一般相対論的効果による近日点移動：特異摂動論

中嶋 慧

December 5, 2025

Abstract

本記事は物理学アドベントカレンダー 2025 の 5 日目の記事である。一般相対論的効果による近日点移動を特異摂動論で議論する。§1 では解くべき方程式を導出する。§2 では、ポアンカレの摂動論でそれを解く。§3 では内山の方法を紹介し、付録 A ではその方法を改良する。

Contents

1 運動方程式の導出

質点が重力場とのみ作用しているとき、運動方程式は作用

$$S = \frac{m}{2}\int d\tau\ g_{\mu\nu}(x(\tau))\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{1.1}$$

より導出できる [1]。ここで、$g_{\mu\nu}$ は計量テンソルであり、τ は固有時である。球対称で静的な時空

$$ds^2 = -\Big(1-\frac{a}{r}\Big)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{a}{r}} + r^2[\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2] \tag{1.2}$$

を考える。ここで、

$$a := \frac{2GM}{c^2} \tag{1.3}$$

はシュワルツシルト半径であり、G は万有引力定数で、M は中心にある星の質量である。以下、$c=1$ とする。この時空では、作用 S は、

$$S = \frac{m}{2}\int d\tau\ L, \tag{1.4}$$

$$L := -\Big(1-\frac{a}{r}\Big)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1-\frac{a}{r}} + r^2[\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2] \tag{1.5}$$

である。ここで $\dot{X} := dX/d\tau$ である。作用は t と φ を陽に含まないので、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -2\Big(1-\frac{a}{r}\Big)\dot{t}, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2r^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \tag{1.7}$$

は保存する。θ についての変分から、

$$\frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\theta}) - r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{1.8}$$

を得る。$\tau=0$ で $\theta=\pi/2,\ \dot{\theta}=0$ とすると、

$$\theta = \pi/2 \tag{1.9}$$

となる [1]。このとき、(1.6), (1.7) の定数を、

$$\varepsilon := \Big(1-\frac{a}{r}\Big)\dot{t}, \tag{1.10}$$

$$h := r^2\dot{\varphi} \tag{1.11}$$

と置く。

r についてのオイラー・ラグランジュ方程式を導く。まず、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 2\frac{\dot{r}}{1-\frac{a}{r}}, \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial r} &= -\frac{a}{r^2}\dot{t}^2 - \frac{a}{r^2}\frac{\dot{r}^2}{\Big(1-\frac{a}{r}\Big)^2} + 2r[\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2] \\ &= -\frac{a}{r^2}\dot{t}^2 - \frac{a}{r^2}\frac{\dot{r}^2}{\Big(1-\frac{a}{r}\Big)^2} + 2r\dot{\varphi}^2\end{aligned} \tag{1.13}$$

である。更に、

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 2\frac{\ddot{r}}{1-\frac{a}{r}} - 2\frac{a}{r^2}\frac{\dot{r}^2}{\Big(1-\frac{a}{r}\Big)^2} \tag{1.14}$$

なので、オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$2\frac{\ddot{r}}{1-\frac{a}{r}} - \frac{a}{r^2}\frac{\dot{r}^2}{\Big(1-\frac{a}{r}\Big)^2} + \frac{a}{r^2}\dot{t}^2 - 2r\dot{\varphi}^2 = 0 \tag{1.15}$$

である。(1.10), (1.11) より、

$$\dot{t} = \frac{\varepsilon}{1 - \frac{a}{r}}, \quad \dot{\varphi} = \frac{h}{r^2} \tag{1.16}$$

なので、

$$\frac{\ddot{r}}{1 - \frac{a}{r}} + \frac{a}{2r^2}\frac{\varepsilon^2 - \dot{r}^2}{\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2} - \frac{h^2}{r^3} = 0 \tag{1.17}$$

を得る。ところで、τ は固有時なので、

$$-\left(1 - \frac{a}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{a}{r}} + r^2[\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2] = -1 \tag{1.18}$$

である。今の場合は、

$$\begin{aligned} -\left(1 - \frac{a}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{a}{r}} + r^2\dot{\varphi}^2 = -1, \\ -\frac{\varepsilon^2 - \dot{r}^2}{1 - \frac{a}{r}} + \frac{h^2}{r^2} = -1 \end{aligned} \tag{1.19}$$

となる。(1.17) は、

$$\ddot{r} + \frac{a}{2r^2}\frac{\varepsilon^2 - \dot{r}^2}{1 - \frac{a}{r}} - \left(1 - \frac{a}{r}\right)\frac{h^2}{r^3} = 0 \tag{1.20}$$

なので、(1.19) より、

$$\begin{aligned} \ddot{r} + \frac{a}{2r^2}\left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \left(1 - \frac{a}{r}\right)\frac{h^2}{r^3} = 0, \\ \ddot{r} + \frac{a}{2r^2}\left(1 + 3\frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{h^2}{r^3} = 0 \end{aligned} \tag{1.21}$$

を得る。

いま、

$$u := \frac{1}{r} \tag{1.22}$$

とすると、

$$\dot{u} = -u^2\dot{r}, \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= -u^2\ddot{r} - 2u\dot{u}\dot{r} \\ &= -u^2\ddot{r} + 2u^3\dot{r}^2 \end{aligned} \tag{1.24}$$

である。ここで、(1.21) より、

$$\ddot{r} = -\frac{a}{2}u^2\left(1 + 3h^2u^2\right) + h^2u^3 \tag{1.25}$$

なので、

$$\ddot{u} = u^3\Big[\frac{a}{2}u\Big(1+3h^2u^2\Big) - h^2u^2 + 2\dot{r}^2\Big] \tag{1.26}$$

を得る。一方、

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{du}{d\varphi}\dot{\varphi} \\ &= h\frac{du}{d\varphi}u^2, \end{aligned}\tag{1.27}$$

$$\begin{aligned}\ddot{u} &= h\Big[\frac{d^2u}{d\varphi^2}\dot{\varphi}u^2 + 2\frac{du}{d\varphi}u\dot{u}\Big] \\ &= h^2\Big[\frac{d^2u}{d\varphi^2}u^4 + 2\Big(\frac{du}{d\varphi}\Big)^2u^3\Big]\end{aligned}\tag{1.28}$$

なので、

$$h^2u\frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2h^2\Big(\frac{du}{d\varphi}\Big)^2 = \frac{a}{2}u\Big(1+3h^2u^2\Big) - h^2u^2 + 2\dot{r}^2 \tag{1.29}$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\varphi} &= \frac{\dot{u}}{\dot{\varphi}} \\ &= \frac{-u^2\dot{r}}{hu^2} \\ &= -\frac{\dot{r}}{h}\end{aligned}\tag{1.30}$$

なので、

$$\begin{aligned}h^2u\frac{d^2u}{d\varphi^2} &= \frac{a}{2}u\Big(1+3h^2u^2\Big) - h^2u^2, \\ \frac{d^2u}{d\varphi^2} &= \frac{a}{2h^2}\Big(1+3h^2u^2\Big) - u, \\ \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u &= \frac{a}{2h^2} + \frac{3a}{2}u^2\end{aligned}\tag{1.31}$$

を得る。いま、

$$A := \frac{a}{2h^2} =: \frac{1}{l}, \quad \varepsilon := \frac{3a}{2} \tag{1.32}$$

とすると、

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = A + \varepsilon u^2 \tag{1.33}$$

である。更に、

$$u = A + y \tag{1.34}$$

とすると、

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + y = \varepsilon(A+y)^2 \tag{1.35}$$

を得る。

2　ポアンカレの摂動論

2.1　一般論

(1.35) は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \mu f(x, \dot{x}) \quad (0 < \mu \ll 1) \tag{2.1}$$

の形をしている。ここで、$\dot{x} = dx/dt$ である。この方程式に周期解があり、その周期が $2\pi/\omega(\mu)$ とする。これを探そう [2]。仮定

$$\omega(\mu) = 1 + \mu\omega_1 + \mu^2\omega_2 + \cdots, \tag{2.2}$$

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \cdots \tag{2.3}$$

を置く。また、

$$\tau := \omega(\mu)t \tag{2.4}$$

とし、

$$X' := \frac{dX}{d\tau}, \quad X'' := \frac{d^2X}{d\tau^2} \tag{2.5}$$

などとする。このとき、(2.1) は、

$$\omega^2 x'' + x = \mu f(x, \omega x') \tag{2.6}$$

となる。(2.2), (2.3) を代入して、

$$x_0'' + x_0 = 0, \tag{2.7}$$

$$x_1'' + x_1 = -2\omega_1 x'' + f(x_0, x_0') \tag{2.8}$$

を得る。最初の式の解を、

$$x_0 = B\cos\tau \tag{2.9}$$

とする。このとき、

$$x_1'' + x_1 = -2\omega_1 B\cos\tau + f(B\cos\tau, -B\sin\tau) \tag{2.10}$$

となる。いま、

$$F(B, \tau) := f(B\cos\tau, -B\sin\tau) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(B)\cos n\tau + b_n(B)\sin n\tau] \tag{2.11}$$

とする。(2.10) の右辺に $\sin\tau$, $\cos\tau$ が現れないならば、永年項が生じない。よって、

$$2\omega_1 B + a_1(B) = 0, \tag{2.12}$$

$$b_1(B) = 0 \tag{2.13}$$

により ω_1, B を決定する [2]。

2.2 近日点移動の場合

(1.35) の場合は、

$$\mu = \varepsilon A, \quad f = \frac{1}{A}(A+y)^2 \tag{2.14}$$

なので、

$$\begin{aligned} F(B,\tau) &= \frac{1}{A}(A + B\cos\tau)^2 \\ &= \frac{1}{A}(A^2 + 2AB\cos\tau + B^2\frac{1+\cos 2\tau}{2}) \end{aligned} \tag{2.15}$$

であり、

$$a_1(B) = 2B, \tag{2.16}$$

$$b_1(B) = 0 \tag{2.17}$$

となる。よって、

$$\omega_1 = -1, \tag{2.18}$$

$$\omega = 1 - \varepsilon A + O(\varepsilon^2) \tag{2.19}$$

を得る。B は任意である。ここでは、

$$B = -\frac{e}{l} \quad (0 < e < 1) \tag{2.20}$$

と置く[1)]。このとき、(2.10) は、

$$y_1'' + y_1 = A^2 + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}B^2\cos 2\tau \tag{2.21}$$

となる。ただし、

$$y = B\cos\tau + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 \cdots \tag{2.22}$$

と置いた。よって、

$$y_1 = A^2 + \frac{1}{2}B^2 - \frac{1}{6}B^2\cos 2\tau + C\sin\tau + D\cos\tau \tag{2.23}$$

である。以上より、

$$u = A + B\cos\tau + \varepsilon\Big[A^2 + \frac{1}{2}B^2 - \frac{1}{6}B^2\cos 2\tau + C\sin\tau + D\cos\tau\Big] + O((\varepsilon A)^2), \tag{2.24}$$

$$\tau = [1 - \varepsilon A + O((\varepsilon A)^2)]\varphi \tag{2.25}$$

を得る。これは厳密解 [1] や EMAN の物理学 [3] と整合する。

1) $B = e/l$ としても良い。単に時間 (というか φ) の原点の違いである。

3　あとがき

記事 [1] および本記事を書くきっかけになったのは、ブログ [4] を見付けたことであった。そこでは内山『一般相対性理論』[5] における近日点移動の議論が紹介され、それへの疑問が書かれている。内山『一般相対性理論』では、微分方程式

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{a}{h^2}u - \frac{\varepsilon^2 - 1}{h^2} = au^3 \tag{3.1}$$

を考える。右辺が 0 の場合の解は、

$$u = \frac{1 + e_0 \cos\varphi}{l_0} \tag{3.2}$$

の形であるから、(3.1) の解を、

$$u = \frac{1 + e\cos(\eta\varphi)}{l} \tag{3.3}$$

と予想し、これを (3.1) に代入して、

$$e \approx e_0, \quad l \approx l_0, \quad \eta \approx 1 - \frac{3a}{2l_0} \tag{3.4}$$

を得る [5]。ブログ [4] は、むしろ、

$$u = \frac{1 + e\cos(\eta\varphi)}{l} + \frac{a}{l}u^{(1)} + O((a/l)^2) \tag{3.5}$$

と置くべきではないか？と議論している。そして、そのような議論が EMAN の物理学 [3] にあることが紹介されている。

記事 [1] および本記事は EMAN の物理学 [3] を理解するために書かれた。まず、記事 [1] では (3.1) の厳密解を求め、それを a/l_0 について展開して、EMAN の物理学の結果が再現されることを示した。その後、文献 [2] を見付け、EMAN の物理学の議論がポアンカレの摂動論に対応することを理解し、本記事を書いた。これによって、EMAN の物理学を完全に理解した。

付録 A では、内山の方法を改良し、a/l_0 のオーダーまで正しい結果を導く。

A 内山の方法の改良

$2E := \varepsilon^2 - 1$ と置くと、(3.1) は、

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{a}{h^2}u - \frac{2E}{h^2} = au^3 \tag{A.1}$$

となる。この解を。

$$u = \frac{1 - e\cos\eta\varphi}{l} + \frac{a}{l_0}[Q\cos 2\eta\varphi + R\sin\eta\varphi] \tag{A.2}$$

と仮定し、l, e, η, Q, R を求めることを考える。ただし、

$$l = l_0 + \frac{a}{l_0}l_1 + O((a/l_0)^2), \tag{A.3}$$

$$e = e_0 + \frac{a}{l_0}e_1 + O((a/l_0)^2), \tag{A.4}$$

$$\eta = 1 + \frac{a}{l_0}\eta_1 + O((a/l_0)^2) \tag{A.5}$$

を仮定する。なお、水星に対して、

$$\frac{a}{l_0} = 5.325 \times 10^{-8} \tag{A.6}$$

である [1]。

まず、

$$\frac{du}{d\varphi} = \eta\Big(\frac{e}{l}\sin\eta\varphi + \frac{a}{l_0}[-2Q\sin 2\eta\varphi + R\cos\eta\varphi]\Big) \tag{A.7}$$

であり、$\tau := \eta\varphi$ として、

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 &= \eta^2\Big(\frac{e^2}{l^2}\sin^2\tau + 2\frac{ae_0}{l_0^2}[-2Q\sin\tau\sin 2\tau + R\sin\tau\cos\tau]\Big) + O((a/l_0)^2)\\ &= \eta^2\Big(\frac{e^2}{l^2}\frac{1-\cos 2\tau}{2} + \frac{ae_0}{l_0^2}[2Q(\cos 3\tau - \cos\tau) + R\sin 2\tau]\Big) + O((a/l_0)^2)\end{aligned} \tag{A.8}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}u^2 = &\frac{1 - 2e\cos\tau + e^2\cos^2\tau}{l^2} + 2\frac{a}{l_0^2}(Q\cos 2\tau + R\sin\tau - e_0Q\cos\tau\cos 2\tau - e_0R\sin\tau\cos\tau)\\ &+ O((a/l_0)^2)\\ = &\frac{1 - 2e\cos\tau + e^2(1+\cos 2\tau)/2}{l^2} + \frac{a}{l_0^2}(2Q\cos 2\tau + 2R\sin\tau - e_0Q[\cos 3\tau + \cos\tau]\\ &- e_0R\sin 2\tau) + O((a/l_0)^2)\end{aligned} \tag{A.9}$$

である。au^3 は、

$$\begin{aligned}au^3 &= a\Big(\frac{1 - e_0\cos\tau}{l_0}\Big)^3 + O((a/l_0)^2)\\ &= a\frac{1 - 3e_0\cos\tau + 3e_0^2\cos^2\tau - e_0^3\cos^3\tau}{l_0^3} + O((a/l_0)^2)\\ &= \frac{a}{l_0^3}\Big[1 - 3e_0\cos\tau + \frac{3e_0^2}{2}(1+\cos 2\tau) - e_0^3\Big(\frac{3}{4}\cos\tau + \frac{1}{4}\cos 3\tau\Big)\Big] + O((a/l_0)^2)\end{aligned} \tag{A.10}$$

である。これらを (A.1) に代入して、まず定数項の比較から、

$$\eta^2 \frac{e^2}{2l^2} + \frac{2+e^2}{2l^2} - \frac{a}{h^2}\frac{1}{l} - \frac{2E}{h^2} = \frac{a}{l_0^3}\Big[1 + \frac{3e_0^2}{2}\Big] \tag{A.11}$$

を得る。$\cos\tau$ の係数の比較から、

$$-2\frac{ae_0}{l_0^2}Q - \frac{2e}{l^2} - \frac{a}{l_0^2}e_0 Q + \frac{a}{h^2}\frac{e}{l} = \frac{a}{l_0^3}\Big(- 3e_0 - \frac{3}{4}e_0^3\Big) \tag{A.12}$$

を得る。$\sin\tau$ の係数の比較から、

$$R = 0 \tag{A.13}$$

となる。$\cos 2\tau$ の係数の比較から、

$$-\eta^2 \frac{e^2}{2l^2} + \frac{e^2}{2l^2} + 2\frac{a}{l_0^2}Q - \frac{a}{h^2}\frac{a}{l_0}Q = \frac{a}{l_0^3}\frac{3e_0^2}{2} \tag{A.14}$$

を得る。$\cos 3\tau$ の係数の比較から、

$$2\frac{ae_0}{l_0^2}Q - \frac{a}{l_0^2}e_0 Q = -\frac{ae_0^3}{4l_0^3} \tag{A.15}$$

を得る。(A.15) より、

$$Q = -\frac{e_0^2}{4l_0} \tag{A.16}$$

である。

いま、

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_0} + \alpha\frac{a}{l_0^2} + O((a/l_0)^2), \tag{A.17}$$

$$\frac{e}{l} = \frac{e_0}{l_0} + \beta\frac{a}{l_0^2} + O((a/l_0)^2) \tag{A.18}$$

と置く。また、

$$\frac{a}{h^2} = \frac{2}{l_0}, \tag{A.19}$$

$$\frac{2E}{h^2} = \frac{1}{l_0^2}(e_0^2 - 1) \tag{A.20}$$

である。これより、(A.11) は、

$$\begin{aligned}(1+2\eta_1\frac{a}{l_0})\frac{1}{2}(\frac{e_0^2}{l_0^2} + 2\beta\frac{ae_0}{l_0^3}) + \frac{1}{l_0^2} + 2\alpha\frac{a}{l_0^3} + \frac{1}{2}(\frac{e_0^2}{l_0^2} + 2\beta\frac{ae_0}{l_0^3})\\ - \frac{2}{l_0^2} - 2\alpha\frac{a}{l_0^3} + \frac{1}{l_0^2}(1-e_0^2) = \frac{a}{l_0^3}\Big[1 + \frac{3e_0^2}{2}\Big]\end{aligned} \tag{A.21}$$

となる。整理すると、

$$e_0^2\eta_1 + 2e_0\beta = 1 + \frac{3}{2}e_0^2 \tag{A.22}$$

である。(A.12) は、

$$-3\frac{ae_0}{l_0^2}\Big(-\frac{e_0^2}{4l_0}\Big) - 2\Big(\frac{e_0}{l_0} + \beta\frac{a}{l_0^2}\Big)\Big(\frac{1}{l_0} + \alpha\frac{a}{l_0^2}\Big) + \frac{2}{l_0}\Big(\frac{e_0}{l_0} + \beta\frac{a}{l_0^2}\Big) = \frac{a}{l_0^3}\Big(-3e_0 - \frac{3}{4}e_0^3\Big) \tag{A.23}$$

となる。整理すると、

$$\begin{aligned} -2e_0\alpha &= -3e_0 - \frac{3e_0^3}{2}, \\ \alpha &= \frac{3}{2} + \frac{3e_0^2}{4} \end{aligned} \tag{A.24}$$

を得る。(A.14) は、

$$\frac{1}{2}\Big(-1 - 2\eta_1\frac{a}{l_0} + 1\Big)\Big(\frac{e_0^2}{l_0^2} + \beta\frac{ae_0}{l_0^3}\Big) = \frac{a}{l_0^3}\frac{3e_0^2}{2} \tag{A.25}$$

となる。整理すると、

$$\begin{aligned} -e_0^2\eta_1 &= \frac{3}{2}e_0^2, \\ \eta_1 &= -\frac{3}{2} \end{aligned} \tag{A.26}$$

を得る。(A.22) より、

$$\begin{aligned} 2e_0\beta &= 1 + \frac{3}{2}e_0^2 + \frac{3}{2}e_0^2 = 1 + 3e_0^2, \\ \beta &= \frac{1 + 3e_0^2}{2e_0} \end{aligned} \tag{A.27}$$

となる。

以上より、

$$u = \frac{1 - e_0\cos\tau}{l_0} + \frac{a}{l_0^2}\Big[\frac{3}{2} + \frac{3e_0^3}{4} - \frac{1 + 3e_0^2}{2e_0}\cos\tau - \frac{e_0^2}{4}\cos 2\tau\Big] + O((a/l_0)^2), \tag{A.28}$$

$$\tau = \Big[1 - \frac{3a}{2l_0} + O((a/l_0)^2)\Big]\varphi \tag{A.29}$$

を得る。これは厳密解の展開 [1] と一致する。

References

[1] 中嶋 慧「一般相対論的効果による近日点移動：厳密解の展開」
https://cf096240.cloudfree.jp/perihelion_GR_exact.pdf

[2] 戸田 盛和『振動論』培風館, 1968 年.

[3] EMAN の物理学, 相対性理論, 水星の近日点移動
https://eman-physics.net/relativity/mercury.html
(2025 年 11 月 23 日)

[4] 「一般相対性理論」（内山龍雄著）の近日点移動の計算について
https://research.kek.jp/people/mizoguch/archives/1007/
(2025 年 11 月 27 日)

[5] 内山龍雄『一般相対性理論』裳華房, 1978 年.