一般相対論的効果による近日点移動：厳密解の展開

中嶋 慧

December 4, 2025

Abstract

本記事は物理学アドベントカレンダー 2025 の 4 日目の記事である。一般相対論的効果による近日点移動を厳密解を用いて調べる。§1 では運動方程式を導出する。§2 では、§1 で得られた微分方程式を楕円関数を用いて解く。§3 では得られた厳密解を解析し、近日点移動の大きさを求める。付録 A では、厳密解を別の方法で導出する。付録 B では、厳密解に現れる 3 次方程式の解をニュートン法を用いて近似する。付録 C では、楕円関数をフーリエ展開し、EMAN の物理学で与えられた表式との関係を調べる。

Contents

1　運動方程式の導出

質点が重力場とのみ作用しているとき、運動方程式は作用

$$S = \frac{m}{2}\int d\lambda\, \left[e(\lambda)g_{\mu\nu}(x(\lambda))\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - \frac{c^2}{e(\lambda)}\right] \tag{1.1}$$

より導出できる。ここで、$g_{\mu\nu}$ は計量テンソルであり、λ はパラメーター、$e(\lambda)$ は補助場で、

$$\lambda \to \lambda', \quad e \to e' = \frac{d\lambda'}{d\lambda}e \tag{1.2}$$

の変換で作用は不変である。x^μ についての変分より、

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{m}{2}\int d\lambda\ \Big[e(\lambda)\delta x^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}(x(\lambda))\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} + 2e(\lambda)g_{\mu\nu}(x(\lambda))\frac{d\delta x^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\Big] \\ &= \frac{m}{2}\int d\lambda\ \delta x^\sigma\Big[e(\lambda)\partial_\sigma g_{\mu\nu}(x(\lambda))\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - 2\frac{d}{d\lambda}\Big\{e(\lambda)g_{\sigma\nu}(x(\lambda))\frac{dx^\nu}{d\lambda}\Big\}\Big]\end{aligned} \tag{1.3}$$

なので、

$$e(\lambda)\partial_\sigma g_{\mu\nu}(x(\lambda))\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - 2\frac{d}{d\lambda}\Big\{e(\lambda)g_{\sigma\nu}(x(\lambda))\frac{dx^\nu}{d\lambda}\Big\} = 0 \tag{1.4}$$

である。e についての変分より、

$$g_{\mu\nu}(x(\lambda))\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} + \frac{c^2}{e^2} = 0 \tag{1.5}$$

である。特に、$e = 1$ となるときの λ を τ とすると、

$$g_{\mu\nu}(x(\tau))\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = -c^2 \tag{1.6}$$

となる。このとき、(1.4) は、

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu}(x(\tau))\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} - 2\frac{d}{d\tau}\Big\{g_{\sigma\nu}(x(\tau))\frac{dx^\nu}{d\tau}\Big\} = 0 \tag{1.7}$$

となる。これは、

$$-\frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu}(x(\tau))\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + \partial_\mu g_{\sigma\nu}(x(\tau))\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\sigma\nu}(x(\tau))\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} = 0 \tag{1.8}$$

であり、整理すると、

$$g_{\sigma\nu}(x(\tau))\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}[\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}]\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{1.9}$$

となり、測地線の方程式となる。この方程式は、(1.1) で最初から $e = 1$ とし、定数項を落とした

$$S' = \frac{m}{2}\int d\tau\ g_{\mu\nu}(x(\tau))\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{1.10}$$

からも得られる。

以下、球対称で静的な時空

$$ds^2 = -\Big(1 - \frac{a}{r}\Big)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} + r^2[\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2] \tag{1.11}$$

を考える。ここで、

$$a := \frac{2GM}{c^2} \tag{1.12}$$

はシュワルツシルト半径であり、G は万有引力定数で、M は中心にある星の質量である。以下、$c = 1$ とする。

この時空では、作用 S' は、

$$S' = \frac{m}{2}\int d\tau\ L, \tag{1.13}$$

$$L := -\Big(1-\frac{a}{r}\Big)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1-\frac{a}{r}} + r^2[\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2] \tag{1.14}$$

である。ここで $\dot{X} := dX/d\tau$ である。作用は t と φ を陽に含まないので、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -2\Big(1-\frac{a}{r}\Big)\dot{t}, \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2r^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \tag{1.16}$$

は保存する。θ についての変分から、

$$\frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\theta}) - r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{1.17}$$

を得る。

今、

$$A := r^2, \tag{1.18}$$

$$B := \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2, \tag{1.19}$$

$$f(\theta) := \sin 2\theta \tag{1.20}$$

とすると、

$$\frac{d}{d\tau}(A\dot{\theta}) - Bf(\theta) = 0 \tag{1.21}$$

である。この式を τ で n 階微分して、

$$\sum_{r=0}^{n+1} {}_{n+1}C_r A^{(r)}\theta^{(n+1-r)} - \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r B^{(n-r)}\frac{d^r f}{d\tau^r} = 0 \tag{1.22}$$

を得る。ここで、Faà di Bruno の公式 [1] より、

$$\frac{d^r f}{d\tau^r} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{(q)} r! f^{(i)}(\theta)\prod_{k=1}^{r-i+1}\frac{1}{q_k!}\Big[\frac{\theta^{(k)}}{k!}\Big]^{q_k} \tag{1.23}$$

である。和 $\sum_{(q)}$ は、

$$\sum_{l=1}^{r-i+1} q_l = i, \tag{1.24}$$

$$\sum_{l=1}^{r-i+1} lq_l = r \tag{1.25}$$

を満たすような全ての非負整数の組について取る。$A>0$ であるから、$\theta^{(n+1)}$ は $\{\theta^{(i)}\}_{i=0}^{n}$ で表される。特に、$\tau=0$ で $\theta=\pi/2, \dot{\theta}=0$ とすると、

$$\theta^{(n)}\Big|_{\tau=0}=0 \quad (n\geq 2) \tag{1.26}$$

を得る。これより、このとき $\theta=\pi/2$ となる。このとき、(1.15), (1.16) の定数を、

$$\varepsilon := \Big(1-\frac{a}{r}\Big)\dot{t}, \tag{1.27}$$

$$h := r^2\dot{\varphi} \tag{1.28}$$

と置く。

今の場合、(1.6) は、

$$-\Big(1-\frac{a}{r}\Big)\dot{t}^2+\frac{\dot{r}^2}{1-\frac{a}{r}}+r^2\dot{\varphi}^2=-1 \tag{1.29}$$

である。両辺に $\big(1-\frac{a}{r}\big)$ をかけて、ε, h の定義を使うと、

$$-\varepsilon^2+\dot{r}^2+\Big(1-\frac{a}{r}\Big)\frac{h^2}{r^2}=-1+\frac{a}{r} \tag{1.30}$$

である。いま、

$$r' := \frac{dr}{d\varphi}=\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}=\frac{r^2}{h}\dot{r} \tag{1.31}$$

とすると、

$$\dot{r}=\frac{h}{r^2}r' \tag{1.32}$$

なので、(1.30) より、

$$\Big(\frac{h}{r^2}r'\Big)^2+\Big(1-\frac{a}{r}\Big)\frac{h^2}{r^2}-\frac{a}{r}+1-\varepsilon^2=0 \tag{1.33}$$

を得る。また、

$$u := \frac{1}{r}, \quad u' := \frac{du}{d\varphi} \tag{1.34}$$

と置くと、

$$(u')^2+(1-au)u^2-\frac{au}{h^2}+\frac{1-\varepsilon^2}{h^2}=0 \tag{1.35}$$

を得る。いま、

$$2E := \varepsilon^2-1 \tag{1.36}$$

とすると、

$$(u')^2=au^3-u^2+\frac{a}{h^2}u+\frac{2E}{h^2} \tag{1.37}$$

となる。

2　厳密解

微分方程式

$$(u')^2 = R_3(u) := a_3u^3 + a_2u^2 + a_1u + a_0 \quad (a_3 > 0, a_i \in \mathbb{R}) \tag{2.1}$$

が解ければ (1.37) は解ける。これを解こう。ただし、$R_3(u)$ は 3 つの実根 u_1, u_2, u_3 を持ち、

$$u_1 < u_2 < u_3 \tag{2.2}$$

とし、u は u_1 から u_2 の間の値を取るとする。

Weierstrass の $\wp$ 関数は、微分方程式

$$\left(\frac{d\wp}{dz}\right)^2 = 4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3 \tag{2.3}$$

の解である。ただし、

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + O(z^6) \tag{2.4}$$

である。また、

$$z = \int_\zeta^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} \tag{2.5}$$

とすると、

$$\zeta = \wp(z) \tag{2.6}$$

である。

変数変換

$$u(\varphi) = A + Bv(z), \quad z := c\varphi + c' \tag{2.7}$$

を考え、

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 = 4v^3 - g_2v - g_3 \tag{2.8}$$

の形になるように A, B, c を選ぶ。まず、変数変換

$$u = w + d \tag{2.9}$$

を考えると、

$$\begin{aligned} R_3(u) &= a_3(w+d)^3 + a_2(w+d)^2 + a_1(w+d) + a_0 \\ &= a_3w^3 + (3a_3d + a_2)w^2 + (a_3d^2 + 2a_2d + a_1)w + (a_3d^3 + a_2d^2 + a_1d + a_0) \end{aligned} \tag{2.10}$$

なので、

$$d = -\frac{a_2}{3a_3} \tag{2.11}$$

とすると、2 次の係数が消え、

$$
\begin{aligned}
R_3(u) &= a_3w^3 + \Big(\frac{a_2^2}{9a_3} - \frac{2a_2^2}{3a_3} + a_1\Big)w - \frac{a_2^3}{27a_3^2} + \frac{a_2^3}{9a_3^2} - \frac{a_1a_2}{3a_3} + a_0 \\
&= a_3w^3 + \Big(-\frac{5a_2^2}{9a_3} + a_1\Big)w + \frac{2a_2^3}{27a_3^2} - \frac{a_1a_2}{3a_3} + a_0 \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

となる。次に、

$$
w = Bv(z) \qquad (2.13)
$$

とすると、

$$
\frac{dv}{dz} = \frac{1}{cB}w' \qquad (2.14)
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{dv}{dz}\Big)^2 &= \frac{1}{c^2B^2}\Big[a_3w^3 + \Big(-\frac{5a_2^2}{9a_3} + a_1\Big)w + \frac{2a_2^3}{27a_3^2} - \frac{a_1a_2}{3a_3} + a_0\Big] \\
&= \frac{a_3B}{c^2}v(z)^2 + \frac{1}{c^2B}\Big(-\frac{5a_2^2}{9a_3} + a_1\Big)v(z) + \frac{1}{c^2B^2}\Big[\frac{2a_2^3}{27a_3^2} - \frac{a_1a_2}{3a_3} + a_0\Big] \\
&= 4v^2 - g_2v - g_3 \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

となる。$c = 1$ とすると、

$$
B = \frac{4}{a_3} \qquad (2.16)
$$

であり、

$$
v = \frac{a_3}{4}u + \frac{a_2}{12} \qquad (2.17)
$$

である。

本節の以下では文献 [2] を参考にした。今、

$$
4v^2 - g_2v - g_3 = 4(v-e_1)(v-e_2)(v-e_3), \quad e_1 > e_2 > e_3 \qquad (2.18)
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{a_3}{4}u_3 + \frac{a_2}{12}, \qquad (2.19) \\
e_2 &= \frac{a_3}{4}u_2 + \frac{a_2}{12}, \qquad (2.20) \\
e_3 &= \frac{a_3}{4}u_1 + \frac{a_2}{12} \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

となる。$\varphi = 0$ に $u = u_1$ であったとすると、

$$
\varphi = \int_{e_3}^{\tilde{v}} \frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}, \quad \tilde{v} := \frac{a_3}{4}u + \frac{a_2}{12} \qquad (2.22)
$$

である。$\tilde{v}$ は、$e_3 \leq \tilde{v} \leq e_2$ の範囲で変化する。いま、

$$\frac{e_2 - \tilde{v}}{\tilde{v} - e_3} = \frac{v - e_1}{e_1 - e_3} \tag{2.23}$$

で v を導入すると、

$$\varphi = \int_v^\infty \frac{dx}{\sqrt{4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}} \tag{2.24}$$

となる。ここで、

$$e_1 \leq v \leq \infty \tag{2.25}$$

である。よって、

$$v = \wp(\varphi) \tag{2.26}$$

であり、

$$\tilde{v} = e_3 + \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\wp(\varphi) - e_3} \tag{2.27}$$

を得る。公式

$$\wp(\varphi) - e_3 = \frac{e_1 - e_3}{\mathrm{sn}^2(\gamma\varphi, k)}, \tag{2.28}$$

$$\gamma := \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{1}{2}\sqrt{a_3(u_3 - u_1)}, \tag{2.29}$$

$$k^2 := \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \tag{2.30}$$

より、

$$\tilde{v} = e_3 + (e_2 - e_3)\mathrm{sn}^2(\gamma\varphi, k) \tag{2.31}$$

を得る。ここで sn はヤコビの楕円関数である。これと、

$$\tilde{v} = \frac{a_3}{4}u + \frac{a_2}{12} \tag{2.32}$$

より、

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)\mathrm{sn}^2(\gamma\varphi, k) \tag{2.33}$$

を得る [2]。この式の別の導出は付録 A で与える。

3　厳密解の解析

(1.37) に対しては、

$$R_3(u) = au^3 - u^2 + \frac{a}{h^2}u + \frac{2E}{h^2} =: au^3 + R_2(u) \tag{3.1}$$

である。u_1, u_2 は、$R_2(u) = 0$ の解 $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ に近い。また、u^2 の係数から、

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{a} \tag{3.2}$$

である。まず、

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{h^2} - \sqrt{\left(\frac{a}{h^2}\right)^2 + \frac{8E}{h^2}}\right] =: \frac{1-e}{l}, \tag{3.3}$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{h^2} + \sqrt{\left(\frac{a}{h^2}\right)^2 + \frac{8E}{h^2}}\right] = \frac{1+e}{l} \tag{3.4}$$

である。l はケプラーの楕円の半通径 (semi-latus rectum) であり、e は離心率である。軌道長半径 A は、

$$A = \frac{l}{1-e^2} \tag{3.5}$$

である。また、

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{1}{a} - (u_1 + u_2) \\ &\approx \frac{1}{a} - \frac{2}{l} \end{aligned} \tag{3.6}$$

である。なお、$u_i - \tilde{u}_i = O(a/l)$ である $(i = 1, 2)$(付録 B)。

さて、

$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{a(u_3 - u_1)}, \tag{3.7}$$

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \tag{3.8}$$

であった。まず、

$$a(u_3 - u_1) \approx 1 - \frac{a(3-e)}{l}, \tag{3.9}$$

$$\gamma \approx \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a(3-e)}{2l}\right) \tag{3.10}$$

である。次に、

$$k^2 \approx \frac{2ae}{l} \tag{3.11}$$

である。

(2.33) より、近日点移動から次の近日点移動までの φ の変化は、

$$\frac{2K(k)}{\gamma} \tag{3.12}$$

である。ここで、$K(k)$ は第一種完全楕円積分で、

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{\pi}{2}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^2(k^2)^n\Big] \\ &= \frac{\pi}{2}\Big(1+\frac{k^2}{4}+O(k^4)\Big) \end{aligned} \tag{3.13}$$

なので、近日点移動の大きさは、1 周期あたり

$$\begin{aligned} \delta &:= \frac{2K(k)}{\gamma}-2\pi \\ &\approx 2\pi\Big(1+\frac{k^2}{4}+\frac{a(3-e)}{2l}\Big)-2\pi \\ &\approx 2\pi\Big(1+\frac{ae}{2l}+\frac{a(3-e)}{2l}\Big)-2\pi \\ &= \frac{3\pi a}{l} \end{aligned} \tag{3.14}$$

となる。よって、

$$\delta \approx \frac{3\pi a}{A(1-e^2)} \tag{3.15}$$

である。

水星の近日点移動の大きさを求める。『理科年表 2026』によると、

$$A = 0.3871\ \mathrm{au}, \quad e = 0.2056, \quad P = 0.24085\ \text{ユリウス年} \tag{3.16}$$

である。P は公転周期で、ユリウス年 $=$ 365.25 日 $= 3.15576\times10^7$ s である。また、太陽質量は $1.9884\ \times10^{30}$ kg であり、1 au $= 1.49597870700\times10^{11}$ m である。万有引力定数は $G = 6.6743\times10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ であり、光速度は $c = 2.99792458\times10^8$ m/s である。よって、

$$a = 2953\ \mathrm{m}, \tag{3.17}$$

$$l = 5.546\times10^{10}\ \mathrm{m}, \tag{3.18}$$

$$\frac{a}{l} = 5.325\times10^{-8}, \tag{3.19}$$

$$\delta = 5.019\times10^{-7}, \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{P} &= 2.084\times10^{-6}/\text{ユリウス年} \\ &= 42.98\ \text{秒角}/(100\ \text{ユリウス年}) \end{aligned} \tag{3.21}$$

を得る。

惑星による近日点移動については、文献 [3] を参照のこと。

A　(2.33) の別の導出

(2.17) の v は、

$$v(\varphi) = \wp(\varphi + z_0) \quad (z_0 \in \mathbb{C}) \tag{A.1}$$

と書ける。よって、

$$u(\varphi) = \frac{4}{a_3}\left[\wp(\varphi + z_0) - \frac{a_2}{12}\right] \tag{A.2}$$

である。ω_1, ω_2 を半基本周期とすると、

$$\wp(z + \omega_2) = e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\wp(z) - e_3} \tag{A.3}$$

である [2]。上式と (2.28) より、

$$\wp(z + \omega_2) = e_3 + (e_2 - e_3)\mathrm{sn}^2(\gamma z, k) \tag{A.4}$$

なので、$z_0 = \omega_2$ として、

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)\mathrm{sn}^2(\gamma\varphi, k) \tag{A.5}$$

を得る。

B　u_1, u_2 の補正

ニュートン法より、

$$u_i \approx \tilde{u}_i - \frac{a\tilde{u}_i^3}{R_3'(\tilde{u}_i)} \quad (i = 1, 2) \tag{B.1}$$

である。$R_2'(\tilde{u}_1) = \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1$ なので、

$$\begin{aligned} u_1 &\approx \tilde{u}_1 - \frac{a\tilde{u}_1^3}{3a\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1} \\ &\approx \tilde{u}_1 - \frac{a\tilde{u}_1^3}{\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1} \\ &= \frac{1-e}{l} - \frac{a(1-e)^3}{2el^2} \end{aligned} \tag{B.2}$$

である。同様に、$R_2'(\tilde{u}_2) = -(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1)$ を用いて、

$$u_2 \approx \frac{1+e}{l} + \frac{a(1+e)^3}{2el^2} \tag{B.3}$$

となる。

C　(2.33) の変形・展開

$\mathrm{sn}(x, k)$ のフーリエ展開は、

$$\mathrm{sn}(x, k) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2K(k)}x\right], \quad A_n = \frac{2\pi}{kK(k)}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n-1}} \tag{C.1}$$

である。ここで、$q := e^{-\pi K(k')/K(k)}$, $k' := \sqrt{1-k^2}$ であり、文献 [4] によると、

$$q = \frac{k^2}{16}\Big(1 + \frac{k^2}{2} + \frac{21}{64}k^4 + O(k^6)\Big) \tag{C.2}$$

である (これは文献 [5] の方法で求められる)。よって、

$$A_1 = 1 + \frac{k^2}{16} + \frac{7}{256}k^4 + O(k^6), \tag{C.3}$$

$$A_2 = \frac{k^2}{16} + \frac{k^4}{32} + \frac{41}{2048}k^6 + O(k^8), \tag{C.4}$$

$$A_3 = \frac{k^4}{256} + \frac{k^6}{256} + \frac{115}{32768}k^8 + O(k^{10}) \tag{C.5}$$

となる。これより、a/l のオーダーまでで、

$$u = \frac{1 - e\cos(\alpha\varphi)}{l} + \frac{a}{l^2}\Big[\frac{3(2+e^2)}{4} - \frac{1+3e^2}{2e}\cos(\alpha\varphi) - \frac{e^2}{4}\cos(2\alpha\varphi)\Big], \tag{C.6}$$

$$\alpha := \frac{\gamma\pi}{K(k)} \approx 1 - \frac{3a}{2l} \tag{C.7}$$

である。EMAN の物理学 [6] は、ポアンカレの摂動法や Poincaré-Lighthill-Kuo 法と呼ばれる方法 [7, 8] を用いて、

$$u = \frac{1 - e\cos(\alpha'\varphi)}{l} + \frac{a}{l^2}\Big[\frac{3(2+e^2)}{4} - \frac{e^2}{4}\cos(2\alpha'\varphi)\Big] + O((a/l)^2), \tag{C.8}$$

$$\alpha' := 1 - \frac{3a}{2l} \tag{C.9}$$

を得た[1)]。明日の記事 [9] では、ポアンカレの摂動法を用いて、

$$u = \frac{1 - e\cos\tau}{l} + \frac{a}{l^2}\Big[\frac{3(2+e^2)}{4} - \frac{e^2}{4}\cos 2\tau + C\sin\tau + D\cos\tau\Big] + O((a/l)^2), \tag{C.13}$$

$$\tau = [1 - \varepsilon A + O((\varepsilon A)^2)]\varphi \tag{C.14}$$

を導出する[2)]。C, D は未定の定数である。

[1)] 文献 [6] の

$$u = A + B\cos(1 - \varepsilon A)\varphi + \varepsilon\Big(A^2 + \frac{1}{2}B^2 - \frac{B^2}{6}\cos(2\varphi)\Big)$$

に

$$A = \frac{1}{l}, \quad B = -\frac{e}{l}, \quad \varepsilon = \frac{3a}{2} \tag{C.10}$$

を代入し、$\cos(2\varphi)$ を $\cos[2(1-\varepsilon A)\varphi]$ に置き換える。(C.6) の

$$-\frac{a}{l^2}\frac{1+3e^2}{2e}\cos(\alpha\varphi) \tag{C.11}$$

の項がないが、文献 [6] の u_1 には斉次解 $C\sin\varphi + D\cos\varphi$ を加えてもよく、

$$u = A + B\cos(1 - \varepsilon A)\varphi + \varepsilon\Big(A^2 + \frac{1}{2}B^2 - \frac{B^2}{6}\cos(2\varphi) + C\sin\varphi + D\cos\varphi\Big) \tag{C.12}$$

も解である。(C.10) を代入し、$C = 0$ とし、D を上手く選べば (C.11) を取り込める。

[2)] より現代的には、くりこみ群の方法 [10] がある。

References

[1] 山中 健「合成関数の高階微分の公式について」
https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/03/3-5.pdf
(2025 年 11 月 9 日)

[2] 友近 晋『楕円函数論』河出書房新社, 1942 年.

[3] 中嶋 慧「惑星による近日点移動」
https://cf096240.cloudfree.jp/perihelion_planet.pdf

[4] 戸田 盛和『楕円関数入門』日本評論社, 2001 年.

[5] E. T. Whittaker and G. N. Watson, "A Course of Modern Analysis", Fifth edition, §21.8, Cambridge University Press, 2021.

[6] EMAN の物理学, 相対性理論, 水星の近日点移動
https://eman-physics.net/relativity/mercury.html
(2025 年 11 月 8 日)

[7] 江沢 洋, 中村 孔一, 山本 義隆『演習詳解力学 第 2 版』筑摩書房, 2022 年.

[8] 戸田 盛和『振動論』 3-7 節, 培風館, 1968 年.

[9] 中嶋 慧「一般相対論的効果による近日点移動：特異摂動論」
https://cf096240.cloudfree.jp/perihelion_GR_perturbation.pdf

[10] 千葉 逸人『解くための微分方程式と力学系理論』現代数学社, 2021 年.