平行移動：ディラックの方法

中嶋 慧

October 14, 2019

Abstract

この文章ではディラックの教科書[1)]を参考に、平行移動を議論する。(擬) リーマン空間を平坦な高次元空間に埋め込んで議論する。

Contents

1　設定

dim M 次元リーマン空間または擬リーマン空間 M を考える。M の座標を x^μ とし、計量を $g_{\mu\nu}(x)$ とする。計量の符号は $(s, \dim M - s)$ とする。M が dim N 次元の平坦な空間 N に埋め込まれているとする。N の符号を $(S, \dim N - S)$ とする。N の座標を y^m とし、計量を h_{nm} とする。h_{nm} は y に依らない。

x に対応する y 座標を $y^m(x)$ と書く。$x+\delta x$ の y 座標は $y^m(x)+\delta y^m(x)$ で、

$$\delta y^m = \partial_\mu y^m \delta x^\mu \tag{1.1}$$

となる。よって、

$$\delta s^2 = h_{nm}\partial_\mu y^m \partial_\nu y^n \delta x^\mu \delta x^\nu \tag{1.2}$$

である。これと

$$\delta s^2 = g_{\mu\nu}(x)\delta x^\mu \delta x^\nu \tag{1.3}$$

---
1) ディラック『一般相対性理論』(ちくま学芸文庫, 2005 年).

とを比べて、

$$g_{\mu\nu}(x) = h_{nm}\partial_\mu y^m \partial_\nu y^n \tag{1.4}$$

を得る。

(1.1) より、ベクトル $A^\mu(x)$ を N から見ると、

$$A^m(x) := y^m_\mu(x)A^\mu(x), \quad y^m_\mu(x) := \partial_\mu y^m \tag{1.5}$$

となる事が分かる。$A^m(x)$ は M の x での接空間 T_xM 内にある。

2 A^μ の平行移動

2.1 平行移動

さて、N は平坦なので、$A^m(x)$ を $x+\delta x$ まで平行させても成分は変わらない。ただし、それはもはや $T_{x+\delta x}M$ からははみ出している。$A^m(x)$ を $T_{x+\delta x}M$ に射影したものを $A^m_\parallel(x+\delta x)$ と書く。また、

$$A^m_\perp(x+\delta x) := A^m(x) - A^m_\parallel(x+\delta x) \tag{2.1}$$

とする。よって、

$$A^m(x) = A^m_\parallel(x+\delta x) + A^m_\perp(x+\delta x) \tag{2.2}$$

である。$A^m_\perp(x+\delta x)$ は $T_{x+\delta x}M$ の任意のベクトルと直交する。$T_{x+\delta x}M$ のベクトル $B^\nu(x+\delta x)$ は、(1.5) より、N では $B^n(x+\delta x) = y^n_\nu(x+\delta x)B^\nu(x+\delta x)$ と見える。よって、

$$h_{mn}A^m_\perp(x+\delta x)B^n(x+\delta x) = 0 \tag{2.3}$$

は、

$$h_{mn}A^m_\perp(x+\delta x)y^n_\nu(x+\delta x) = 0 \tag{2.4}$$

を意味する。

$A^m_\parallel(x+\delta x)$ を x 系で見たものを $A^\mu_\parallel(x+\delta x)$ と書く。(1.5) より、

$$A^m_\parallel(x+\delta x) = y^m_\mu(x+\delta x)A^\mu_\parallel(x+\delta x) \tag{2.5}$$

となる。これに $h_{mn}y^n_\nu(x+\delta x)$ を書けると、

$$h_{mn}A^m(x)y^n_\nu(x+\delta x) = h_{mn}y^m_\mu(x+\delta x)y^n_\nu(x+\delta x)A^\mu_\parallel(x+\delta x) \tag{2.6}$$

となる。ここで、(2.4) を用いた。(1.4) より、上式は、

$$h_{mn}A^m(x)y^n_\nu(x+\delta x) = g_{\mu\nu}(x+\delta x)A^\mu_\parallel(x+\delta x) \tag{2.7}$$

となる。左辺は、

$$
\begin{aligned}
h_{mn}A^m(x)y^n_\nu(x+\delta x) &= h_{mn}y^m_\mu(x)A^\mu(x)y^n_\nu(x+\delta x) \\
&= h_{mn}y^m_\mu(x)A^\mu(x)[y^n_\nu(x)+\partial_\lambda y^n_\nu(x)\delta x^\lambda] \\
&= g_{\mu\nu}(x)A^\mu(x)+h_{mn}y^m_\mu(x)\partial_\lambda y^n_\nu(x)A^\mu(x)\delta x^\lambda
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

なので、(2.7) は、

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(x+\delta x)A^\mu_\parallel(x+\delta x) &= g_{\mu\nu}(x)A^\mu(x)+h_{mn}y^m_\mu(x)\partial_\lambda y^n_\nu(x)A^\mu(x)\delta x^\lambda \\
&\equiv g_{\mu\nu}(x)A^\mu(x)+\Gamma_{\mu\nu\lambda}(x)A^\mu(x)\delta x^\lambda
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

となる。ここで、

$$
\Gamma_{\mu\nu\lambda}(x) := h_{mn}y^m_\mu(x)\partial_\lambda y^n_\nu(x) \tag{2.10}
$$

である。

2.2 $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ を計量テンソル $g_{\mu\nu}$ で表す

次に、

$$
\Gamma_{\mu\nu\lambda}(x) = \frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\mu\nu}+\partial_\nu g_{\mu\lambda}-\partial_\mu g_{\nu\lambda}) \tag{2.11}
$$

を示す。まず、(1.4) より、

$$
\partial_\lambda g_{\mu\nu} = h_{nm}\partial_\lambda y^m_\mu y^n_\nu + h_{nm}y^m_\mu\partial_\lambda y^n_\nu \tag{2.12}
$$

である。添え字を入れ換えて、

$$
\begin{aligned}
\partial_\nu g_{\mu\lambda} &= h_{nm}\partial_\nu y^m_\mu y^n_\lambda + h_{nm}y^m_\mu\partial_\nu y^n_\lambda \\
&= h_{nm}\partial_\nu y^m_\mu y^n_\lambda + h_{nm}y^m_\mu\partial_\lambda y^n_\nu,
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu g_{\nu\lambda} &= h_{nm}\partial_\mu y^m_\nu y^n_\lambda + h_{nm}y^m_\nu\partial_\mu y^n_\lambda \\
&= h_{nm}\partial_\nu y^m_\mu y^n_\lambda + h_{nm}y^m_\nu\partial_\lambda y^n_\mu
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

である。よって (2.11) を得る。

2.3 $A^\mu_\parallel(x+\delta x)$

さて、(2.9) より、

$$
A^\mu_\parallel(x+\delta x) = g^{\mu\lambda}(x+\delta x)g_{\lambda\nu}(x)A^\nu(x)+g^{\mu\lambda}(x)\Gamma_{\nu\lambda\sigma}(x)A^\nu(x)\delta x^\sigma \tag{2.15}
$$

となる。ここで、δx の 2 次以上の微小量を無視した。$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列である。

さて、

$$\begin{aligned} g^{\mu\lambda}(x+\delta x) &= g^{\mu\lambda}(x) + \partial_\sigma g^{\mu\lambda}(x)\delta x^\sigma \\ &= g^{\mu\lambda}(x) - g^{\mu\alpha}g^{\lambda\beta}\partial_\sigma g_{\alpha\beta}\delta x^\sigma \end{aligned} \tag{2.16}$$

なので[2)]、

$$\begin{aligned} A^\mu_\parallel(x+\delta x) &= A^\mu(x) - [g^{\mu\lambda}\partial_\sigma g_{\lambda\nu} - g^{\mu\lambda}\Gamma_{\nu\lambda\sigma}]A^\nu(x)\delta x^\sigma \\ &= A^\mu(x) - g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\nu\sigma}\delta x^\sigma \\ &= A^\mu(x) - \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}(x)\delta x^\sigma \end{aligned} \tag{2.17}$$

となる。ここで、

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} := g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\nu\sigma} \tag{2.18}$$

である。

3　A_μ の平行移動

A_ν を $x+\delta x$ まで平行移動したものを $A^\parallel_\nu(x+\delta x)$ とする。
(1.5) より、ベクトル $A_\mu(x)$ を N から見ると、

$$A_m(x) := y^\mu_m(x)A_\mu(x), \quad y^\mu_m(x) := h_{mn}g^{\mu\nu}y^n_\nu \tag{3.1}$$

となる。
$A_m(x)$ を $T^*_{x+\delta x}M$ に射影したものを $A^\parallel_m(x+\delta x)$ と書く。また、

$$A^\perp_m(x+\delta x) := A_m(x) - A^\parallel_m(x+\delta x) \tag{3.2}$$

とする。よって、

$$A_m(x) = A^\parallel_m(x+\delta x) + A^\perp_m(x+\delta x) \tag{3.3}$$

である。$A^\perp_m(x+\delta x)$ は $T^*_{x+\delta x}M$ の任意のベクトルと直交する。$T^*_{x+\delta x}M$ のベクトル $B_\nu(x+\delta x)$ は、(1.5) より、N では $B_n(x+\delta x) = y^\nu_n(x+\delta x)B_\nu(x+\delta x)$ と見える。よって、

$$h^{mn}A^\perp_m(x+\delta x)B_n(x+\delta x) = 0 \tag{3.4}$$

は、

$$h^{mn}A^\perp_m(x+\delta x)y^\nu_n(x+\delta x) = 0 \tag{3.5}$$

[2)] $g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$ を微分して、

$$\begin{aligned} \partial_\lambda g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} + g^{\alpha\gamma}\partial_\lambda g_{\gamma\beta} &= 0, \\ \partial_\lambda g^{\alpha\beta} &= -g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

を得る。

を意味する。

(3.1) より、

$$A^{\parallel}_{m}(x+\delta x) = y^{\mu}_{m}(x+\delta x)A^{\parallel}_{\mu}(x+\delta x) \tag{3.6}$$

となる。これに $h^{mn}y^{\nu}_{n}(x+\delta x)$ を書けると、

$$h^{mn}A_m(x)y^{\nu}_{n}(x+\delta x) = h^{mn}y^{\mu}_{m}(x+\delta x)y^{\nu}_{n}(x+\delta x)A^{\parallel}_{\mu}(x+\delta x) \tag{3.7}$$

となる。ここで、(3.5) を用いた。

$$h^{mn}y^{\mu}_{m}(x)y^{\nu}_{n}(x) = g^{\mu\nu}(x) \tag{3.8}$$

より、上式は、

$$h^{mn}A_m(x)y^{\nu}_{n}(x+\delta x) = g^{\mu\nu}(x+\delta x)A^{\parallel}_{\mu}(x+\delta x) \tag{3.9}$$

となる。左辺は、

$$\begin{aligned} h^{mn}A_m(x)y^{\nu}_{n}(x+\delta x) &= h^{mn}y^{\mu}_{m}(x)A_{\mu}(x)y^{\nu}_{n}(x+\delta x) \\ &= h^{mn}y^{\mu}_{m}(x)A_{\mu}(x)[y^{\nu}_{n}(x)+\partial_{\lambda}y^{\nu}_{n}(x)\delta x^{\lambda}] \\ &= g^{\mu\nu}(x)A_{\mu}(x)+h^{mn}y^{\mu}_{m}(x)\partial_{\lambda}y^{\nu}_{n}(x)A_{\mu}(x)\delta x^{\lambda} \end{aligned} \tag{3.10}$$

なので、(3.9) は、

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}(x+\delta x)A^{\parallel}_{\mu}(x+\delta x) &= g^{\mu\nu}(x)A_{\mu}(x)+h^{mn}y^{\mu}_{m}(x)\partial_{\lambda}y^{\nu}_{n}(x)A_{\mu}(x)\delta x^{\lambda} \\ &\equiv g^{\mu\nu}(x)A_{\mu}(x)+\Xi^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x)A_{\mu}(x)\delta x^{\lambda} \end{aligned} \tag{3.11}$$

となる。ここで、

$$\Xi^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x) := h^{mn}y^{\mu}_{m}(x)\partial_{\lambda}y^{\nu}_{n}(x) \tag{3.12}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} A^{\parallel}_{\mu}(x+\delta x) &= g_{\mu\nu}(x+\delta x)g^{\lambda\nu}(x)A_{\lambda}(x)+g_{\mu\nu}(x)\Xi^{\lambda\nu}{}_{\sigma}(x)A_{\lambda}(x)\delta x^{\sigma} \\ &= A_{\mu}(x)+[\partial_{\sigma}g_{\mu\nu}g^{\lambda\nu}+g_{\mu\nu}(x)\Xi^{\lambda\nu}{}_{\sigma}(x)]A_{\lambda}(x)\delta x^{\sigma} \end{aligned} \tag{3.13}$$

である。以下で示すように、

$$\partial_{\sigma}g_{\mu\nu}g^{\lambda\nu}(x)+g_{\mu\nu}\Xi^{\lambda\nu}{}_{\sigma}(x) = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} \tag{3.14}$$

なので、

$$A^{\parallel}_{\mu}(x+\delta x) = A_{\mu}(x)+\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}A_{\lambda}(x)\delta x^{\sigma} \tag{3.15}$$

となる。

(3.14) は、

$$
\begin{aligned}
\Xi^{\lambda\nu}{}_{\sigma}(x) &= g^{\nu\mu}(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\kappa} g^{\lambda\kappa}) \\
&= g^{\nu\mu} g^{\lambda\kappa}(\Gamma_{\kappa\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\kappa}) \\
&= -g^{\nu\mu} g^{\lambda\kappa}\Gamma_{\mu\kappa\sigma} \\
&= -\frac{1}{2} g^{\nu\mu} g^{\lambda\kappa}(\partial_\sigma g_{\mu\kappa} + \partial_\kappa g_{\mu\sigma} - \partial_\mu g_{\kappa\sigma}) \\
&= \frac{1}{2}\Big[\partial_\sigma g^{\lambda\nu} + g^{\nu\mu} g^{\lambda\kappa}(\partial_\mu g_{\kappa\sigma} - \partial_\kappa g_{\mu\sigma})\Big] \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

と等価である。これを示そう。まず、

$$
\partial_\sigma g^{\lambda\nu} = h^{mn}\partial_\sigma y^\lambda_m(x) y^\nu_n(x) + h^{mn} y^\lambda_m(x)\partial_\sigma y^\nu_n(x) \qquad (3.17)
$$

である。次に、

$$
\begin{aligned}
g^{\nu\mu} g^{\lambda\kappa}\partial_\mu g_{\kappa\sigma} &= g^{\nu\mu} g^{\lambda\kappa} h^{mn}(\partial_\mu\partial_\kappa y_m \partial_\sigma y_n + \partial_\kappa y_m \partial_\mu\partial_\sigma y_n), \qquad (3.18) \\
g^{\nu\mu} g^{\lambda\kappa}\partial_\kappa g_{\mu\sigma} &= g^{\nu\mu} g^{\lambda\kappa} h^{mn}(\partial_\mu\partial_\kappa y_m \partial_\sigma y_n + \partial_\mu y_m \partial_\kappa\partial_\sigma y_n) \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
g^{\nu\mu} g^{\lambda\kappa}(\partial_\mu g_{\kappa\sigma} - \partial_\kappa g_{\mu\sigma}) &= g^{\nu\mu} g^{\lambda\kappa} h^{mn}(\partial_\kappa y_m \partial_\mu\partial_\sigma y_n - \partial_\mu y_m \partial_\kappa\partial_\sigma y_n) \\
&= h^{mn}(y^\lambda_m g^{\nu\mu}\partial_\mu\partial_\sigma y_n - y^\nu_m g^{\lambda\kappa}\partial_\kappa\partial_\sigma y_n) \\
&= h^{mn}(y^\lambda_m \partial_\sigma y^\nu_n - y^\nu_m \partial_\sigma y^\lambda_n) \\
&\quad - h^{mn}(y^\lambda_m \partial_\mu y_n \partial_\sigma g^{\nu\mu} - y^\nu_m \partial_\kappa y_n \partial_\sigma g^{\lambda\kappa}) \\
&= h^{mn}(y^\lambda_m \partial_\sigma y^\nu_n - y^\nu_m \partial_\sigma y^\lambda_n) \\
&\quad - (y^\lambda_m y^m_\mu \partial_\sigma g^{\nu\mu} - y^\nu_m y^m_\kappa \partial_\sigma g^{\lambda\kappa}) \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
y^\lambda_m y^m_\mu = g^{\lambda\sigma} h_{mn} y^n_\sigma y^m_\mu = g^{\lambda\sigma} g_{\sigma\mu} = \delta^\lambda_\mu \qquad (3.21)
$$

なので、(3.20) の第 2 項は消えて、

$$
g^{\nu\mu} g^{\lambda\kappa}(\partial_\mu g_{\kappa\sigma} - \partial_\kappa g_{\mu\sigma}) = h^{mn}(y^\lambda_m \partial_\sigma y^\nu_n - y^\nu_m \partial_\sigma y^\lambda_n) \qquad (3.22)
$$

となる。これと (3.17) より、(3.16) が成り立つ。よって、(3.14) が示された。