepsilon \to 0} \left(j[\psi(\bullet) + \varepsilon \psi_0(\bullet) \delta^4(\bullet - y)](x) - j[\psi](x) \right) / \varepsilon$ である。$\phi(x)$ が時間によらないとき、$\partial_i \phi(\boldsymbol{x})$ が上の第 2 式の解であることが分かる。これは離散的なゼロ・エネルギー・モードである。$\psi_0(x)$ は $\psi_0(x) = -\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi + \varphi(x)$ となる。ただし、$\varphi(x)$ は連続モードを表わし、$\boldsymbol{q}$ は量子力学的演算子を表わす。また、$\psi(x)$ に $\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}$ の形で含まれる。$[q_a, p_b] = i\delta_{ab}$ を満たす $\boldsymbol{p}$ は、$e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c}} \psi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c}} = \psi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{q})$ のように位置の並進を誘起する。量子力学的演算子は、巨視的物体の存在によって、空間の並進対称性が自発的に破れたことに付随する NG モードを表わすと解釈される。

(1+1) 次元において、sine-Gordon モデル $(\partial_x^2 - \partial_t^2)\psi(x) = \mu^2 \sin\psi(x)$ を考える。$\Lambda(\partial)$ を $\partial_x^2 - \partial_t^2 - \mu^2$ に選ぶ。$\Lambda(\partial) f(x) = 0$ の解の 1 つとして $e^{\mu X}$ がある。ただし、X は一般化座標と呼ばれる、$x - q$, t の関数である (q は量子力学的演算子である)。$f(x) = e^{\mu X}$ のとき、

$$\phi(X) = 4 \tan^{-1} \frac{e^{\mu X}}{4}$$

となる。これは sine-Gordon モデルのキンク解として知られるものである。