位相空間表現

中嶋 慧

2021 年 9 月 27 日

目 次

1　導入と要約

§5 までは [1](特に付録 A.2) を参考にした。この議論は 1969 年の論文 [2] が元ネタだと思われる。

$a, a^\dagger$ を生成・消滅演算子とする：

$$[a, a^\dagger] = 1\,, \quad [a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger]. \tag{1.1}$$

さらに、

$$D(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), \tag{1.2}$$

$$D(\alpha, s) \overset{\text{def}}{=} D(\alpha)\exp(\frac{1}{2}s|\alpha|^2), \tag{1.3}$$

$$\Delta_s(z) \overset{\text{def}}{=} \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\, D(\alpha, s)\exp(-\alpha z^* + \alpha^* z) \tag{1.4}$$

とする[1)]。$a, a^\dagger$ で記述される系の状態を ρ とすると、

$$\rho_s(z) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}[\rho\Delta_{-s}(z)] \tag{1.5}$$

$$= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\, e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} e^{-\frac{1}{2}s|\alpha|^2}\mathrm{Tr}[e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}\rho] \tag{1.6}$$

1) $\alpha = x + iy = re^{i\theta}$ とすると、

$$\int d^2\alpha \cdots \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdots = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta\, r \cdots$$

である。

は[2)]、ρ と同じ情報を持つ。つまり、

$$\rho = \int \frac{d^2 z}{\pi}\ \rho_s(z)\Delta_s(z) \tag{1.7}$$

となる。上の 3 式で ρ を一般の演算子に置き換えることもできる。

2　コヒーレント状態

公式

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^A e^B \qquad \text{for} \quad \big[A,[A,B]\big] = \big[B,[A,B]\big] = 0 \tag{2.1}$$

より、

$$D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} \tag{2.2}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
D(\alpha)D(\beta) &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \cdot e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{\beta a^\dagger} e^{-\beta^* a} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{\beta a^\dagger} e^{-\beta^* a} \\
&= \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 - \alpha^*\beta) e^{\alpha a^\dagger} e^{\beta a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{-\beta^* a} \\
&= \exp\big(-\frac{1}{2}|\alpha+\beta|^2 - \frac{1}{2}\alpha^*\beta + \frac{1}{2}\alpha\beta^*\big) e^{(\alpha+\beta)a^\dagger} e^{-(\alpha+\beta)^* a} \\
&= D(\alpha+\beta) e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)}, \qquad (2.3) \\
D^\dagger(\alpha) &= \exp[(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)^\dagger] \\
&= D(-\alpha) \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

である。

今、コヒーレント状態[3)]

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle \qquad (a|0\rangle = 0, \langle 0|0\rangle = 1) \tag{2.5}$$

を定義すると、(2.2) より、

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

[2)] $s = -1, 1, 0$ はそれぞれ P 関数, Q 関数, Wigner 関数である。詳しくは、§4。

[3)] コヒーレント状態は、シュレーディンガーにより、1926 年 7 月 (!!) に「ミクロの力学からマクロな力学への連続的移行」で与えられた。シュレーディンガーは 1926 年に「固有値問題としての量子化」(第 1 部), 「固有値問題としての量子化」(第 2 部), 「ミクロの力学からマクロな力学への連続的移行」, 「ハイゼンベルグ・ボルン・ヨルダン量子力学と私の力学についての関係について」, 「固有値問題としての量子化」(第 3 部), 「固有値問題としての量子化」(第 4 部) をこの順で書いており、最後の論文で、史上初めて、クライン・ゴルドン方程式を書いている。シュレーディンガーは、「ミクロの力学からマクロな力学への連続的移行」で、コヒーレント状態の古典的な性質を示し、水素原子の場合にも、高い量子数を持った固有状態を重ね合わせれば、ケプラーの法則に従って楕円を描き、しかも形の崩れない波束ができるだろうと述べた。1927 年 (!) にハイゼンベルグは、これが誤りである事を示した。つまり、調和振動子はエネルギー準位が等間隔であるために波束が形を保つことができるが、一般の場合には波束は拡散してしまう事を証明した。

現代のコヒーレント状態の理論は 2005 年のノーベル物理学賞受賞者のグラウバーによるところが大きい。受賞理論は、コヒーレント状態についての 1963 年の 3 本の論文である。

となる。また、

$$
\begin{aligned}
a|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}|n-1\rangle \\
&= \alpha e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\
&= \alpha|\alpha\rangle
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

である。また、(2.3), (2.4), (2.2) より、

$$
\begin{aligned}
\langle\alpha|\beta\rangle &= \langle 0|D(-\alpha)D(\beta)|0\rangle \\
&= \langle 0|D(-\alpha+\beta)|0\rangle e^{\frac{1}{2}(-\alpha\beta^*+\alpha^*\beta)} \\
&= \exp(-\frac{1}{2}|-\alpha+\beta|^2)\langle 0|e^{(-\alpha+\beta)a^\dagger}e^{-(-\alpha+\beta)^*a}|0\rangle e^{\frac{1}{2}(-\alpha\beta^*+\alpha^*\beta)} \\
&= \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2+\alpha^*\beta)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

となる。なお、(2.6) より、

$$
\begin{aligned}
\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\ |\alpha\rangle\langle\alpha| &= \int\frac{d^2\alpha}{\pi}\ e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}|n\rangle\langle m| \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dr\int_0^{2\pi}d\theta\ re^{-r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{r^n}{\sqrt{n!}}\frac{r^m}{\sqrt{m!}}e^{i\theta(n-m)}|n\rangle\langle m| \\
&= 2\int_0^{\infty}dr\ re^{-r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{n!}|n\rangle\langle n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

である。上 2 式より、$\{|\alpha\rangle\}$ は規格非直交（過剰）完全系である。

3　演算子の c 数表現

付録 A より、

$$
A = \int\frac{d^2\alpha}{\pi}\ \mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)]D(\alpha) \tag{3.1}
$$

となる。

今、

$$
\alpha = a+ib, \quad z = x+iy \tag{3.2}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
\alpha z^* - \alpha^* z &= (a+ib)(x-iy)-(a-ib)(x+iy) \\
&= 2i(-ay+bx)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

であるから、

$$\int \frac{d^2z}{\pi}\ e^{\alpha z^*-\alpha^* z} = \int \frac{dxdy}{\pi} e^{2i(-ay+bx)}$$
$$= \pi\delta(-a)\delta(b)$$
$$= \pi\delta(a)\delta(b) \equiv \pi\delta^2(\alpha) \tag{3.4}$$

となる。これを用いて、(1.4) を逆フーリエ変換して、

$$D(\alpha,s) = D(\alpha)\exp(\frac{1}{2}s|\alpha|^2) = \int \frac{d^2z}{\pi}\ \Delta_s(z)e^{\alpha z^*-\alpha^* z},$$
$$D(\alpha) = \exp(-\frac{1}{2}s|\alpha|^2)\int \frac{d^2z}{\pi}\ \Delta_s(z)e^{\alpha z^*-\alpha^* z}, \tag{3.5}$$
$$D^\dagger(\alpha) = \exp(\frac{1}{2}s|\alpha|^2)\int \frac{d^2z}{\pi}\ \Delta_{-s}(z)e^{-\alpha z^*+\alpha^* z} \tag{3.6}$$

を得る。第 2 式と第 3 式では、s が -1 倍違う。これを (**??**) に代入して、

$$A = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \mathrm{Tr}[\exp(\frac{1}{2}s|\alpha|^2)\int \frac{d^2z}{\pi}\ \Delta_{-s}(z)e^{-\alpha z^*+\alpha^* z}]$$
$$\times\exp(-\frac{1}{2}s|\alpha|^2)\int \frac{d^2w}{\pi}\ \Delta_s(w)e^{\alpha w^*-\alpha^* w}$$
$$= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \mathrm{Tr}[A\Delta_{-s}(z)]\Delta_s(w)\int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ e^{\alpha(w-z)^*-\alpha^*(w-z)}$$
$$= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \mathrm{Tr}[A\Delta_{-s}(z)]\Delta_s(w)\pi\delta(w-z)$$
$$= \int \frac{d^2z}{\pi}\ \mathrm{Tr}[A\Delta_{-s}(z)]\Delta_s(z)$$
$$= \int \frac{d^2z}{\pi}\ A_s(z)\Delta_s(z). \tag{3.7}$$

第 3 等号で (3.4) を用いた。ここで、$A_s(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Tr}[A\Delta_{-s}(z)]$ である。
(A.3), (3.4) より、

$$\mathrm{Tr}[D(\alpha)] = \int \frac{d^2z}{\pi}\ \langle z|D(\alpha)|z\rangle$$
$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\int \frac{d^2z}{\pi}\ e^{\alpha z^*-\alpha^* z}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\pi\delta^2(\alpha)$$
$$= \pi\delta^2(\alpha) \tag{3.8}$$

である。これと、(2.3) より、

$$\mathrm{Tr}[D(\alpha)D(\beta)] = \mathrm{Tr}[D(\alpha+\beta)]e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)}$$
$$= \pi\delta^2(\alpha+\beta)e^{\frac{1}{2}(\alpha\alpha^*-\alpha^*\alpha)}$$
$$= \pi\delta^2(\alpha+\beta) \tag{3.9}$$

を得る。これと、(1.4) より、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[\Delta_s(z)\Delta_{-s}(w)] &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \frac{d^2\beta}{\pi}\ \mathrm{Tr}[D(\alpha)D(\beta)] e^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2} e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} e^{-s\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{-\beta w^* + \beta^* w} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \frac{d^2\beta}{\pi}\ \pi\delta^2(\alpha) e^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2} e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} e^{-s\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{-\beta w^* + \beta^* w} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ e^{-\alpha(z-w)^* + \alpha^*(z-w)} \\
&= \pi\delta^2(z-w).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

これと、(3.7) より、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[AB] &= \int \frac{d^2z}{\pi} \int \frac{d^2w}{\pi}\ A_s(z) B_{-s}(w) \mathrm{Tr}[\Delta_s(z)\Delta_{-s}(w)] \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\ A_s(z) B_{-s}(z) = \int \frac{d^2z}{\pi}\ A_{-s}(z) B_s(z)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

を得る。特に、$B = \rho$ として、

$$\langle A \rangle \equiv \mathrm{Tr}[\rho A] = \int \frac{d^2z}{\pi}\ \rho_s(z) A_{-s}(z) = \int \frac{d^2z}{\pi}\ \rho_{-s}(z) A_s(z) \tag{3.12}$$

を得る。

4 対称積, s-順序積

(1.4) より、

$$\begin{aligned}
z^{*n} z^m \Delta_{-s}(z) &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ D(\alpha, -s) z^{*n} z^m e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ D(\alpha, -s)(-1)^n \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \left[(-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} D(\alpha, -s)\right] e^{-\alpha z^* + \alpha^* z}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

両辺を z で積分し、(3.4) を用いて、

$$\int \frac{d^2z}{\pi}\ z^{*n} z^m \Delta_{-s}(z) = \{(a^\dagger)^n a^m\}_s, \tag{4.2}$$

$$\{(a^\dagger)^n a^m\}_s \stackrel{\mathrm{def}}{=} (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} D(\alpha, -s)\Big|_{\alpha=0} \tag{4.3}$$

を得る。$\{(a^\dagger)^n a^m\}_s$ は s-順序積である。(3.7)

$$A = \int \frac{d^2z}{\pi}\ A_{-s}(z) \Delta_{-s}(z) \tag{4.4}$$

より、これは

$$(\{(a^\dagger)^n a^m\}_s)_{-s}(z) = z^{*n} z^m \tag{4.5}$$

を意味する。これと (3.12) より、

$$\langle\{(a^\dagger)^n a^m\}_s\rangle = \int \frac{d^2z}{\pi}\ \rho_s(z) z^{*n} z^m \tag{4.6}$$

を得る。今、

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm}^{(s)} \{(a^\dagger)^n a^m\}_s \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm}^{(s)} \int \frac{d^2z}{\pi} z^{*n} z^m \Delta_{-s}(z) \end{aligned} \tag{4.7}$$

と書くと、(4.4) と比べて、

$$A_{-s}(z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm}^{(s)} z^{*n} z^m \tag{4.8}$$

となる。これから、

$$A_{nm}^{(s)} = n!m! \frac{\partial^{n+m} A_{-s}(z)}{\partial z^{*n} \partial z^m}\Big|_{z=0} \tag{4.9}$$

を得る。

　ところで、(2.2) より、

$$\begin{aligned} D(\alpha, -s) &= D(\alpha) e^{-\frac{1}{2}s|\alpha|^2} \\ &= e^{\frac{-1-s}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} = e^{\frac{1-s}{2}} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} \end{aligned} \tag{4.10}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \{(a^\dagger)^n a^m\}_1 &= (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger}\Big|_{\alpha=0} \\ &= a^m (a^\dagger)^n, \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} \{(a^\dagger)^n a^m\}_{-1} &= (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}\Big|_{\alpha=0} \\ &= (a^\dagger)^n a^m \end{aligned} \tag{4.12}$$

である。よって、

$$\langle(a^\dagger)^n a^m\rangle = \int \frac{d^2z}{\pi}\ \rho_{-1}(z) z^{*n} z^m, \tag{4.13}$$

$$\langle a^m (a^\dagger)^n\rangle = \int \frac{d^2z}{\pi}\ \rho_1(z) z^{*n} z^m \tag{4.14}$$

である。$\rho_{-1}(z)$ を P 関数, $\rho_1(z)$ を Q 関数という。また、

$$\begin{aligned} \{(a^\dagger)^n a^m\}_0 &= (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}\Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} (\alpha a^\dagger - \alpha^* a)^k\Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{(-1)^m}{(n+m)!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} (\alpha a^\dagger - \alpha^* a)^{n+m}\Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{1}{(n+m)!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} (\alpha a^\dagger + \alpha^* a)^{n+m}\Big|_{\alpha=0} \end{aligned} \tag{4.15}$$

である。例えば、

$$\{a^\dagger a\}_0 = \frac{a^\dagger a + a a^\dagger}{2} \tag{4.16}$$

であり、$\{(a^\dagger)^n a^m\}_0$ は、$a, a^\dagger$ について対称である。これは Weyl 順序と呼ばれる。また、$\rho_0(z)$ を Wigner 関数という。

(1.6) より、

$$W(z) \equiv \rho_0(z) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\; e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \mathrm{Tr}[e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}\rho] \tag{4.17}$$

である。また、

$$\Delta_{-1}(z) = |z\rangle\langle z| \tag{4.18}$$

なので[4)]、(1.7) より、

$$\rho = \int \frac{d^2 z}{\pi}\; P(z)|z\rangle\langle z|, \quad P(z) \equiv \rho_{-1}(z) \tag{4.19}$$

で、(1.5) より、

$$Q(z) \equiv \rho_1(z) = \langle z|\rho|z\rangle \tag{4.20}$$

を得る。

5 諸公式

A, B を $a, a^\dagger$ の関数とする。(1.7) より、

$$A\rho B = \int \frac{d^2 z}{\pi}\; \rho_s(z) A \Delta_s(z) B \tag{5.1}$$

である。また、(1.4) より、

$$A\Delta_s(z) B = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\; A D(\alpha, s) B e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \tag{5.2}$$

4) (1.4), (2.2) より、

$$\begin{aligned}
\Delta_s(z) &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\; e^{\frac{1+s}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\; e^{\frac{1+s}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} e^{-\alpha^* a} \int \frac{d^2\beta}{\pi}\; |\beta\rangle\langle\beta| e^{\alpha a^\dagger} \\
&= \int \frac{d^2\beta}{\pi}\; |\beta\rangle\langle\beta| \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\; e^{\frac{1+s}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha(z^* - \beta^*) + \alpha^*(z - \beta)}
\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\Delta_{-1}(z) &= \int \frac{d^2\beta}{\pi}\; |\beta\rangle\langle\beta| \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\; e^{-\alpha(z^* - \beta^*) + \alpha^*(z - \beta)} \\
&= \int \frac{d^2\beta}{\pi}\; |\beta\rangle\langle\beta| \pi \delta^2(z - \beta) \\
&= |z\rangle\langle z|.
\end{aligned}$$

である。$A\Delta_s(z)B$ が、

$$A\Delta_s(z)B \;=\; f_s^{AB}(z,z^*;\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z^*})\Delta_s(z) \tag{5.3}$$

の形にかけるので、(5.1) より、

$$\begin{aligned} A\rho B \;&=\; \int \frac{d^2z}{\pi}\;\rho_s(z)[f_s^{AB}(z,z^*;\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z^*})\Delta_s(z)] \\ &=\; \int \frac{d^2z}{\pi}\;[f_s'^{AB}(z,z^*;\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z^*})\rho_s(z)]\Delta_s(z) \end{aligned} \tag{5.4}$$

となる。$f_s'^{AB}$ は部分積分を実行して、微分を $\rho_s(z)$ に移したときの関数形である。上式は、

$$(A\rho B)_s(z) = f_s'^{AB}(z,z^*;\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z^*})\rho_s(z) \tag{5.5}$$

を意味する。$f_s'^{AB}$ を求めよう。(2.2) より、

$$\begin{aligned} D(\alpha,s) \;&=\; e^{\frac{1}{2}(s-1)|\alpha|^2}e^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha^* a} \\ &=\; e^{\frac{1}{2}(s+1)|\alpha|^2}e^{-\alpha^* a}e^{\alpha a^\dagger} \end{aligned} \tag{5.6}$$

であるから、

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}D(\alpha,s) \;=\; \big[\frac{1}{2}(s-1)\alpha^* + a^\dagger\big]D(\alpha,s) = D(\alpha,s)\big[\frac{1}{2}(s+1)\alpha^* + a^\dagger\big], \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*}D(\alpha,s) \;=\; D(\alpha,s)\big[\frac{1}{2}(s-1)\alpha - a\big] = \big[\frac{1}{2}(s+1)\alpha - a\big]D(\alpha,s) \tag{5.8}$$

であり、これより、

$$aD(\alpha,s) \;=\; \big[\frac{1}{2}(s+1)\alpha - \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\big]D(\alpha,s), \tag{5.9}$$

$$a^\dagger D(\alpha,s) \;=\; \big[-\frac{1}{2}(s-1)\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha}\big]D(\alpha,s), \tag{5.10}$$

$$D(\alpha,s)a \;=\; \big[\frac{1}{2}(s-1)\alpha^* - \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\big]D(\alpha,s), \tag{5.11}$$

$$D(\alpha,s)a^\dagger \;=\; \big[-\frac{1}{2}(s+1)\alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha}\big]D(\alpha,s) \tag{5.12}$$

を得る。これと (5.2) より、

$$\begin{aligned} a\Delta_s(z) \;&=\; \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\;aD(\alpha,s)e^{-\alpha z^*+\alpha^* z} \\ &=\; \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\;\big[\frac{1}{2}(s+1)\alpha D(\alpha,s) - \frac{\partial}{\partial\alpha^*}D(\alpha,s)\big]e^{-\alpha z^*+\alpha^* z} \\ &=\; \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\;\big[-\frac{1}{2}(s+1)D(\alpha,s)\frac{\partial}{\partial z^*}e^{-\alpha z^*+\alpha^* z} + D(\alpha,s)\frac{\partial}{\partial\alpha^*}e^{-\alpha z^*+\alpha^* z}\big] \\ &=\; \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\;\big[-\frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*} + z\big]D(\alpha,s)e^{-\alpha z^*+\alpha^* z} \\ &=\; \big[z - \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\Delta_s(z) \end{aligned} \tag{5.13}$$

同様に、

$$a^\dagger \Delta_s(z) = \big[z^* - \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\Delta_s(z), \tag{5.14}$$

$$\Delta_s(z) a = \big[z - \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\Delta_s(z), \tag{5.15}$$

$$\Delta_s(z) a^\dagger = \big[z^* - \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\Delta_s(z) \tag{5.16}$$

を得る。(5.1) より、

$$\begin{aligned} a\rho &= \int \frac{d^2 z}{\pi}\ \rho_s(z)\big[z - \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\Delta_s(z) \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi}\ \big\{\big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\rho_s(z)\big\}\Delta_s(z) \end{aligned} \tag{5.17}$$

つまり、

$$(a\rho)_s(z) = \big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\rho_s(z) \tag{5.18}$$

である。同様に、

$$(\rho a)_s(z) = \big[z + \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\rho_s(z), \tag{5.19}$$

$$(a^\dagger\rho)_s(z) = \big[z^* + \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\rho_s(z), \tag{5.20}$$

$$(\rho a^\dagger)_s(z) = \big[z^* + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\rho_s(z) \tag{5.21}$$

を得る。また、

$$(a^2\rho)_s(z) = \big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]^2\rho_s(z), \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} (a\rho a^\dagger)_s(z) &= \big[z^* + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\Big(\big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\rho_s(z)\Big) \\ &= \big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\Big(\big[z^* + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\rho_s(z)\Big), \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$(a^\dagger a\rho)_s(z) = \big[z^* + \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\Big(\big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\rho_s(z)\Big) \tag{5.24}$$

などである。

(5.18) から (5.21) は、ρ を任意の演算子としても成り立つ。いま、$s=1$ とすると、(4.6), (5.18) より、

$$([a^\dagger]^n)_1(z) = (z^*)^n, \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned} (a^m[a^\dagger]^n)_1(z) &= \big[z + \frac{\partial}{\partial z^*}\big]^m (z^*)^n \\ &= \sum_{r=0}^{m} {}_mC_r z^{m-r}\frac{\partial^r}{\partial z^{*r}} z^{*n} \\ &= \sum_{r=0}^{\min(n,m)} {}_mC_r z^{m-r}\frac{n!}{(n-r)!} z^{*(n-r)} \\ &= \sum_{r=0}^{\min(n,m)} \frac{m!n!}{r!(m-r)!(n-r)!} z^{m-r} z^{*(n-r)} \end{aligned} \tag{5.26}$$

である。また、(5.19) より、

$$(Fa^n)_1(z) \;=\; z^n F_1(z) \tag{5.27}$$

なので、

$$z^{m-r}z^{*(n-r)} \;=\; ([a^\dagger]^{n-r}a^{m-r})_1(z) \tag{5.28}$$

である。(5.26), (5.28) より、

$$a^m[a^\dagger]^n \;=\; \sum_{r=0}^{\min(n,m)} \frac{m!n!}{r!(m-r)!(n-r)!}[a^\dagger]^{n-r}a^{m-r} \tag{5.29}$$

を得る。

6　位相空間表現：伏見関数

今、

$$q \overset{\mathrm{def}}{=} L\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad p \overset{\mathrm{def}}{=} -i\frac{a-a^\dagger}{L\sqrt{2}} \tag{6.1}$$

とすると、

$$[q,p]=i \tag{6.2}$$

である。L は長さの次元を持つ。また、

$$\alpha \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x}{L}+iLk), \tag{6.3}$$

$$z \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{Q}{L}+iLP) \tag{6.4}$$

と置くと、

$$\alpha a^\dagger - \alpha^* a \;=\; i(qk-px), \tag{6.5}$$

$$-\alpha z^* + \alpha^* z \;=\; i(xP-Qk) \tag{6.6}$$

である。よって、(1.6) より、

$$\rho_s(P,Q) \overset{\mathrm{def}}{=} \rho_s(z) \;=\; \int \frac{dxdk}{2\pi}\; e^{i(xP-Qk)}e^{-\frac{s}{4}\left(\frac{x^2}{L^2}+L^2k^2\right)}\mathrm{Tr}[e^{i(qk-px)}\rho] \tag{6.7}$$

となる。

今、$|y\rangle$ を q の固有状態 $(q|y\rangle = y|y\rangle)$ とすると、

$$\mathrm{Tr}[e^{i(qk-px)}\rho] \;=\; \int dy\; \langle y|e^{i(qk-px)}\rho|y\rangle \tag{6.8}$$

であり、

$$e^{i(qk-px)} \;=\; e^{ikx/2}e^{iqk}e^{-ipx}, \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}\langle y|e^{i(qk-px)} \;&=\; e^{ikx/2}e^{iky}\langle y|e^{-ipx} \\ &=\; e^{ikx/2}e^{iky}\langle y-x|\end{aligned} \tag{6.10}$$

なので、

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[e^{i(qk-px)}\rho] &= \int dy\ e^{ikx/2} e^{iky} \langle y-x|\rho|y\rangle \\ &= \int e^{iky}\ \langle y-\frac{x}{2}|\rho|y+\frac{x}{2}\rangle \end{aligned} \tag{6.11}$$

である。よって、

$$\rho_s(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int dx \int dk \int dy\ e^{i(xP-Qk)} e^{-\frac{s}{4}\left(\frac{x^2}{L^2}+L^2k^2\right)} e^{iky}\ \langle y-\frac{x}{2}|\rho|y+\frac{x}{2}\rangle \tag{6.12}$$

である。特に、$s=0$ とすると、

$$\rho_0(P,Q) = \int dx\ e^{ixP}\ \langle Q-\frac{x}{2}|\rho|Q+\frac{x}{2}\rangle \tag{6.13}$$

となる。これは確かにウィグナー関数である。

$s\neq 0$ とする。k の積分は、

$$\int dk\ e^{-\frac{s}{4}L^2k^2+ik(x-Q)} = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-\frac{1}{sL^2}(x-Q)^2} \tag{6.14}$$

なので、

$$\rho_s(P,Q) = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{1}{\pi s}}\int dx \int dy\ \exp\Big[-\frac{s}{4}\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{sL^2}(x-Q)^2 + iPx\Big]\langle y-\frac{x}{2}|\rho|y+\frac{x}{2}\rangle \tag{6.15}$$

を得る。

伏見の 1940 年の論文 [3] では、

$$\rho_{\mathrm{cl}}(P,Q) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}\int d\bar{q}\int dr\ \exp\Big[-\frac{\gamma}{4}r^2 - \gamma(\bar{q}-Q)^2 + iPr\Big]\langle \bar{q}-\frac{r}{2}|\rho|\bar{q}+\frac{r}{2}\rangle \tag{6.16}$$

が与えられた。これは、

$$\rho_{\mathrm{cl}}(P,Q) = \rho_1(P,Q)\Big|_{L^2=1/\gamma} \tag{6.17}$$

である。

A　$D(\alpha)$ が完全形であることの証明

今、演算子 A に対して、

$$A' \overset{\text{def}}{=} \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)]D(\alpha) \tag{A.1}$$

とする。ところで、$\{|\alpha\rangle\}$ は完全系なので、$\mathrm{Tr}(\cdots) = \int \frac{d^2z}{\pi}\ \langle z|\cdots|z\rangle$ である。よって、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)] &= \int \frac{d^2z}{\pi}\ \langle z|AD^\dagger(\alpha)|z\rangle \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \ \langle z|A|w\rangle\langle w|D^\dagger(\alpha)|z\rangle \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \langle z|A|w\rangle\langle 0|D(-w)D(-\alpha)D(z)|0\rangle \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \langle z|A|w\rangle\langle 0|D(-w)D(-\alpha+z)|0\rangle e^{\frac{1}{2}(-\alpha z^*+\alpha^* z)} \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \langle z|A|w\rangle\langle 0|D(-\alpha+z-w)|0\rangle \\
&\quad \times \exp\big[-w\frac{1}{2}(-\alpha+z)^* + w^*\frac{1}{2}(-\alpha+z)\big]e^{\frac{1}{2}(-\alpha z^*+\alpha^* z)} \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \langle z|A|w\rangle \\
&\quad \times \exp\frac{1}{2}\big[-|-\alpha+z-w|^2 - (-\alpha+z)w^* + (-\alpha+z)^*w - \alpha z^* + \alpha^* z\big] \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \langle z|A|w\rangle \exp\big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|z|^2+|w|^2) + zw^* + z\alpha^* - \alpha w^*\big]
\end{aligned} \tag{A.2}$$

となる。ただし、(2.3), (2.4) を使った。この計算より、

$$\langle\beta|D(\alpha)|\gamma\rangle\ =\ \exp\big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2) + \gamma\beta^* - \gamma\alpha^* + \beta^*\alpha\big] \tag{A.3}$$

である。(A.1), (A.2), (A.3) より、

$$\begin{aligned}
\langle\beta|A'|\gamma\rangle &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)]\langle\beta|D(\alpha)|\gamma\rangle \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)]\exp\big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2) + \gamma\beta^* - \gamma\alpha^* + \beta^*\alpha\big] \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \int \frac{d^2z}{\pi}\ \int \frac{d^2w}{\pi}\langle z|A|w\rangle \exp\big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|z|^2+|w|^2) + zw^* + z\alpha^* - \alpha w^*\big] \\
&\quad \times \exp\big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2) + \gamma\beta^* - \gamma\alpha^* + \beta^*\alpha\big] \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \int \frac{d^2z}{\pi}\ \int \frac{d^2w}{\pi}\langle z|A|w\rangle \exp\big[-|\alpha|^2 + \alpha^*(z-\gamma) + \alpha(\beta^*-w^*)\big] \\
&\quad \times \exp\big[-\frac{1}{2}(|z|^2+|w|^2) + zw^* - \frac{1}{2}(|\beta|^2+|\gamma|^2) + \gamma\beta^*\big].
\end{aligned} \tag{A.4}$$

今、

$$\alpha = a + ib, \quad z - \gamma = \mathcal{A}, \quad \beta^* - w^* = \mathcal{B} \tag{A.5}$$

とかくと、

$$
\begin{aligned}
& -|\alpha|^2+\alpha^*(z-\gamma)+\alpha(\beta^*-w^*) \\
=\ & -a^2-b^2+(a-ib)\mathcal{A}+(a+ib)\mathcal{B} \\
=\ & -a(a-\mathcal{A}-\mathcal{B})-b(b+i\mathcal{A}-i\mathcal{B}) \\
=\ & -(a-[\mathcal{A}+\mathcal{B}]/2)^2+(\mathcal{A}+\mathcal{B})^2/4-(b+i[\mathcal{A}-\mathcal{B}]/2)+i^2(\mathcal{A}-\mathcal{B})^2/4 \\
=\ & -(a-[\mathcal{A}+\mathcal{B}]/2)^2-(b+i[\mathcal{A}-\mathcal{B}]/2)+\mathcal{A}\mathcal{B}
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
& \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \exp\big[-|\alpha|^2+\alpha^*(z-\gamma)+\alpha(\beta^*-w^*)\big] \\
=\ & \frac{1}{\pi}(\sqrt{\pi})^2\exp[\mathcal{A}\mathcal{B}] \\
=\ & \exp[(z-\gamma)(\beta^*-w^*)] \\
=\ & \exp[\beta^*z-zw^*-\gamma\beta^*+w^*\gamma]
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

となる。従って、

$$
\begin{aligned}
(A.4)\ =\ & \int\int\frac{d^2z}{\pi}\int\frac{d^2w}{\pi}\ \langle z|A|w\rangle\exp\big[-\frac{1}{2}(|z|^2+|w|^2)+\beta^*z-\frac{1}{2}(|\beta|^2+|\gamma|^2)+w^*\gamma\big] \\
=\ & \int\int\frac{d^2z}{\pi}\int\frac{d^2w}{\pi}\ \langle\beta|z\rangle\langle z|A|w\rangle\langle w|\gamma\rangle \\
=\ & \langle\beta|A|\gamma\rangle
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

を得る。これが任意の $|\beta\rangle, |\gamma\rangle$ について成り立つので、

$$
A' = A \tag{A.9}
$$

である。つまり、(A.1) は、

$$
A = \int\frac{d^2\alpha}{\pi}\ \mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)]D(\alpha) \tag{A.10}
$$

となる。

参考文献

[1] 柴田 文明・有光 敏彦・番 雅司・北島 佐知子『量子と非平衡系の物理』(東京大学出版, 2009).

[2] K. E. Cahill and R. J. Glauber, "Density Operators and Quasiprobability Distributions", Phys. Rev. **177**, 1882 (1969).

[3] Kodi Husimi, "Some Formal Properties of the Density Matrix", Proc. Phys.-Math. Soc. Jpn. **22**, 264 (1940).