惑星による近日点移動

中嶋 慧

March 25, 2024

Abstract

この記事では、惑星による近日点移動について述べる。

Contents

1　ラグランジュの惑星方程式

ラグランジュの惑星方程式は、

$$\boldsymbol{x} = {}^t(a, e, I, \Omega, \varpi, \varepsilon) \tag{1.1}$$

についての連立1解微分方程式である：

$$\frac{dx^k}{dt} = F^k(\boldsymbol{x}). \tag{1.2}$$

a は長半径, e は離心率, I は軌道傾斜角であり、

$$\varpi := \omega + \Omega \tag{1.3}$$

であり、ω は近点引数, Ω は昇交点経度である。ϖ は近日点経度である。l を平均近点離角とし、$l = nt + \sigma$ とおく。n は、

$$n = ka^{-3/2}, \quad k = \sqrt{G(M+m)} \tag{1.4}$$

から決まる a の関数である。m は (注目) 惑星の質量で、M は太陽質量である。ε は、

$$\varepsilon = \sigma + \omega + \Omega \tag{1.5}$$

である。また、平均経度 λ は、$\lambda = nt + \varepsilon =: \rho + \varepsilon^I$ である。ρ は、

$$\frac{d\rho}{dt} = n \tag{1.6}$$

で決まる。ε の代わりに ε^I を使ってもよい。

特に、

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{I}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial I} \tag{1.7}$$

である [1]。R は摂動関数である。無摂動の系を太陽の周りを周る水星とし、他の惑星 (摂動天体) による摂動を考えると、

$$R = \frac{Gm_1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}|} - \frac{Gm_1}{|\boldsymbol{r}_1|^3}\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r} \tag{1.8}$$

である。添え字1は摂動天体を表す。

さて、

$$x^k = x_0^k + \delta_1 x^k + \delta_2 x^k + \cdots \tag{1.9}$$

と摂動展開する。x_0^k は無摂動の値であり、1次摂動 $\delta_1 x^k$ は、

$$\frac{d\delta_1 x^k}{dt} = F^k(\boldsymbol{x}_0) \tag{1.10}$$

で決まる。この近似で (1.7) は、

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{1}{n_0 a_0^2}\Big[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{I}{2}}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial I}\Big]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \tag{1.11}$$

となる。以下、1次摂動の範囲で議論する。

2　摂動関数の展開

R の永年部を e, e_1, $\sin I$, $\sin I_1$ の 2 次まで求める。
さて、

$$
\begin{aligned}
x &= r(\cos\Omega\cos\eta - \sin\Omega\sin\eta\cos I), && (2.1)\\
y &= r(\sin\Omega\cos\eta + \cos\Omega\sin\eta\cos I), && (2.2)\\
z &= \sin\eta\sin I, && (2.3)\\
\eta &= \omega + \varphi && (2.4)
\end{aligned}
$$

である [1]。φ は真近点角で、f と書かれることが多い。r は、

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}\\
&= a(1 - e\cos\varphi - e^2\sin^2\varphi + \cdots) && (2.5)
\end{aligned}
$$

である。また、

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}|^2 &= r_1^2 + r^2 - 2r_1 r f(I, I_1) \equiv \Delta^2 \equiv [\Delta(I, I_1)]^2, && (2.6)\\
f(I, I_1) &= (\cos\Omega_1\cos\eta_1 - \sin\Omega_1\sin\eta_1\cos I_1)(\cos\Omega\cos\eta - \sin\Omega\sin\eta\cos I)\\
&\quad +(\sin\Omega_1\cos\eta_1 + \cos\Omega_1\sin\eta_1\cos I_1)(\sin\Omega\cos\eta + \cos\Omega\sin\eta\cos I)\\
&\quad +\sin\eta_1\sin\eta\sin I_1\sin I && (2.7)
\end{aligned}
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &= \cos(\Omega_1 + \eta_1)\cos(\Omega + \eta) + \sin(\Omega_1 + \eta_1)\sin(\Omega + \eta)\\
&= \cos(\Omega_1 - \Omega + \eta_1 - \eta)\\
&= \cos(\eta_1' - \eta'), \quad \eta' := \eta + \Omega && (2.8)
\end{aligned}
$$

である。$f(I, I_1)$ は以下のように展開できる：

$$
\begin{aligned}
f(I, I_1) &= f(0,0) + f_2(I, I_1) + \mathcal{O}(\sin I, \sin I_1)^4, && (2.9)\\
f_2(I, I_1) &= \sin\eta_1\sin\eta\sin I_1\sin I + \frac{1}{2}\sin^2 I_1\sin\eta_1\big[\sin\Omega_1\cos(\Omega+\eta) - \cos\Omega_1\sin(\Omega+\eta)\big]\\
&\quad +\frac{1}{2}\sin^2 I\sin\eta\big[\sin\Omega\cos(\Omega_1+\eta_1) - \cos\Omega\sin(\Omega_1+\eta_1)\big]\\
&= \sin\eta_1\sin\eta\sin I_1\sin I + \frac{1}{2}\sin^2 I_1\sin\eta_1\sin(\Omega_1 - \Omega - \eta)\\
&\quad +\frac{1}{2}\sin^2 I\sin\eta\sin(\Omega - \Omega_1 - \eta_1)\\
&= \sin\eta_1\sin\eta\sin I_1\sin I + \frac{1}{2}\sin^2 I_1\frac{1}{2}[-\cos(\eta_1' - \eta') + \cos(-\eta_1 + \Omega_1 - \eta')]\\
&\quad +\frac{1}{2}\sin^2 I\frac{1}{2}[-\cos(\eta_1' - \eta') + \cos(-\eta + \Omega - \eta_1')]. && (2.10)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{O}(\sin I, \sin I_1)^4$ は、$\sin I$, $\sin I_1$ について 4 次以上の項である。よって、

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \Delta_0^2 + F_2 + \mathcal{O}(\sin I, \sin I_1)^4, &(2.11)\\ \Delta_0^2 &= [\Delta(0,0)]^2 = r_1^2 + r^2 - 2r_1 r\cos(\eta_1' - \eta'), &(2.12)\\ F_2 &= -2r_1 r f_2(I, I_1) &(2.13)\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{\Delta_0}\Big[1 + \frac{F_2}{\Delta_0^2} + \mathcal{O}(\sin I, \sin I_1)^4\Big]^{-1/2}\\ &= \frac{1}{\Delta_0} - \frac{1}{2}\frac{F_2}{\Delta_0^3} + \mathcal{O}(\sin I, \sin I_1)^4\\ &= \frac{1}{\Delta_0} + \frac{r_1 r f_2(I, I_1)}{\Delta_0^3} + \mathcal{O}(\sin I, \sin I_1)^4 &(2.14)\end{aligned}$$

を得る。
　ところで、

$$\frac{1}{(1+\alpha^2 - 2\alpha x)^\kappa} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\kappa)}(x)\alpha^n \tag{2.15}$$

であり、

$$\begin{aligned} C_n^{(\kappa)}(\cos\theta) &= \frac{1}{[\Gamma(\kappa)]^2}\sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(\kappa+r)\Gamma(\kappa+n-r)}{r!(n-r)!}\cos[(2r-n)\theta]\\ &\equiv \sum_{r=0}^{n} C_{n,r}^{(\kappa)}\cos[(2r-n)\theta] &(2.16)\end{aligned}$$

である。$C_n^{(\kappa)}(x)$ は Gegenbauer 多項式である。$r_1 > r$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1/2)}(\cos(\eta_1' - \eta'))\frac{1}{r_1}\Big(\frac{r}{r_1}\Big)^n, &(2.17)\\ \frac{1}{\Delta_0^3} &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3/2)}(\cos(\eta_1' - \eta'))\frac{1}{r_1^3}\Big(\frac{r}{r_1}\Big)^n &(2.18)\end{aligned}$$

となる。
　$\bullet$ の無摂動値 $\boldsymbol{x}_0$ に対する長時間平均を $\langle\bullet\rangle_0$ とする。$f_i(t)$ $(i = 1, 2)$ が周期 T_i の周期関数で、T_1/T_2 が無理数のとき、

$$\langle f_1(t) f_2(t)\rangle_0 = \langle f_1(t)\rangle_0 \langle f_2(t)\rangle_0$$

である。今、

$$\begin{aligned} \Big\langle\frac{1}{\Delta_0}\Big\rangle_0 &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big\langle C_n^{(1/2)}(\cos(\eta_1' - \eta'))\frac{1}{r_1}\Big(\frac{r}{r_1}\Big)^n\Big\rangle_0\\ &\equiv M(e, e_1) \equiv M(0,0) + Ae^2 + Bee_1 + Ce_1^2 + \cdots &(2.19)\end{aligned}$$

と置く。ここで、e は離心率である。さて、

$$M(e,0) = \sum_{m=0}^{\infty} C^{(1/2)}_{2m,m}\Big\langle \frac{1}{a_1}\Big(\frac{r}{a_1}\Big)^{2m}\Big\rangle_0$$
$$\equiv \sum_{m=0}^{\infty} M_m(e,0), \tag{2.20}$$
$$M_m(e,0) = M_m(0,0) + A_m e^2 + \cdots \tag{2.21}$$

である。まず A_m, A を求める。そのために、無摂動では、

$$nt = u - eu\sin u\,, \quad r = a(1-e\cos u)\,, \quad n = \frac{2\pi}{\tau} \tag{2.22}$$

であることを使う。τ は周期である。よって、

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} dt\ f(r(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} du\ (1-e\cos u) f(a(1-e\cos u)) \tag{2.23}$$

となる。よって、

$$M_m(e,0) = \Big\langle \frac{1}{a_1}\Big(\frac{r}{a_1}\Big)^{2m}\Big\rangle_0$$
$$= \frac{\alpha^{2m}}{a_1}\Big(1 + m\big(m+\frac{1}{2}\big)e^2 + \mathcal{O}(e^4)\Big) \tag{2.24}$$

となる。ここで、

$$\alpha := \frac{a}{a_1} \tag{2.25}$$

である。よって、

$$A_m = \frac{\alpha^{2m}}{a_1} m\big(m+\frac{1}{2}\big) \tag{2.26}$$

である。また、

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} C^{(1/2)}_{2m,m} m\big(m+\frac{1}{2}\big)\frac{\alpha^{2m}}{a_1}$$
$$= \frac{1}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(m+1/2)\Gamma(m+3/2)}{(m-1)!m![\Gamma(1/2)]^2}\frac{\alpha^{2m}}{a_1}$$
$$= \frac{1}{2a_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1/2)_m(3/2)_m}{(m-1)!m!}\alpha^{2m}$$
$$= \frac{\alpha^2}{2a_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1/2)_{m+1}(3/2)_{m+1}}{(2)_m m!}\alpha^{2m}$$
$$= \frac{3\alpha^2}{8a_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(3/2)_m(5/2)_m}{(2)_m m!}\alpha^{2m}$$
$$= \frac{3\alpha^2}{8a_1}F\Big(\frac{3}{2},\frac{5}{2},2;\alpha^2\Big) \tag{2.27}$$

である。ここで、

$$(x)_0 := 1, \tag{2.28}$$

$$(x)_m := \prod_{r=0}^{m-1}(x+r) \tag{2.29}$$

であり、

$$F(a,b,c,z) := \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m m!}z^m \tag{2.30}$$

は超幾何関数である。$(x)_{m+1} = (x+1)_m x$ を用いた。今、

$$b_{3/2}^{(1)}(\alpha) := 3\alpha F\Big(\frac{3}{2},\frac{5}{2},2;\alpha^2\Big) \tag{2.31}$$

とすると、

$$A = \frac{\alpha}{8a_1}b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \tag{2.32}$$

である。$b_{3/2}^{(1)}(\alpha)$ はラプラス係数と呼ばれる。
　次に B を求める。(2.5) より、

$$r^n = a^n(1 - en\cos\varphi + \mathcal{O}(e^2)) \tag{2.33}$$

である。また、

$$\cos(\eta_1' - \eta') = \cos(\varpi_1 + \varphi_1 - \varpi - \varphi) \tag{2.34}$$

である。無摂動では、

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}, \quad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \tag{2.35}$$

である。μ は太陽との相対質量である。これより、

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\ f(\varphi(t)) = \frac{1}{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}\int_0^{2\pi} d\varphi\ r^2 f(\varphi), \tag{2.36}$$

$$\frac{1}{\tau_1}\int_0^\tau dt\ f(\varphi_1(t)) = \frac{1}{2\pi a_1^2\sqrt{1-e_1^2}}\int_0^{2\pi} d\varphi_1\ r_1^2 f(\varphi_1) \tag{2.37}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} B &= -\sum_{m=1}^{\infty} 2C^{(1/2)}_{2m+1,m+1}(2m+3)2m\frac{\alpha^{2m+1}}{a_1}\frac{1}{4}\cos(\varpi_1 - \varpi) \\ &= -2\cos(\varpi_1 - \varpi)\frac{\alpha}{a_1}\sum_{m=1}^{\infty} C^{(1/2)}_{2m+1,m+1}\big(m+\frac{3}{2}\big)m\alpha^{2m} \end{aligned} \tag{2.38}$$

である。ここで、

$$C^{(1/2)}_{2m+1,m+1} = \frac{1}{[\Gamma(1/2)]^2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m+1)\Gamma(\frac{1}{2}+m)}{(m+1)!m!}, \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} C^{(1/2)}_{2m+1,m+1}(m+\frac{3}{2})m &= \frac{1}{[\Gamma(1/2)]^2}\frac{\Gamma(m+\frac{5}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})}{(m+1)!(m-1)!} \\ &= \frac{3}{4}\frac{(\frac{1}{2})_m(\frac{5}{2})_m}{(m+1)!(m-1)!} \end{aligned} \tag{2.40}$$

であり、

$$\begin{aligned} B &= -\frac{3}{2}\cos(\varpi_1-\varpi)\frac{\alpha^3}{a_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})_{m+1}(\frac{5}{2})_{m+1}}{2(3)_m m!}\alpha^{2m} \\ &= -\frac{15}{16}\cos(\varpi_1-\varpi)\frac{\alpha^3}{a_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\frac{3}{2})_m(\frac{7}{2})_m}{(3)_m m!}\alpha^{2m} \\ &= -\frac{15}{16}\cos(\varpi_1-\varpi)\frac{\alpha^3}{a_1}F\Big(\frac{3}{2},\frac{7}{2},3;\alpha^2\Big) \end{aligned} \tag{2.41}$$

となる。今、

$$b^{(2)}_{3/2}(\alpha) := \frac{15}{4}\alpha^2 F\Big(\frac{3}{2},\frac{7}{2},3;\alpha^2\Big) \tag{2.42}$$

とすると、

$$B = -\frac{\alpha}{4a_1}b^{(2)}_{3/2}(\alpha)\cos(\varpi_1-\varpi) \tag{2.43}$$

となる。$b^{(2)}_{3/2}(\alpha)$ もラプラス係数と呼ばれる。ラプラス係数の一般形は (4.4) である。

C は求めても、ラグランジュの惑星方程式には効かないので、とばず。実は $C = A$ である。

次に、

$$\Big\langle\frac{r_1 r f_2(I,I_1)}{\Delta_0^3}\Big\rangle_0 = D\sin^2 I + D'\sin^2 I_1 + E\sin I\sin I_1 \tag{2.44}$$

と置き、D, D', E を求める。e, e_1, $\sin I$, $\sin I_1$ の 2 次まで求める近似では、

$$\Big\langle\frac{r_1 r f_2(I,I_1)}{\Delta_0^3}\Big\rangle_0 = a_1 a\Big\langle\frac{f_2(I,I_1)}{\Delta_0^3}\Big|_{e=e_1=0}\Big\rangle_0 \tag{2.45}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} D &= \frac{\alpha}{4a_1}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\Big\langle C^{(3/2)}_n(\cos(\eta_1'-\eta'))[-\cos(\eta_1'-\eta')+\cos(-\eta+\Omega-\eta_1')]\Big\rangle_0 \\ &= -\frac{\alpha}{4a_1}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\Big\langle C^{(3/2)}_n(\cos(\eta_1'-\eta'))\cos(\eta_1'-\eta')\Big\rangle_0 \\ &= -\frac{\alpha}{4a_1}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^{2m+1}2C^{(3/2)}_{2m+1,m}\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.46}$$

となる。ここで、

$$C^{(3/2)}_{2m+1,m} = \frac{1}{[\Gamma(\frac{3}{2})]^2}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+m)\Gamma(\frac{3}{2}+m+1)}{m!(m+1)!} = \frac{3}{2}\frac{(\frac{3}{2})_m(\frac{5}{2})_m}{(2)_m m!} \tag{2.47}$$

なので、

$$D = \frac{3\alpha^2}{8a_1}F\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},2;\alpha^2\right) = -\frac{\alpha}{8a_1}b^{(1)}_{3/2}(\alpha) = -A \tag{2.48}$$

である。同様にして $D' = D$ となる。

E を求める：

$$E = \frac{\alpha}{a_1}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\left\langle C^{(3/2)}_n(\cos(\eta_1'-\eta'))\sin\eta_1\sin\eta\right\rangle_0. \tag{2.49}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\cos(\eta_1'-\eta') &= \cos(\Omega_1-\Omega+\eta_1-\eta)\\ &= \cos(\Omega_1-\Omega)\cos(\eta_1-\eta)-\sin(\Omega_1-\Omega)\sin(\eta_1-\eta)\\ &= \cos(\Omega_1-\Omega)(\cos\eta_1\cos\eta+\sin\eta_1\sin\eta)\\ &\quad -\sin(\Omega_1-\Omega)\sin(\eta_1-\eta)(\sin\eta_1\cos\eta-\cos\eta_1\sin\eta)\end{aligned} \tag{2.50}$$

なので、

$$\left\langle\cos(\eta_1'-\eta')\sin\eta_1\sin\eta\right\rangle_0 = \frac{1}{4}\cos(\Omega_1-\Omega), \tag{2.51}$$

$$\left\langle\cos n(\eta_1'-\eta')\sin\eta_1\sin\eta\right\rangle_0 = \frac{1}{4}(\delta_{n,1}+\delta_{n,-1})\cos(\Omega_1-\Omega) \tag{2.52}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}E &= \frac{\alpha}{2a_1}\cos(\Omega_1-\Omega)\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^{2m+1}C^{(3/2)}_{2m+1,n}\\ &= \frac{\alpha}{2a_1}\cos(\Omega_1-\Omega)\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^{2m+1}\frac{3}{2}\frac{(\frac{3}{2})_m(\frac{5}{2})_m}{(2)_m m!}\\ &= \frac{3\alpha^2}{4a_1}\cos(\Omega_1-\Omega)F\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},2;\alpha^2\right)\\ &= \frac{\alpha}{4a_1}b^{(1)}_{3/2}(\alpha)\cos(\Omega_1-\Omega) = 2A\cos(\Omega_1-\Omega)\end{aligned} \tag{2.53}$$

である。

また、

$$-\frac{\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}_1|^3} = -\frac{rf(I,I_1)}{r_1^2} = -\frac{rf(0,0)}{r_1^2}-\frac{rf_2(I,I_1)}{r_1^2}+\cdots \tag{2.54}$$

の永年部は 0 である。よって、R の永年部は、定数を落とすと、

$$
\begin{aligned}
\langle R\rangle_0 &\approx Gm_1(Ae^2 + Bee_1 + Ce_1 + D\sin^2 I + D'\sin^2 I_1 + E\sin I\sin I_1) \\
&\approx Gm_1(Ae^2 + Bee_1 + D\sin^2 I + E\sin I\sin I_1) \\
&= \frac{Gm_1}{8a_1}\Big[\alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha)\{e^2 - \sin^2 I + 2\sin I\sin I_1\cos(\Omega_1 - \Omega)\} \\
&\quad -2ee_1\alpha b_{3/2}^{(2)}(\alpha)\cos(\varpi_1 - \varpi)\Big] \qquad (2.55)
\end{aligned}
$$

となる。$\approx$ は (1.11) に効かない項を落とすという意味である。この結果は [3] と一致する。なお、$\varpi = \omega + \Omega$ であった。

Table 1: 水星の近日点移動の大きさ /(秒角 / 世紀)

惑星	$e_1 = I = I_1 = 0$	$I = I_1 = 0$	(3.5) 式	Newcomb	Le Verrier
金星	280.21	276.71	275.47	276.38	280.6
地球	94.53	91.24	90.51	91.41	83.6
火星	2.37	2.44	2.42	2.48	2.6
木星	156.96	155.40	154.32	153.98	152.6
土星	7.53	7.43	7.38	7.31	7.2
天王星	0.14	0.14	0.14	0.14	0.1
海王星	0.04	0.04	0.04	0.04	
合計	541.78	533.41	530.30	531.75	526.7

3　水星の近日点移動

今、

$$\langle R \rangle_0 = \frac{Gm_1}{a_1}\tilde{R} \tag{3.1}$$

と書くと、(1.11) は、

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{m_1}{M}n\alpha\Big[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial e} + \frac{\tan\frac{I}{2}}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \tilde{R}}{\partial I}\Big] \tag{3.2}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{x}_0$ を単に $\boldsymbol{x}$ と書いた。上式を得るのに、

$$n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \tag{3.3}$$

より、

$$\frac{G}{n} = \frac{n}{M}a^3 \tag{3.4}$$

であることを用いた。M は太陽質量である (正確には、太陽質量に水星の質量を足したものである)。(2.55) を代入して、

$$\begin{aligned}\frac{d\varpi}{dt} = \frac{m_1}{4M}n\sqrt{1-e^2}\alpha^2\left[b^{(1)}_{3/2}(\alpha) - \frac{e_1}{e}b^{(2)}_{3/2}(\alpha)\cos(\varpi_1 - \varpi)\right] \\ -\frac{m_1}{2M\sqrt{1-e^2}}n\alpha^2 b^{(1)}_{3/2}(\alpha)\cos I\left[\sin^2\frac{I}{2} - \frac{1}{2}\tan\frac{I}{2}\sin I_1\cos(\Omega_1 - \Omega)\right]\end{aligned} \tag{3.5}$$

を得る。

Table 1 に水星の近日点移動の大きさについての計算結果を示す。一番左が $e_1 = I = I_1 = 0$ とした近似である。左から 2 番目は $I = I_1 = 0$ とした近似である。真ん中が (3.5) を使った結果である。この 3 つには 2023 年の『理科年表』の数値を用いた。Newcomb の欄は S. Newcomb が 1895 年に与えた値である [2]。Le Verrier の欄は Le Verrier が 1859 年に与えた値である [2]。Bretagnon の 1982 年の計算によると、惑星による影響の合計は 529.90 秒角 / 世紀である。

4　摂動関数の高次展開

摂動関数の高次展開については、[4, 5] が詳しい。

4.1　[4] の結果

[4] の結果を引用する。摂動関数の永年部は、$e, e_1, \sin\frac{I}{2}, \sin\frac{I_1}{2}$ の 4 次まで、

$$\langle R\rangle = \frac{Gm_1}{a_1}\Big[\frac{1}{2}b^{(0)}_{1/2}(\alpha) + \frac{1}{8}\alpha b^{(1)}_{3/2}(\alpha)\{e^2 + e_1^2 - 4\sin^2\frac{I}{2} - 4\sin^2\frac{I_1}{2} + 8\sin\frac{I}{2}\sin\frac{I_1}{2}\cos(\Omega_1 - \Omega)\}$$
$$-\frac{1}{4}\alpha b^{(2)}_{3/2}(\alpha)\cos(\varpi_1 - \varpi)ee_1 + \tilde{R}_4\Big] \tag{4.1}$$

となる。$\tilde{R}_4$ は 4 次の効果ある：

$$\begin{aligned}\tilde{R}_4 = {} & f_4e^4 + f_5e^2e_1^2 + f_6e_1^4 + f_7(e^2s^2 + e_1^2s^2 + e^2s_1^2 + e_1^2s_1^2) + f_8(s^4 + s_1^4) + f_9s^2s_1^2\\ & + \cos(\varpi_1 - \varpi)[f_{11}e^3e_1 + f_{12}ee_1^3 + f_{13}ee_1(s^2 + s_1^2)]\\ & + \cos(\Omega_1 - \Omega)[f_{15}ss_1(e^2 + e_1^2) + f_{16}ss_1(s^2 + s_1^2)]\\ & + \cos(2\varpi_1 - 2\varpi)f_{17}e^2e_1^2 + \cos(2\varpi - 2\Omega)f_{18}e^2s^2 + \cos(\varpi_1 + \varpi - 2\Omega)f_{19}ee_1s^2\\ & + \cos(2\varpi_1 - 2\Omega)f_{20}e_1^2s^2 + \cos(2\varpi - \Omega_1 - \Omega)f_{21}e^2ss_1\\ & + \cos(\varpi_1 - \varpi - \Omega_1 + \Omega)f_{22}ee_1ss_1 + \cos(\varpi_1 - \varpi + \Omega_1 - \Omega)f_{23}ee_1ss_1\\ & + \cos(\varpi_1 + \varpi - \Omega_1 - \Omega)f_{24}ee_1ss_1 + \cos(2\varpi_1 - \Omega_1 - \Omega)f_{25}e_1^2ss_1\\ & + \cos(2\varpi - 2\Omega_1)f_{18}e^2s_1^2 + \cos(\varpi_1 + \varpi - 2\Omega_1)f_{19}ee_1s_1^2\\ & + \cos(2\varpi_1 - 2\Omega_1)f_{20}e_1^2s_1^2 + \cos(2\Omega_1 - 2\Omega)f_{26}s^2s_1^2.\end{aligned} \tag{4.2}$$

ここで、

$$s := \sin\frac{I}{2}, \quad s_1 := \sin\frac{I_1}{2} \tag{4.3}$$

である。いま、ラプラス係数 $b^{(k)}_s(\alpha)$ を、

$$b^{(k)}_s(\alpha) = \frac{2f_{s,k}}{k!}\alpha^k F(s, s+k, k+1; \alpha^2), \tag{4.4}$$

$$f_{s,k} = s(s+1)\cdots(s+k-1), \quad f_{s,0} = 1 \tag{4.5}$$

で定義すると、$f_k(k = 4, 5, \cdots, 9, 11, 12, 13, 15, 16, \cdots, 26)$ は以下である：

$$f_4 = \frac{1}{128}(4\alpha^3D^3 + \alpha^4D^4)b^{(0)}_{1/2}(\alpha) \quad (D := \frac{d}{d\alpha}), \tag{4.6}$$

$$f_5 = \frac{1}{32}(4\alpha D + 14\alpha^2D^2 + 8\alpha^3D^3 + \alpha^4D^4)b^{(0)}_{1/2}(\alpha), \tag{4.7}$$

$$f_6 = \frac{1}{128}(24\alpha D + 36\alpha^2D^2 + 12\alpha^3D^3 + \alpha^4D^4)b^{(0)}_{1/2}(\alpha), \tag{4.8}$$

$$f_7 = -\frac{\alpha}{8}(2 + 4\alpha D + \alpha^2D^2)b^{(1)}_{3/2}(\alpha), \tag{4.9}$$

$$f_8 = \frac{3}{4}\alpha^2b^{(0)}_{5/2}(\alpha) + \frac{3}{8}\alpha^2b^{(2)}_{5/2}(\alpha), \tag{4.10}$$

$$f_9 = \frac{1}{2}\alpha b^{(1)}_{3/2}(\alpha) + \frac{15}{4}\alpha^2b^{(0)}_{5/2}(\alpha) + \frac{3}{4}\alpha^2b^{(2)}_{5/2}(\alpha), \tag{4.11}$$

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= -\frac{1}{32}(4\alpha^2 D^2 + 6\alpha^3 D^3 + \alpha^4 D^4) b_{1/2}^{(1)}(\alpha), && (4.12)\\
f_{12} &= \frac{1}{32}(4 - 4\alpha D - 22\alpha^2 D^2 - 10\alpha^3 D^3 - \alpha^4 D^4) b_{1/2}^{(1)}(\alpha), && (4.13)\\
f_{13} &= \frac{\alpha}{8}(4\alpha D + \alpha^2 D^2)[b_{3/2}^{(0)}(\alpha) + b_{3/2}^{(2)}(\alpha)], && (4.14)\\
f_{15} &= \frac{\alpha}{4}(2 + 4\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{3/2}^{(1)}(\alpha), && (4.15)\\
f_{16} &= -\frac{1}{2}\alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha) - 3\alpha^2 b_{5/2}^{(0)}(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha^2 b_{5/2}^{(2)}(\alpha), && (4.16)\\
f_{17} &= \frac{1}{64}(12 - 12\alpha D + 6\alpha^2 D^2 + 8\alpha^3 D^3 + \alpha^4 D^4) b_{1/2}^{(2)}(\alpha), && (4.17)\\
f_{18} &= \frac{\alpha}{16}(12 + 8\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{3/2}^{(1)}(\alpha), && (4.18)\\
f_{19} &= -\frac{\alpha}{8}(4\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{3/2}^{(0)}(\alpha), && (4.19)\\
f_{20} &= \frac{1}{16}\alpha^3 D^2 b_{3/2}^{(1)}(\alpha), && (4.20)\\
f_{21} &= -\frac{\alpha}{8}(12 + 8\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{3/2}^{(1)}(\alpha), && (4.21)\\
f_{22} &= -\frac{\alpha}{4}(4\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{3/2}^{(0)}(\alpha), && (4.22)\\
f_{23} &= -\frac{\alpha}{4}(4\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{3/2}^{(2)}(\alpha), && (4.23)\\
f_{24} &= \frac{\alpha}{4}(4\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{3/2}^{(0)}(\alpha), && (4.24)\\
f_{25} &= -\frac{1}{8}\alpha^3 D^2 b_{3/2}^{(1)}(\alpha), && (4.25)\\
f_{26} &= \frac{1}{2}\alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha) + \frac{3}{4}\alpha^2 b_{5/2}^{(0)}(\alpha) + \frac{3}{2}\alpha^2 b_{5/2}^{(2)}(\alpha). && (4.26)
\end{aligned}
$$

ただし、$D = d/d\alpha$ である。また、

$$
b_s^{(-k)} := b_s^{(k)} \tag{4.27}
$$

とすると、

$$
Db_s^{(k)} = s(b_{s+1}^{(k-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(k)} + b_{s+1}^{(k+1)}) \tag{4.28}
$$

である。$n \geq 2$ のとき、

$$
\begin{aligned}
D^n b_s^{(k)} &= D^{n-1} s(b_{s+1}^{(k-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(k)} + b_{s+1}^{(k+1)})\\
&= s(D^{n-1} b_{s+1}^{(k-1)} - 2\alpha D^{n-1} b_{s+1}^{(k)} + D^{n-1} b_{s+1}^{(k+1)} - 2(n-1) D^{n-2} b_{s+1}^{(k)}) && (4.29)
\end{aligned}
$$

である。$n = 2, 3, 4$ として、

$$
\begin{aligned}
D^2 b_s^{(k)} &= s(Db_{s+1}^{(k-1)} - 2\alpha Db_{s+1}^{(k)} + Db_{s+1}^{(k+1)} - 2b_{s+1}^{(k)}), && (4.30)\\
D^3 b_s^{(k)} &= s(D^2 b_{s+1}^{(k-1)} - 2\alpha D^2 b_{s+1}^{(k)} + D^2 b_{s+1}^{(k+1)} - 4Db_{s+1}^{(k)}), && (4.31)\\
D^4 b_s^{(k)} &= s(D^3 b_{s+1}^{(k-1)} - 2\alpha D^3 b_{s+1}^{(k)} + D^3 b_{s+1}^{(k+1)} - 6D^2 b_{s+1}^{(k)}) && (4.32)
\end{aligned}
$$

を得る。

Table 2: 水星の近日点移動の大きさ /(秒角 / 世紀)：その 2

惑星	(3.5) 式	(4.1) 式	フル	Newcomb	Le Verrier	Bretagnon
金星	275.47	276.82	275.95	276.38	280.6	
地球	90.51	90.13	90.10	91.41	83.6	
火星	2.42	2.46	2.46	2.48	2.6	
木星	154.32	152.89	152.90	153.98	152.6	
土星	7.38	7.23	7.23	7.31	7.2	
天王星	0.14	0.14	0.14	0.14	0.1	
海王星	0.04	0.04	0.04	0.04		
合計	530.30	529.72	528.82	531.75	526.7	529.90

Table 3: 水星の近日点移動の大きさ /(秒角 / 世紀)：金星からの寄与

2 次まで	275.461	2 次のみ	275.461
4 次まで	276.819	4 次のみ	1.358
6 次まで	276.014	6 次のみ	−0.805
8 次まで	275.949	8 次のみ	−0.065
10 次まで	275.948	10 次のみ	0.001
フル	275.948	12 次以上	0.000

Table 4: 水星の近日点移動の大きさ /(秒角 / 世紀)：水星の離心率の効果

惑星	e^4 のみ	e^6 のみ	e^6, e^8 のみ	e^6, e^8, e^{10} のみ
金星	12.09	0.556	0.583	0.585
地球	1.34	0.0189	0.0192	0.0192
火星	0.0111	$4.8{\times}10^{-5}$	$4.8{\times}10^{-5}$	$4.8{\times}10^{-5}$
木星	0.0525	$1.5{\times}10^{-5}$	$1.5{\times}10^{-5}$	$1.5{\times}10^{-5}$
土星	7.4×10^{-4}	$6.3{\times}10^{-8}$	$6.3{\times}10^{-8}$	$6.3{\times}10^{-8}$
天王星	3.6×10^{-6}	7.1×10^{-11}	7.1×10^{-11}	7.1×10^{-11}
海王星	4.3×10^{-7}	3.6×10^{-12}	3.6×10^{-12}	3.6×10^{-12}
合計	13.50	0.575	0.603	0.604

4.2　無限次までの結果

摂動関数の永年部は、

$$\tilde{R} = a_1 \frac{1}{(2\pi)^2\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-e_1^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^2 \frac{1}{\Delta} \tag{4.33}$$

である。(1.8) の第 2 項の永年部は 0 である。

Table 2 には水星の近日点移動の大きさを示す。(4.33) を用いた計算結果を「フル」の欄に示した。惑星データは 2023 年の『理科年表』の数値を用いた。Newcomb, Le Verrier は Table 1 のもので、Bretagnon は 1982 年の計算である [2]。

Table 3 には金星による水星の近日点移動の大きさを e, e_1, $\sin\frac{I}{2}$, $\sin\frac{I_1}{2}$ の 2, 4, 6, 8, 10 次まで計算した値を記した。この計算には Mathematica のパッケージ [6] を用いた。「フル」の欄は (4.33) を用いた結果である。12 次のみの寄与は 0.00011 秒角 / 世紀であった。2023 年の『理科年表』の数値を用いた。

Table 4 には、水星の近日点移動における e^4 の項のみの効果, e^6 の項のみの効果, e^6 と e^8 の項のみの効果, e^6 と e^8 と e^{10} の項のみの効果を載せた。この計算には (5.22) を用いた。2023 年の『理科年表』の数値を用いた。

4.3　e^4 の係数

e^4 の係数 c_4 を求める。それは、

$$\left\langle \frac{1}{\Delta_0} \right\rangle_0 \Big|_{e_1=0} = M(e,0) = M(0,0) + Ae^2 + c_4 e^4 + \cdots \tag{4.34}$$

から求まる。(2.23) より、

$$\begin{aligned} M_m(e,0) &= \left\langle \frac{1}{a_1}\left(\frac{r}{a_1}\right)^{2m} \right\rangle_0 \\ &= \frac{\alpha^{2m}}{a_1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} du\ (1-e\cos u)^{2m+1} \\ &= \frac{\alpha^{2m}}{a_1}\sum_{k=0}^{2m+1} {}_{2m+1}C_k(-e)^k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} du\ \cos^k u \end{aligned} \tag{4.35}$$

である。公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} du\ \cos^{2k} u = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \quad (k \geq 1) \tag{4.36}$$

より、

$$\begin{aligned} M_m(e,0) &= \frac{\alpha^{2m}}{a_1} + \frac{\alpha^{2m}}{a_1}\sum_{k=1}^{m} {}_{2m+1}C_{2k} e^{2k} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \\ &= \frac{\alpha^{2m}}{a_1} + \frac{\alpha^{2m}}{a_1}\sum_{k=1}^{m} \frac{(2m+1)!}{(2k)!(2m+1-2k)!} e^{2k} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \\ &= \frac{\alpha^{2m}}{a_1} + A_m e^2 + c_{4,m} e^4 + \cdots \end{aligned} \tag{4.37}$$

となる。ここで、

$$c_{4,0} = c_{4,1}, \tag{4.38}$$

$$c_{4,m} = \frac{\alpha^{2m}}{a_1}\frac{(2m+1)!}{4!(2m-3)!}\frac{3!!}{4!!} = \frac{\alpha^{2m}}{a_1}\frac{1}{4}(m+\frac{1}{2})m(m-\frac{1}{2})(m-1) \quad (m \geq 2) \tag{4.39}$$

である。よって、

$$c_4 = \frac{1}{4a_1}\sum_{m=2}^{\infty}\alpha^{2m}C^{(1/2)}_{2m,m}(m+\frac{1}{2})m(m-\frac{1}{2})(m-1) \tag{4.40}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} C^{(1/2)}_{2m,m}\frac{(m+1)!}{(m-3)!} &= \frac{1}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}\frac{[\Gamma(\frac{1}{2}+m)]^2}{(m!)^2}(m+\frac{1}{2})m(m-\frac{1}{2})(m-1) \\ &= \frac{1}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m)\Gamma(m+\frac{3}{2})}{m!(m-2)!}(m-\frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}\frac{[\Gamma(m+\frac{3}{2})]^2}{m!(m-2)!} - \frac{1}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{3}{2})}{m!(m-2)!} \\ &= \frac{1}{4}\frac{[(\frac{3}{2})_m]^2}{m!(m-2)!} - \frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{2})_m(\frac{3}{2})_m}{m!(m-2)!} \end{aligned} \tag{4.41}$$

である。よって、

$$c_4 = \frac{\alpha^4}{4a_1}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^{2m}\Big[\frac{1}{4}\frac{[(\frac{3}{2})_{m+2}]^2}{(m+2)!m!} - \frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{2})_{m+2}(\frac{3}{2})_{m+2}}{(m+2)!m!}\Big] \tag{4.42}$$

である。ここで、

$$(\frac{3}{2})_{m+2} = (\frac{7}{2})_m\frac{15}{4}, \quad (\frac{1}{2})_{m+2} = (\frac{5}{2})_m\frac{3}{4}, \tag{4.43}$$

$$(m+2)! = 2(3)_m \tag{4.44}$$

なので、

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{\alpha^4}{4a_1}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^{2m}\Big[\frac{15^2}{2^7}\frac{(\frac{7}{2})_m(\frac{7}{2})_m}{(3)_m m!} - \frac{3\cdot 15}{2^6}\frac{(\frac{5}{2})_m(\frac{7}{2})_m}{(3)_m m!}\Big] \\ &= \frac{45\alpha^4}{256a_1}\Big[\frac{5}{2}F(\frac{7}{2},\frac{7}{2},3,\alpha^2) - F(\frac{5}{2},\frac{7}{2},3,\alpha^2)\Big] \end{aligned} \tag{4.45}$$

となる。これは (4.6) と一致する (数値的に確かめた)。

5　高次展開：考察

摂動関数の高次展開について考える。今、

$$F := -2r_1 r\Delta f, \tag{5.1}$$

$$\Delta f := f(I, I_1) - f(0,0) = f_2 + f_4 + \cdots \tag{5.2}$$

と置く。f_{2n} は $\sin I, \sin I_1$ の $2n$ 次である。このとき、

$$\Delta^2 = \Delta_0^2 + F \tag{5.3}$$

となり、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{\Delta_0}\Big[1 + \frac{F}{\Delta_0^2}\Big]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\Delta_0} - \frac{1}{2}\frac{F}{\Delta_0^3} + \frac{3}{8}\frac{F^2}{\Delta_0^5} + \cdots \\ &= \frac{1}{\Delta_0} + \frac{r_1 r\Delta f}{\Delta_0^3} + \frac{3}{2}\frac{r_1^2 r^2(\Delta f)^2}{\Delta_0^5} + \cdots \\ &= \frac{1}{\Delta_0} + \frac{r_1 r f_2}{\Delta_0^3} + \frac{r_1 r f_4}{\Delta_0^3} + \frac{3}{2}\frac{r_1^2 r^2 f_2^2}{\Delta_0^5} + \cdots\end{aligned} \tag{5.4}$$

となる。さて、

$$\frac{1}{\Delta_0^s} = \frac{1}{r_1^s}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}\cos k(\eta_1' - \eta')C_{s,k,n}\Big(\frac{r}{r_1}\Big)^n \tag{5.5}$$

と置く。ここで、

$$C_{s,k,n} = \begin{cases} C^{(s/2)}_{n,(n+k)/2} & \text{for} \quad (n+k)/2 = 0, 1, \cdots, n \\ 0 & \text{for} \quad \text{その他} \end{cases} \tag{5.6}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\cos k(\eta_1' - \eta') &= \frac{1}{2}[e^{ik(\eta_1'-\eta')} + e^{-ik(\eta_1'-\eta')}] \\ &= \frac{1}{2}[e^{ik(\varpi_1-\varpi)}e^{ik(\varphi_1-\varphi)} + e^{-ik(\varpi_1-\varpi)}e^{-ik(\varphi_1-\varphi)}]\end{aligned} \tag{5.7}$$

である。

　さて、

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2i)!}{(i!)^2}\Big(\frac{1}{2}r_1 r\Delta f\Big)^i\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} \tag{5.8}$$

である。

$$\rho := \Delta_0\Big|_{e=e_1=0} \tag{5.9}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} {}_nC_l \frac{(r-a)^l(r_1-a_1)^{n-l}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^l \partial a_1^{n-l}}\frac{1}{\rho^{2i+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} {}_nC_l \frac{\varepsilon^l \varepsilon_1^{n-l}}{n!} D_{l,n-l}\frac{1}{\rho^{2i+1}}, \qquad (5.10) \\
\varepsilon &:= \frac{r-a}{a}, \qquad (5.11) \\
D_{n,m} &:= a^n a_1^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial a^n \partial a_1^m} \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\frac{1}{\rho^{2i+1}} = \frac{1}{2a_1^{2i+1}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}(\alpha)\cos k(\eta_1' - \eta'), \quad \alpha = \frac{a}{a_1} \qquad (5.13)$$

である (これはラプラス係数の定義である)。よって、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta} &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{(2i)!}{(i!)^2}\Big(\frac{1}{2}r_1 r\Delta f\Big)^i {}_nC_l\frac{\varepsilon^l\varepsilon_1^{n-l}}{n!}\cos k(\eta_1'-\eta')D_{l,n-l}\Big[\frac{1}{2a_1^{2i+1}}b_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}(\alpha)\Big] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{(2i)!}{(i!)^2}\Big(\frac{1}{2}r_1 r\Delta f\Big)^i {}_nC_l\frac{\varepsilon^l\varepsilon_1^{n-l}}{n!}\cos k(\eta_1'-\eta')A_{l,n-l}^{(i,k)}(\alpha, a_1), \qquad (5.14) \\
A_{nm}^{(i,k)}(\alpha, a_1) &:= D_{nm}\Big[\frac{1}{2a_1^{2i+1}}b_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}(\alpha)\Big] \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

となる。

上式より、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta}\Big|_{e_1=I=I_1=0} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\cos k(\eta_1'-\eta')A_{n0}^{(0,k)}(\alpha, a_1), \qquad (5.16) \\
A_{n0}^{(0,k)}(\alpha, a_1) &= \frac{1}{2a_1}a^n\frac{\partial^n}{\partial a^n}b_{\frac{1}{2}}^{(k)}(\alpha) \\
&= \frac{1}{2a_1}\alpha^n\frac{d^n}{d\alpha^n}b_{\frac{1}{2}}^{(k)}(\alpha) = \frac{1}{2a_1}\alpha^n D^n b_{\frac{1}{2}}^{(k)}(\alpha) \qquad (5.17)
\end{aligned}$$

となる。よって、摂動関数の永年部の e^{2p} の係数 c_{2p} は、

$$\begin{aligned}
c_{2p} &= \frac{1}{2a_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n D^n b_{\frac{1}{2}}^{(k)}(\alpha)\Big[\Big\langle\frac{\varepsilon^n}{n!}\cos k(\eta_1'-\eta')\Big\rangle_0\Big]_{2p} \\
&= \frac{1}{2a_1}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n D^n b_{\frac{1}{2}}^{(0)}(\alpha)\Big[\frac{\langle\varepsilon^n\rangle_0}{n!}\Big]_{2p} \\
&= \frac{1}{2a_1}\sum_{n=0}^{2p}\alpha^n D^n b_{\frac{1}{2}}^{(0)}(\alpha)\Big[\frac{\langle\varepsilon^n\rangle_0}{n!}\Big]_{2p} \qquad (5.18)
\end{aligned}$$

となる。ここで、$f(e)$ が e でマクローリン展開可能なとき、

$$f(e) = \sum_{p=0} [f]_p e^p \tag{5.19}$$

という記号を用いた。(2.23) より、

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon^n \rangle_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} du \ (1 - e\cos u) \Big[(1 - e\cos u) - 1 \Big]^n \\ &= (-1)^n e^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} du \ (\cos^n u - e \cos^{n+1} u)\end{aligned} \tag{5.20}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\Big[\frac{\langle \varepsilon^n \rangle_0}{n!} \Big]_{2p} &= \frac{\delta_{n,2p}}{(2p)!} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} du \ \ \cos^{2p} u + \frac{\delta_{n,2p-1}}{(2p-1)!} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} du \ \ \cos^{2p} u \\ &= \Big[\frac{\delta_{n,2p}}{(2p)!} + \frac{\delta_{n,2p-1}}{(2p-1)!} \Big] \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \quad (p \geq 1) \\ &= \frac{\delta_{n,2p}}{[(2p)!!]^2} + \frac{\delta_{n,2p-1}}{(2p)!!(2p-2)!!}\end{aligned} \tag{5.21}$$

となる。従って、

$$c_{2p} = \frac{1}{2a_1} \Big[\frac{1}{[(2p)!!]^2} \alpha^{2p} D^{2p} b^{(0)}_{\frac{1}{2}}(\alpha) + \frac{1}{(2p)!!(2p-2)!!} \alpha^{2p-1} D^{2p-1} b^{(0)}_{\frac{1}{2}}(\alpha) \Big] \tag{5.22}$$

を得る。特に、

$$c_4 = \frac{1}{a_1} \frac{1}{128} [\alpha^4 D^4 b^{(0)}_{\frac{1}{2}}(\alpha) + 4\alpha^3 D^3 b^{(0)}_{\frac{1}{2}}(\alpha)] \tag{5.23}$$

である。これは (4.6) と一致する。

6 一般相対論的効果

Parameterized post newtonian (PPN) 展開 [7] では、

$$g_{00} = -1 + 2U - 2\beta U^2, \tag{6.1}$$

$$g_{0i} = 0, \tag{6.2}$$

$$g_{ij} = (1 + 2\gamma U)\delta_{ij}, \tag{6.3}$$

$$U = \frac{GM}{r} \tag{6.4}$$

である (光速度を 1 とした)。ただし、β, γ 以外の PPN パラメーラーを 0 とした。一般相対論では、$\beta = 1 = \gamma$ である。質点の作用は、

$$\begin{aligned} S &= -m\int \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} \\ &= -m\int dt\,\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}} \end{aligned} \tag{6.5}$$

である。よって、ラグランジアンは、

$$\begin{aligned} L &= -m\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}} \\ &= -m\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2 - 2U + 2\beta U^2 - 2\gamma U\boldsymbol{v}^2} \\ &= -m + \Big(\frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2 + mU\Big) + m\Big[\frac{1}{8}(\boldsymbol{v}^2 + 2U)^2 - \beta U^2 + \gamma U\boldsymbol{v}^2\Big] + \cdots \end{aligned} \tag{6.6}$$

である。第 1 項は定数で、第 2 項はニュートン力学のそれである。よって、摂動関数は、

$$R = \frac{1}{8}(\boldsymbol{v}^2 + 2U)^2 - \beta U^2 + \gamma U\boldsymbol{v}^2 \tag{6.7}$$

である。ニュートン力学では、

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 - U = -\frac{GM}{2a} \tag{6.8}$$

である。よって、

$$\boldsymbol{v}^2 = 2U - \frac{GM}{a} \tag{6.9}$$

であり、

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{8}(4U - \frac{GM}{a})^2 - \beta U^2 + \gamma U(2U - \frac{GM}{a}) \\ &= (GM)^2\Big[\frac{1}{8a^2} - \frac{1}{ra} + \frac{2}{r^2} - \frac{\beta}{r^2} - \frac{\gamma}{ra} + \frac{2\gamma}{r^2}\Big] \\ &= (GM)^2\Big[\frac{1}{8a^2} - \frac{1+\gamma}{ra} + \frac{2 - \beta + 2\gamma}{r^2}\Big] \end{aligned} \tag{6.10}$$

である。よって、

$$\langle R\rangle_0 = (GM)^2\Big[\frac{1}{8a^2} - \frac{1+\gamma}{a}\langle r^{-1}\rangle_0 + (2 - \beta + 2\gamma)\langle r^{-2}\rangle_0\Big] \tag{6.11}$$

を得る。ここで、

$$\langle r^{-1}\rangle_0 = \frac{1}{a}, \tag{6.12}$$

$$\langle r^{-2}\rangle_0 = \frac{1}{a^2\sqrt{1-e^2}} \tag{6.13}$$

なので、

$$\begin{aligned}\langle R\rangle_0 &= (GM)^2\Big[\frac{1}{8a^2} - \frac{1+\gamma}{a^2} + \frac{2-\beta+2\gamma}{a^2\sqrt{1-e^2}}\Big] \\ &= (GM)^2\Big[-(\frac{7}{8}+\gamma)\frac{1}{a^2} + \frac{2-\beta+2\gamma}{a^2\sqrt{1-e^2}}\Big] \end{aligned} \tag{6.14}$$

を得る。よって、(1.11) より、

$$\begin{aligned}\frac{d\varpi}{dt} &= \frac{1}{na^2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\partial\langle R\rangle_0}{\partial e} \\ &= (2-\beta+2\gamma)\frac{(GM)^2}{na^4(1-e^2)} \end{aligned} \tag{6.15}$$

であり、1 周期あたり、

$$\begin{aligned}\delta\varpi &= (2-\beta+2\gamma)\frac{2\pi(GM)^2}{n^2a^4(1-e^2)} \\ &= (2-\beta+2\gamma)\frac{2\pi GM}{a(1-e^2)} \end{aligned} \tag{6.16}$$

である。一般相対論では、

$$\delta\varpi = \frac{6\pi GM}{a(1-e^2)} \tag{6.17}$$

である。

References

[1] 須藤 靖『解析力学・量子論 第 2 版』(東京大学出版会, 2019).

[2] 木下 宙『天体と軌道の力学』(東京大学出版会, 1998).

[3] 井上 猛「天体力学入門講座 (8)」
http://perihelie.main.jp/contents/0508_icm8_tenkai.pdf

[4] K. M.Ellis and C. D.Murray, "The disturbing function in solar system dynamics", Icarus, **147**, 129 (2000).

[5] J. Laskar, G. Boue, "Explicit expansion of the three-body disturbing function for arbitrary eccentricities and inclinations", Astronomy & Astrophysics, **522**, A60 (2010). [arXiv:1008.2947]

[6] https://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/4256/

[7] 「Parameterized post newtonian(PPN) 展開：入門」
http://physnakajima.html.xdomain.jp/PPN.pdf