量子解析入門

中嶋慧

December 16, 2025

Abstract

本記事は物理学アドベントカレンダー 2025 の 16 日目の記事である。鈴木増雄の量子解析について入門的な解説をする。

Contents

1 量子解析

演算子 A を δA だけ動かしたとき、$f(A)$ が、

$$\delta f(A) := f(A+\delta A) - f(A) = \hat{F}_A \delta A \tag{1.1}$$

だけ変化したとする。超演算子 $\hat{F}_A$ を求める。まず、

$$f(A) = \frac{1}{i2\pi}\oint_C dz\ \frac{f(z)}{z-A} \tag{1.2}$$

である。ただし、閉曲線 C の中には A の固有値が全て含まれ、C 上および C の内部で $f(z)$ は解析的である。恒等式

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = -\frac{1}{A}(A-B)\frac{1}{B} \tag{1.3}$$

より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{A+B} &= \frac{1}{A} - \frac{1}{A+B}B\frac{1}{A} \\ &= \frac{1}{A} - \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} - \cdots \end{aligned}\tag{1.4}$$

なので、

$$\delta \frac{1}{z-A} = \frac{1}{z-A} \delta A \frac{1}{z-A} \tag{1.5}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \delta f(A) &= \frac{1}{i2\pi} \oint dz\ f(z) \frac{1}{z-A} \delta A \frac{1}{z-A} \\ &= \frac{1}{i2\pi} \oint dz\ f(z) \frac{1}{z-L_A} \frac{1}{z-R_A} \delta A \end{aligned} \tag{1.6}$$

である。ここで、

$$L_A \bullet := A \bullet, \quad R_A \bullet := \bullet A \tag{1.7}$$

であり、L_A と R_A とは可換である。よって、

$$\hat{F}_A = \frac{1}{i2\pi} \oint dz\ f(z) \frac{1}{z-L_A} \frac{1}{z-R_A} \tag{1.8}$$

となる[1)] 。これより、

$$\hat{F}_A = \frac{f(L_A) - f(R_A)}{L_A - R_A} = \frac{\delta_{f(A)}}{\delta_A}, \quad \delta_A := L_A - R_A \tag{1.9}$$

であり、

$$\hat{F}_A = \int_0^1 dt\ f'(tL_A + (1-t)R_A) \tag{1.10}$$

を得る [1, 2]。

例えば、$f(x) = e^x$ とすると、(1.10) より、

$$\delta e^A = \int_0^1 dt\ e^{(1-t)A} \delta A e^{tA} \tag{1.11}$$

を得る。$f(x) = \ln x$ とすると、(1.9) より、

$$\begin{aligned} \delta \ln A &= \frac{\ln L_A - \ln R_A}{L_A - R_A} \delta A \\ &= \frac{1}{L_A - R_A} \int_0^\infty ds\ \left[\frac{1}{R_A + s} - \frac{1}{L_A + s} \right] \delta A \\ &= \int_0^\infty ds\ \frac{1}{L_A + s} \frac{1}{R_A + s} \delta A \\ &= \int_0^\infty ds\ \frac{1}{A + s1} \delta A \frac{1}{A + s1} \end{aligned} \tag{1.12}$$

---

1) 簡単のため、A は N 次元の正方行列で、対角化可能とする。このとき、

$$A|r_i\rangle = \lambda_i |r_i\rangle, \quad \langle l_i|A = \lambda_i \langle l_i|, \quad \langle l_i|r_j\rangle = \delta_{ij}$$

で定義される左右の固有状態を用いて、$A = \sum_i \lambda_i |r_i\rangle\langle l_i|$ と書ける [3]。また、

$$A|r_i\rangle\langle l_j| = \lambda_i |r_i\rangle\langle l_j|, \quad |r_i\rangle\langle l_j|A = \lambda_j |r_i\rangle\langle l_j|$$

なので、$|r_i\rangle\langle l_j|$ は L_A の固有値 λ_i(N 重縮退) の固有「ベクトル」であり、R_A の固有値 λ_j(N 重縮退) の固有「ベクトル」である。

となる。(1.11), (1.12) の別の導出はノート [4] および付録 A を参照のこと。
なお、$\hat{F}_A$ は、

$$\frac{df(A)}{dA} \tag{1.13}$$

とも書かれ、この記号では、

$$\delta f(A) = \frac{df(A)}{dA}\delta A \tag{1.14}$$

である。また、(1.10) より、

$$\mathrm{Tr}[\delta f(A)] = \mathrm{Tr}[f'(A)\delta A] \tag{1.15}$$

となる。

A e^A および $\ln A$ の変分

A.1 e^A の微分

ここでは、$A = A(\alpha)$ がパラメーラーの組 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ に依存するとき、

$$\frac{\partial e^A}{\partial \alpha_n} = \int_0^1 dt\ e^{(1-t)A}\frac{\partial A}{\partial \alpha_n}e^{tA} \tag{A.1}$$

であることを示す [5]。これは本質的は (1.11) と同じである。まず、

$$C_n(t) := e^{-tA}\frac{\partial}{\partial \alpha_n}e^{tA} \tag{A.2}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\frac{dC_n}{dt} &= e^{-tA}(-A)\frac{\partial}{\partial \alpha_n}e^{tA} + e^{-tA}\frac{\partial}{\partial \alpha_n}(Ae^{tA}) \\ &= e^{-tA}\frac{\partial A}{\partial \alpha_n}e^{tA}\end{aligned} \tag{A.3}$$

なので、

$$\begin{aligned}e^{-A}\frac{\partial}{\partial \alpha_n}e^A &= C_n(1) \\ &= C(0) + \int_0^1 dt\ e^{-tA}\frac{\partial A}{\partial \alpha_n}e^{tA}\end{aligned} \tag{A.4}$$

であり、$C(0) = 0$ なので、上式に左から e^A をかけて、(A.1) を得る。

A.2 $\ln(A+\varepsilon B)$ の展開

z のが負の実軸上にないなら、

$$\ln z = \int_0^\infty dt \,\left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{z+t}\right) \tag{A.5}$$

であるから、A の固有値が負の実軸上にないなら、

$$\begin{aligned}\ln A &= \frac{1}{i2\pi}\oint_C dz \int_0^\infty dt \,\left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{z+t}\right)(z1-A)^{-1} \\ &= \int_0^\infty dt \,\left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{A+t1}\right)\end{aligned} \tag{A.6}$$

であり、

$$\begin{aligned}\ln(A+\varepsilon B) - \ln A &= \int_0^\infty dt \,\left(\frac{1}{A+t1} - \frac{1}{A+\varepsilon B+t1}\right) \\ &= \int_0^\infty dt \,\frac{1}{A+t1}\varepsilon B\frac{1}{A+\varepsilon B+t1}\end{aligned} \tag{A.7}$$

を得る [6]。ここで、(1.3) を用いた。(1.4) より、

$$\ln(A+\varepsilon B) = \ln A + \varepsilon\int_0^\infty dt \,\frac{1}{A+t1}B\frac{1}{A+t1} - \varepsilon^2\int_0^\infty dt \,\frac{1}{A+t1}B\frac{1}{A+t1}B\frac{1}{A+t1} + O(\varepsilon^3) \tag{A.8}$$

となる。これより (1.12) を得る。

References

[1] 鈴木増雄『統計力学』岩波, 1998 年 (1994 年の版には載っていない).

[2] 鈴木増雄『経路積分と量子解析』サイエンス社, SGC ライブラリ 137, 2017 年.

[3] 中嶋慧「左右の固有ベクトル」
https://cf096240.cloudfree.jp/left_eigenvector.pdf

[4] 中嶋慧「exp と ln に関するいくつかの公式」
https://cf096240.cloudfree.jp/exp_ln.pdf

[5] 中嶋 慧, 松尾 衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』現代数学社, 2020 年.

[6] 日合文雄 『行列解析とその応用: 関数解析の考え方と行列の様々な不等式』サイエンス社, SGC ライブラリ 200, 2025 年.