一般の擬確率分布と量子化

中嶋 慧

平成 30 年 3 月 21 日

目 次

1 ウィグナー関数とワイル量子化

Q を位置、P を運動量とする (演算子は大文字で書く)。状態 ρ のウィグナー関数は、

$$
\begin{aligned}
W(q,p) &\overset{\text{def}}{=} \int \frac{dkd\chi}{(2\pi)^2}\ e^{-i(kq+\chi p)}\mathrm{Tr}[e^{i(kQ+\chi P)}\rho] \\
&\equiv \mathrm{Tr}[\Pi(q,p)\rho] \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

である。ここで、

$$
\Pi(q,p) \overset{\text{def}}{=} \int \frac{dkd\chi}{(2\pi)^2}\ e^{-i(kq+\chi p)}e^{i(kQ+\chi P)}. \qquad (1.2)
$$

古典量 $f(q,p)$ をワイル順序で量子化したもの $\mathcal{Q}[f(q,p)]$ は、

$$
\mathcal{Q}[f(q,p)] \overset{\text{def}}{=} \int dqdp\ f(q,p)\Pi(q,p) \qquad (1.3)
$$

である。$\Pi(q,p)$ はエルミート演算子なので、f が実数なら $\mathcal{Q}[f(q,p)]$ はエルミート演算子である。

$\mathcal{Q}[f(q,p)]$ の状態 ρ での期待値は、

$$
\langle \mathcal{Q}[f(q,p)]\rangle = \mathrm{Tr}(\mathcal{Q}[f(q,p)]\rho) = \int dqdp\ f(q,p)W(q,p) \qquad (1.4)
$$

と書ける。

ワイル量子化の性質に、

$$\mathcal{Q}[\{f,g\}] = \frac{[\mathcal{Q}[f],\mathcal{Q}[g]]}{i\hbar} + \mathcal{O}(\hbar) \tag{1.5}$$

がある [4]。$\{f,g\}$ はポアソン括弧で、$[F,G]$ は交換子である。

また、

$$\mathcal{Q}[q^n p^m] = \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{2^m} {}_mC_l P^l Q^n P^{m-l} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} {}_nC_k Q^k P^m Q^{n-k}. \tag{1.6}$$

である。この式は§ 2.4 で示す。例えば、

$$\mathcal{Q}[qp] = \frac{1}{2}(QP+PQ). \tag{1.7}$$

2　ウィグナー関数の拡張

この章は、[2, 3] のまとめである。

2.1　素朴な拡張

一般の物理量 A, B に対して、ウィグナー関数の拡張する。素朴な拡張は、

$$\begin{aligned} W(a,b) &\overset{\text{def}}{=} \int \frac{dsdt}{(2\pi)^2}\ e^{-i(sa+tb)}\mathrm{Tr}[e^{i(sA+tB)}\rho] \\ &\equiv \mathrm{Tr}[\Pi(a,b)\rho], \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\Pi(a,b) \overset{\text{def}}{=} \int \frac{dsdt}{(2\pi)^2}\ e^{-i(sa+tb)}e^{i(sA+tB)} \tag{2.2}$$

である。古典量 $f(a,b)$ を量子化したもの $\mathcal{Q}[f(q,p)]$ は、

$$\mathcal{Q}[f(a,b)] \overset{\text{def}}{=} \int dadb\ f(a,b)\Pi(a,b) \tag{2.3}$$

である。期待値は、

$$\langle \mathcal{Q}[f(a,b)]\rangle = \mathrm{Tr}(\mathcal{Q}[f(a,b)]\rho) = \int dadb\ f(a,b)W(q,p) \tag{2.4}$$

と書ける。

この定式化は、そのまま n 変数に拡張できる [1, 4].

2.2　一般系

$\#(s,t)$ を、A, B の関数で、A, B を c 数 a, b に置き換えた時 $e^{i(sa+tb)}$ となり、

$$\#(s,0) = e^{isA}, \tag{2.5}$$

$$\#(0,t) = e^{itB} \tag{2.6}$$

となる演算子とする。例えば、

$$\#(s,t) = \begin{cases} e^{i(sA+tB)} \\ e^{isA}e^{itB} \\ e^{itB}e^{isA} \\ \Pi_{k=1}^{n} e^{i\alpha_k sA}e^{i\beta_k tB} \quad (\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 1,\ \sum_{k=1}^{n}\beta_k = 1) \end{cases} \tag{2.7}$$

や、これらの線形結合である。例えば、

$$\#(s,t) = \frac{1-\alpha}{2}e^{isA}e^{itB} + \frac{1+\alpha}{2}e^{itB}e^{isA} \tag{2.8}$$

や、

$$\#(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ G(k)\#_k(s,t) \ \ \Big(\int_{-\infty}^{\infty} dk\ G(k) = 1\Big), \tag{2.9}$$

$$\#_k(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\frac{s}{2}(1-k)A}e^{itB}e^{i\frac{s}{2}(1+k)A} \tag{2.10}$$

でも良い。

$\#(s,t) = e^{isA}e^{itB}$ の場合は、Kirkwood(1933)-Dirac(1945) の擬確率として古くから知られていた [5, 6]. $\#(s,t) = e^{isA}e^{itB}$ の場合は、1949 年に Moyal が扱った [7]. ただし、$(A,B) = (Q,P)$ の場合は、Weyl(1927) と Wigner(1932) の研究がある [8, 9].

擬確率分布を

$$\begin{aligned} W_{\#}(a,b) &\stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dsdt}{(2\pi)^2}\ e^{-i(sa+tb)}\mathrm{Tr}[\#(s,t)\rho] \\ &\equiv \mathrm{Tr}[\Pi_{\#}(a,b)\rho], \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\Pi_{\#}(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dsdt}{(2\pi)^2}\ e^{-i(sa+tb)}\#(s,t) \tag{2.12}$$

で定義する。古典量 $f(a,b)$ の量子化 $\mathcal{Q}_{\#}[f(q,p)]$ は、

$$\mathcal{Q}_{\#}[f(a,b)] \stackrel{\text{def}}{=} \int dadb\ f(a,b)\Pi_{\#}(a,b) \tag{2.13}$$

で定義する。期待値は、

$$\langle \mathcal{Q}_{\#}[f(a,b)]\rangle = \mathrm{Tr}(\mathcal{Q}_{\#}[f(a,b)]\rho) = \int dadb\ f(a,b)W_{\#}(q,p) \tag{2.14}$$

と書ける。

$W_{\#}(a,b)$ を a(または b) で積分したものは、b(または a) の確率分布となる。実際、

$$\begin{aligned} \int db\ \Pi_{\#}(a,b) &= \int \frac{dsdt}{(2\pi)^2}\int db\ e^{-i(sa+tb)}\#(s,t) \\ &= \int \frac{dsdt}{2\pi}\ e^{-isa}\delta(t)\#(s,t) \\ &= \int \frac{ds}{2\pi}\ e^{-isa}\#(s,0) \\ &= \int \frac{ds}{2\pi}\ e^{is(A-a)} \\ &= \delta(A-a) \end{aligned} \tag{2.15}$$

なので、

$$\int db\, W_{\#}(a,b) \;=\; \mathrm{Tr}[\delta(A-a)\rho] \equiv W(a) \tag{2.16}$$

は a の確率分布である。 同様に、

$$\int da\, W_{\#}(a,b) \;=\; \mathrm{Tr}[\delta(B-b)\rho] \equiv W(b). \tag{2.17}$$

また、

$$\mathcal{Q}_{\#}[f(a)] \;=\; f(A), \tag{2.18}$$

$$\mathcal{Q}_{\#}[g(b)] \;=\; g(B) \tag{2.19}$$

である。

$\mathcal{Q}_{\#}[a^n b^m]$ は、

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{\#}[a^n b^m] &= \int dadb\; a^n b^m \Pi_{\#}(a,b) \\
&= \int dadb \int \frac{dsdt}{(2\pi)^2}\; a^n b^m e^{-i(sa+tb)} \#(s,t) \\
&= \int dadb \int \frac{dsdt}{(2\pi)^2}\; \frac{\partial^{n+m} e^{-i(sa+tb)}}{\partial(-is)^n \partial(-it)^m} \#(s,t) \\
&= \int \frac{dsdt}{(2\pi)^2}\; \frac{\partial^{n+m} \#(s,t)}{\partial(is)^n \partial(it)^m} \int dadb\; e^{-i(sa+tb)} \\
&= \left.\frac{\partial^{n+m} \#(s,t)}{\partial(is)^n \partial(it)^m}\right|_{s=0,t=0}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

で与えられる。

2.3 特に興味のある量子化

主に量子力学初期に考えられた様々な量子化がある：

Weyl and Wigner[8, 9]

$$(a^n b^m)_{\mathrm{WW}} \;=\; \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{2^m}\, {}_m C_l B^l A^n B^{m-l} \tag{2.21}$$

Kirkwood and Dirac[5, 6]

$$(a^n b^m)_{\mathrm{KD}} \;=\; A^n B^m,\; B^m A^n \tag{2.22}$$

Margenau and Hill[10]

$$(a^n b^m)_{\mathrm{MH}} \;=\; \frac{1}{2}(A^n B^m + B^m A^n) \tag{2.23}$$

Born and Jordan[11]

$$(a^n b^m)_{\mathrm{BJ}} \;=\; \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^{m} B^l A^n B^{m-l}. \tag{2.24}$$

ここは、$\mathcal{Q}[X]$ を (X) と書いた。

これは全て、(2.9) のタイプの $\#(s,t)$ で与えられる。(2.20) より、

$$
\begin{aligned}
(a^n b^m)_\# &= \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{2^m} {}_mC_l \int_{-\infty}^{\infty} dk\ G(k)(1+k)^l(1-k)^{m-l} B^l A^n B^{m-l} \\
&\equiv \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{2^m} {}_mC_l G_{m,l} B^l A^n B^{m-l}, \qquad (2.25) \\
G_{m,l} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dk\ G(k)(1+k)^l(1-k)^{m-l} \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

である。

Weyl and Wigner は $G(k)=\delta(k)$ の場合である：

$$
\begin{aligned}
G_{m,l} &= 1, \qquad (2.27) \\
(a^n b^m)_\# &= \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{2^m} {}_mC_l B^l A^n B^{m-l} \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

となる。

Margenau and Hill は $G(k)=\frac{1}{2}[\delta(k-1)+\delta(k-1)]$ の場合である：

$$
\begin{aligned}
G_{m,l} &= \frac{1}{2} \cdot 2^m (\delta_{l0}+\delta_{lm}), \qquad (2.29) \\
(a^n b^m)_\# &= \frac{1}{2}(A^n B^m + B^m A^n) \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

となる。

Born and Jordan は、

$$
G(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \qquad (2.31)
$$

の場合である [1]：

$$
\begin{aligned}
G_{m,l} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1} dk\ \frac{1}{2}(1+k)^l(1-k)^{m-l} \\
&= 2^m \int_0^1 dk\ x^l(1-x)^{m-l} \\
&= 2^m B(l+1, m-l+1) \\
&= 2^m \frac{\Gamma(l+1)\Gamma(m-l+1)}{\Gamma(m+2)} \\
&= 2^m \frac{l!(m-l)!}{(m+1)m!} \\
&= \frac{1}{m+1} \frac{2^m}{{}_mC_l}, \qquad (2.32) \\
(a^n b^m)_\# &= \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^{m} B^l A^n B^{m-l}. \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

[1] この $G(k)$ は $\sin x/x$ のフーリエ解析である

2.4 位置と運動量の場合

$(A,B)=(Q,P)$ の場合を考える。前節の様々な量子化は、次のようにまとめられる。$g(x)$ を

$$g(0)=1 \tag{2.34}$$

を満たす任意の関数とし、

$$\#(s,t)=g(\frac{\hbar st}{2})\#_0(s,t) \tag{2.35}$$

とする。ここで、

$$\#_0(s,t) \,=\, e^{i(sQ+tP)} \tag{2.36}$$

である。特に、

$$g(x)=1,\ \cos x, \frac{\sin x}{x}$$

の場合が、それぞれ Weyl and Wigner, Margenau and Hill, Born and Jordan の場合である。$g(x)$ をフーリエ変換で書く：

$$g(x) \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} dk\ G(k)e^{ikx}. \tag{2.37}$$

(2.34) は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\ G(k) \,=\, 1. \tag{2.38}$$

$\#(s,t)$ は、実は (2.9) である。実際、

$$\begin{aligned} \#(s,t) \,&=\, \int_{-\infty}^{\infty} dk\ G(k)e^{ik\frac{\hbar st}{2}}\#_0(s,t) \\ &\equiv\, \int_{-\infty}^{\infty} dk\ G(k)\#_k(s,t),\ \#_k(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{ik\frac{\hbar st}{2}}\#_0(s,t) \end{aligned} \tag{2.39}$$

と書け、

$$\#_k(s,t) \,=\, e^{-i\frac{k}{2}sQ}\#_0(s,t)e^{i\frac{k}{2}sQ} = e^{i\frac{k}{2}tP}\#_0(s,t)e^{-i\frac{k}{2}tP} \tag{2.40}$$

および

$$\#_0(s,t) \,=\, e^{isQ/2}e^{itP}e^{isQ/2} = e^{itP/2}e^{isQ}e^{itP/2} \tag{2.41}$$

より、$\#_k(s,t)$ は、

$$\#_k(s,t) \,=\, e^{i\frac{s}{2}(1-k)Q}e^{itP}e^{i\frac{s}{2}(1+k)Q} \tag{2.42}$$

$$= e^{i\frac{t}{2}(1+k)P}e^{isQ}e^{i\frac{t}{2}(1-k)P} \tag{2.43}$$

である。最後の 2 式の Q, P の対称性と (2.21) より (1.6) が従う。

A　Q, P 関数および s-順序積

この章では、ノート [4] で示した公式を引用する。

$a, a^\dagger$ を

$$[a, a^\dagger] = 1\,, \quad [a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger] \tag{A.1}$$

を満たす生成・消滅演算子とする。さらに、

$$D(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), \tag{A.2}$$

$$D(\alpha, s) \stackrel{\text{def}}{=} D(\alpha)\exp(\frac{1}{2}s|\alpha|^2), \tag{A.3}$$

$$\Delta_s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ D(\alpha, s)\exp(-\alpha z^* + \alpha^* z) \tag{A.4}$$

とする [2] コヒーレント状態は、

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle \qquad (a|0\rangle = 0, \langle 0|0\rangle = 1) \tag{A.6}$$

で定義される。$a, a^\dagger$ で記述される系の状態を ρ とすると、

$$\rho_s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}[\rho\Delta_{-s}(z)] \tag{A.7}$$

$$= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} e^{-\frac{1}{2}s|\alpha|^2}\mathrm{Tr}[e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}\rho] \tag{A.8}$$

は、ρ と同じ情報を持つ [3]。つまり、

$$\rho = \int \frac{d^2 z}{\pi}\ \rho_s(z)\Delta_s(z) \tag{A.9}$$

となる。一般に、$a, a^\dagger$ の任意関数 A に対して、

$$A = \int \frac{d^2 z}{\pi}\ A_s(z)\Delta_s(z), \tag{A.10}$$

$$A_s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}[A\Delta_{-s}(z)] \tag{A.11}$$

となる。また、

$$\mathrm{Tr}[AB] = \int \frac{d^2 z}{\pi}\ A_s(z)B_{-s}(z) = \int \frac{d^2 z}{\pi}\ A_{-s}(z)B_s(z) \tag{A.12}$$

である。これらの公式が成立するのは、公式

$$A = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)]D(\alpha) \tag{A.13}$$

のお陰である。

---

[2] $\alpha = x + iy = re^{i\theta}$ とすると、

$$\int d^2\alpha \cdots \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdots = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta\, r \cdots \tag{A.5}$$

である。

[3] これは一般の擬確率では成立しない、$(A, B) = (Q, P)$ の場合に特別な現象である

$s=-1,1,0$ はそれぞれ P 関数, Q 関数, Wigner 関数である。(A.8) より、

$$W(z) \equiv \rho_0(z) \;=\; \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\; e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \mathrm{Tr}[e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}\rho] \tag{A.14}$$

である。また、

$$\Delta_{-1}(z) \;=\; |z\rangle\langle z| \tag{A.15}$$

が示せるので、(A.9) より、

$$\rho \;=\; \int \frac{d^2 z}{\pi}\; P(z)|z\rangle\langle z|\,, \quad P(z) \equiv \rho_{-1}(z) \tag{A.16}$$

で、(A.7) より、

$$Q(z) \equiv \rho_1(z) \;=\; \langle z|\rho|z\rangle \tag{A.17}$$

を得る。

s-順序積を

$$\{(a^\dagger)^n a^m\}_s \;\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} D(\alpha,-s)\big|_{\alpha=0} \tag{A.18}$$

で定義すると、

$$\int \frac{d^2 z}{\pi}\; z^{*n} z^m \Delta_{-s}(z) \;=\; \{(a^\dagger)^n a^m\}_s, \tag{A.19}$$

$$\tag{A.20}$$

とかける。これは、

$$(\{(a^\dagger)^n a^m\}_s)_{-s}(z) = z^{*n} z^m \tag{A.21}$$

を意味する。これと (A.12) より、

$$\langle \{(a^\dagger)^n a^m\}_s \rangle \;=\; \int \frac{d^2 z}{\pi}\; \rho_s(z) z^{*n} z^m \tag{A.22}$$

を得る。

ところで、

$$\begin{aligned} D(\alpha,-s) \;&=\; D(\alpha) e^{-\frac{1}{2}s|\alpha|^2} \\ &=\; e^{\frac{-1-s}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} = e^{\frac{1-s}{2}} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} \end{aligned} \tag{A.23}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \{(a^\dagger)^n a^m\}_1 \;&=\; (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger}\big|_{\alpha=0} \\ &=\; a^m (a^\dagger)^n, \end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned} \{(a^\dagger)^n a^m\}_{-1} \;&=\; (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}\big|_{\alpha=0} \\ &=\; (a^\dagger)^n a^m \end{aligned} \tag{A.25}$$

である。よって、

$$\langle (a^\dagger)^n a^m \rangle = \int \frac{d^2z}{\pi}\ P(z) z^{*n} z^m, \tag{A.26}$$

$$\langle a^m (a^\dagger)^n \rangle = \int \frac{d^2z}{\pi}\ Q(z) z^{*n} z^m \tag{A.27}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
\{(a^\dagger)^n a^m\}_0 &= (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}\big|_{\alpha=0} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} (\alpha a^\dagger - \alpha^* a)^k\big|_{\alpha=0} \\
&= \frac{(-1)^m}{(n+m)!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} (\alpha a^\dagger - \alpha^* a)^{n+m}\big|_{\alpha=0} \\
&= \frac{1}{(n+m)!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} (\alpha a^\dagger + \alpha^* a)^{n+m}\big|_{\alpha=0}
\end{aligned} \tag{A.28}$$

である。例えば、

$$\{a^\dagger a\}_0 = \frac{a^\dagger a + a a^\dagger}{2} \tag{A.29}$$

であり、$\{(a^\dagger)^n a^m\}_0$ は、$a, a^\dagger$ について対称である。これは Weyl 順序と呼ばれる。

B　α-順序積

$$A_\alpha(x,p) \stackrel{\text{def}}{=} \int dq\ e^{ipq} \langle x - \frac{1+\alpha}{2} q | A | x + \frac{1-\alpha}{2} q \rangle \tag{B.1}$$

とする。これは $\alpha = 0,\ A = \rho$ で Wigner 関数となる [4]. これは擬確率の性質を持つ：

$$\begin{aligned}
A_\alpha(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dp}{2\pi}\ A_\alpha(x,p) \\
&= \int \frac{dp}{2\pi} \int dq\ e^{ipq} \langle x - \frac{1+\alpha}{2} q | A | x + \frac{1-\alpha}{2} q \rangle \\
&= \langle x | A | x \rangle
\end{aligned} \tag{B.2}$$

であり、

$$\begin{aligned}
A_\alpha(p) &\stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dx}{(2\pi)^2}\ A_\alpha(x,p) \\
&= \frac{dp}{(2\pi)^2} \int dx \int dq\ e^{ipq} \langle x - \frac{1+\alpha}{2} q | A | x + \frac{1-\alpha}{2} q \rangle
\end{aligned} \tag{B.3}$$

である。今、

$$x_1 = x + \frac{1-\alpha}{2} q, \quad x_2 = x - \frac{1+\alpha}{2} q \tag{B.4}$$

とすると、

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{\alpha}{2} q, \quad q = x_1 - x_2 \tag{B.5}$$

であり、($-1 < \alpha$ として、)

$$\begin{aligned} A_\alpha(p) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int dx_1 \int dx_2\ e^{ip(x_1-x_2)}\langle x_2|A|x_1\rangle \\ &= \int dx_1 \int dx_2\ \langle p|x_2\rangle\langle x_2|A|x_1\rangle\langle x_1|p\rangle \\ &= \langle p|A|p\rangle \end{aligned} \tag{B.6}$$

となる。

今、

$$\Delta_\alpha(x,p) \stackrel{\text{def}}{=} \int dq\ e^{iqp}|x+\frac{1+\alpha}{2}q\rangle\langle x-\frac{1-\alpha}{2}q| \tag{B.7}$$

とすると、

$$A'_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dxdp}{2\pi}\ A_\alpha(x,p)\Delta_\alpha(x,p) \tag{B.8}$$

は、

$$\begin{aligned} A'_\alpha &= \int \frac{dxdp}{2\pi}\int dq \int dy\ e^{ip(q+y)}|x+\frac{1+\alpha}{2}y\rangle\langle x-\frac{1-\alpha}{2}q|A|x+\frac{1+\alpha}{2}q\rangle\langle x-\frac{1-\alpha}{2}y| \\ &= \int dx \int dq\ |x-\frac{1-\alpha}{2}q\rangle\langle x-\frac{1-\alpha}{2}q|A|x+\frac{1+\alpha}{2}q\rangle\langle x+\frac{1+\alpha}{2}q| \\ &= \int dx_1 \int dx_2\ |x_1\rangle\langle x_1|A|x_2\rangle\langle x_2| \\ &= A \end{aligned} \tag{B.9}$$

となる。つまり、

$$A = \int \frac{dxdp}{2\pi}\ A_\alpha(x,p)\Delta_\alpha(x,p) \tag{B.10}$$

である。更に、

$$A_\alpha(x,p) = \mathrm{Tr}[A\Delta_{-\alpha}(x,p)] = \mathrm{Tr}[A\Delta^\dagger_\alpha(x,p)] \tag{B.11}$$

であるから、

$$A = \int \frac{dxdp}{2\pi}\ \mathrm{Tr}[A\Delta^\dagger_\alpha(x,p)]\Delta_\alpha(x,p). \tag{B.12}$$

今、

$$A = E^{a,b} \stackrel{\text{def}}{=} e^{i(aX+bP)} \tag{B.13}$$

に対して、

$$E^{a,b}_\alpha(x,p) = \int dq\ e^{ipq}\langle x-\frac{1+\alpha}{2}q|e^{i(aX+bP)}|x+\frac{1-\alpha}{2}q\rangle \tag{B.14}$$

を考えると、

$$\begin{aligned} E^{a,b}_\alpha(x,p) &= \int dq\ e^{ipq}e^{iab/2}\langle x-\frac{1+\alpha}{2}q|e^{iaX}e^{ibP}|x+\frac{1-\alpha}{2}q\rangle \\ &= \int dq\ e^{ipq}e^{iab/2}e^{ia(x-\frac{1+\alpha}{2}q)}\langle x-\frac{1+\alpha}{2}q|x+\frac{1-\alpha}{2}q-b\rangle \\ &= \int dq\ e^{ipq}e^{iab/2}e^{ia(x-\frac{1+\alpha}{2}q)}\delta(q-b) \\ &= e^{ipb}e^{iab/2}e^{ia(x-\frac{1+\alpha}{2}b)} \\ &= e^{i(ax+bp-\alpha ab/2)} \end{aligned} \tag{B.15}$$

となる。特に、$\alpha = -1, 0, 1$ に対して、

$$(e^{iaX}e^{ibP})_{-1}(x,p) = (e^{i(aX+bP)})_0(x,p) = (e^{ibP}e^{iaX})_1(x,p) \ = \ e^{iax+ibp} \tag{B.16}$$

となる。α-順序積を

$$\{X^nP^m\}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dxdp}{2\pi}\ x^np^m\Delta_\alpha(x,p) \tag{B.17}$$

で定義する。特に、

$$\int \frac{dxdp}{2\pi}\ e^{iax}e^{ibp}\Delta_{-1}(x,p) \ = \ e^{iaX}e^{ibP}, \tag{B.18}$$

$$\int \frac{dxdp}{2\pi}\ e^{iax}e^{ibp}\Delta_0(x,p) \ = \ e^{i(aX+bP)}, \tag{B.19}$$

$$\int \frac{dxdp}{2\pi}\ e^{iax}e^{ibp}\Delta_1(x,p) \ = \ e^{ibP}e^{iaX} \tag{B.20}$$

より、

$$\{X^nP^m\}_{-1} = X^nP^m, \quad \{X^nP^m\}_1 = P^mX^n \tag{B.21}$$

および、

$$\{X^nP^m\}_0 \ = \ \frac{1}{(n+m)!}\frac{\partial^{n+m}(aX+bP)^{n+m}}{\partial a^n \partial b^m}\Big|_{a,b=0} \tag{B.22}$$

を得る。

参考文献

[1] 谷村 省吾, 日本物理学会 15 年春, 21pAN12.

[2] 李 宰河, 筒井 泉, "Quasi-probabilities in conditioned quantum measurement and a geometric/statistical interpretation of Aharonov ' s weak value", PTEP 2017.5 (2017): 052A01

[3] 李 宰河, 筒井 泉, "On Quantisations, Quasi-probabilities and the Weak Value", arXiv:1703.06068

[4] 中嶋 慧「c 数空間へのマップ」

[5] J. G. Kirkwood, "Quantum Statistics of Almost Classical Assemblies", Phys. Rev. 44, 31 (1933).

[6] P. A. M. Dirac, "On the Analogy Between Classical and Quantum Mechanics", Rev. Mod. Phys. 17, 195 (1945).

[7] J. E. Moyal, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 45, 99 (1949).

[8] H. Weyl, "Quantenmechanik und Gruppentheorie", Zeitschrift f¨ ur Physik, 46(1), 1 (1927).

[9] E. Wigner, "On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium", Phys. Rev. 40, 749 (1932).

[10] H. Margenau and N. R. Hill, "Correlations between measurements in quantum theory", Prog. Theoret. Phys. 26, 722 (1961).

[11] M. Born and P. Jordan, "Zur Quantenmechanik", Z. Phys. 34, 858 (1925).