オイラー・マクローリンの公式と数値積分

中嶋 慧

November 4, 2022

Abstract

オイラー・マクローリンの公式と、そのロンバーグ積分法への応用を解説する。

Contents

1 オイラー・マクローリンの公式

1.1 公式

オイラー・マクローリンの公式は、

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n dx\ f(x) + \frac{1}{2}[f(m)+f(n)] + \sum_{l=1}^{2[\frac{M-1}{2}]} \frac{B_{2l}}{(2l)!}[f^{(2l-1)}(n) - f^{(2l-1)}(m)] + R_M(m,n), \tag{1.1}$$

$$R_M(m,n) = (-1)^{M+1}\int_m^n dx\ \frac{B_M(x-[x])}{M!} f^{(M)}(x) \tag{1.2}$$

である。ここで、$[z]$ はガウス記号 (z を超えない最大の整数) で、B_k はベルヌーイ数で、$B_k(x)$ はベルヌーイ多項式である。$M = 1, 2$ のときは右辺第 3 項の和は 0 とする。ベルヌーイ多項式は、

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (0 \leq x \leq 1) \tag{1.3}$$

で定義され、$B_n = B_n(0)$ である。例えば、$0 \leq x \leq 1$ で、

$$B_0(x) = 1, \tag{1.4}$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \tag{1.5}$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \tag{1.6}$$

などである。

1.2 証明

(1.1) を示す。(1.3) を x で微分すると、

$$t \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B'_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{1.7}$$

なので、

$$\frac{B'_n(x)}{n!} = \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!} \quad (n \geq 1) \tag{1.8}$$

を得る。これに $f^{(n-1)}(m+x)$ をかけて積分して、

$$\int_0^1 dx \ \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!} f^{(n-1)}(m+x) = \Big[B_n(x) \frac{f^{(n-1)}(m+x)}{n!} \Big]_0^1 - \int_0^1 dx \ f^{(n)}(m+x) \frac{B_n(x)}{n!} \tag{1.9}$$

を得る。これを繰り返して、

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \ f(m+x) &= \int_0^1 dx \ f(m+x) B_0(x) \\ &= \Big[\sum_{l=1}^{M} \frac{(-1)^{l-1} B_l(x)}{l!} f^{(l-1)}(m+x) \Big]_0^1 + (-1)^M \int_0^1 dx \ \frac{B_M(x)}{M!} f^{(M)}(m+x) \\ &= \frac{1}{2}[f(m) + f(m+1)] - \sum_{l=2}^{M} \frac{(-1)^l B_l}{l!} [f^{(l-1)}(m+1) - f^{(l-1)}(m)] \\ &\quad -R_M(m, m+1) \end{aligned} \tag{1.10}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned} \int_m^n dx \ f(x) &= \sum_{j=m}^{n-1} \int_0^1 dx \ f(j+x) \\ &= \sum_{k=m+1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2}[f(n) + f(m)] - \sum_{l=2}^{M} \frac{(-1)^l B_l}{l!} [f^{(l-1)}(n) - f^{(l-1)}(m)] \\ &\quad -R_M(m, n) \end{aligned} \tag{1.11}$$

となる。$B_{2p+1}=0$ $(p=1,2,\cdots)$ より、(1.1) を得る。

1.3　数値積分への応用

(1.11) で $f(x)=g(a+hx)$, $h=(b-a)/N$, $m=0$, $n=N$ とすると、

$$\int_m^n dx\ f(x) = \frac{1}{h}\int_a^b dx\ g(x) \tag{1.12}$$

なので、

$$\int_a^b dx\ g(x)\ =\ I(h) - \sum_{l=1}^{2[\frac{M-1}{2}]} h^{2l}\frac{B_{2l}}{(2l)!}[g^{(2l-1)}(b)-g^{(2l-1)}(a)] + h^M r_M(h), \tag{1.13}$$

$$I(h) := h\sum_{k=1}^{N-1} g(a+hk) + \frac{h}{2}[g(a)+g(b)], \tag{1.14}$$

$$r_M(h) := (-1)^M\int_a^b dx\ \frac{\tilde{B}_M(x)}{M!}g^{(M)}(x) \tag{1.15}$$

となる。ここで、$\tilde{B}_M(a+hx)=B_M(x-[x])$ である。$I(h)$ は台形公式である。誤差項は、

$$\begin{aligned}|r_M| &\le \int_a^b dx\ \left|\frac{\tilde{B}_M(x)}{M!}\right| |g^{(M)}(x)| \\ &\le \eta_M\int_a^b dx\ |g^{(M)}(x)| \end{aligned}\tag{1.16}$$

である。η_M は $|B_M(x)/M!|$ の最大値である。例えば、$g(x)=x^\alpha$ $(0<\alpha<1)$ とすると、

$$\int_0^b dx\ x^\alpha = I(h) + r_1 h,\quad |r_1| \le \frac{b^\alpha}{2} \tag{1.17}$$

を得る。ところで、

$$\int_0^b dx\ x^\alpha = \int_0^h dx\ x^\alpha + \int_h^b dx\ x^\alpha \tag{1.18}$$

とすると、第 1 項を台形公式で近似した誤差は、(1.17)(または直接計算) より $\mathcal{O}(h^{1+\alpha})$ であり、第 2 項を台形公式で近似した誤差は (1.13) から $\mathcal{O}(h^{1+\alpha})+\mathcal{O}(h^2)$ なので、

$$\int_0^b dx\ x^\alpha = I(h) + ch^{1+\alpha} + \mathcal{O}(h^2) \tag{1.19}$$

を得る。

なお、オイラー・マクローリンの公式を精密化したものから、

$$\int_0^b dx\ x^\alpha g(x) = I(h) + ch^{1+\alpha} + \mathcal{O}(h^2)\ \ (0<\alpha<1) \tag{1.20}$$

が得られる [1]。ここで $g(x)$ は $[0,b]$ で 1 階微分が連続な関数であり、c は α と $g(0)$ にのみ依り、b に依らない。

2　ロンバーグ積分法

2.1　台形公式

$g(x)$ の 2 階微分が $[a,b]$ で連続とすると、(1.13) で $M=2$ として、

$$\int_a^b dx\ g(x) = I(h) + r_2 h^2 \tag{2.1}$$

を得る。この場合、台形公式の誤差は $\mathcal{O}(h^2)$ である[1)] 。

2.2　シンプソン公式

$g(x)$ の 4 階微分が $[a,b]$ で連続とすると、(1.13) で $M=4$ として、

$$\int_a^b dx\ g(x) = I(h) + c_2 h^2 + r_4(h)h^4\,,\quad c_2 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{B_2}{2}[g^{(1)}(b) - g^{(1)}(a)] \tag{2.2}$$

を得る。ここで、$N=2N'$ とすると、h を $2h$ ともできるので、

$$\int_a^b dx\ g(x) = I(2h) + 2^2 c_2 h^2 + r_4(2h)(2h)^4 \tag{2.3}$$

となる。よって、

$$(2^2-1)\int_a^b dx\ g(x) = 2^2 I(h) - I(2h) + [2^2 r_4(h) - 2^4 r_4(2h)]h^4 \tag{2.4}$$

であり、

$$S(h) := \frac{2^2 I(h) - I(2h)}{2^2-1} = \frac{4I(h) - I(2h)}{3} \tag{2.5}$$

とすると、

$$\int_a^b dx\ g(x) = S(h) + r_4' h^4\,,\quad r_4' = \frac{2^2 r_4(h) - 2^4 r_4(2h)}{2^2-1} \tag{2.6}$$

である。$S(h)$ をシンプソンの公式という。この場合、シンプソンの公式の誤差は $\mathcal{O}(h^4)$ である[2)]
。

2.3　ブール公式

$g(x)$ の 6 階微分が $[a,b]$ で連続とすると、(1.13) で $M=6$ として、

$$\int_a^b dx\ g(x) = I(h) + c_2 h^2 + c_4 h^4 + r_6(h)h^6 \tag{2.7}$$

[1)] この条件が満たされないときは、(1.20) のようになり、誤差が大きくなることがある。
[2)] なお、$g(x)$ の 3 階微分が $[a,b]$ で連続のときは、同様の議論で誤差が $\mathcal{O}(h^3)$ であることが保証される。

を得る。$N=2N'$ とすると、

$$\int_a^b dx\ g(x) = S(h) + c_4' h^4 + \tilde{r}_6(h) h^6\,, \quad c_4' = \frac{2^2-2^4}{2^2-1} c_4 \tag{2.8}$$

となる。いま、$N=4N''$ とすると、

$$B(h) := \frac{2^4 S(h) - S(2h)}{2^4-1} = \frac{16S(h) - S(2h)}{15} \tag{2.9}$$

が計算でき、

$$\int_a^b dx\ g(x) = B(h) + r_6' h^6 \tag{2.10}$$

である。$B(h)$ をブールの公式という。この場合、ブールの公式の誤差は $\mathcal{O}(h^6)$ である。

2.4 ニュートン公式

$g(x)$ の 8 階微分が $[a,b]$ で連続とする。$N=8N'''$ とすると、同様に、

$$N(h) := \frac{2^6 B(h) - B(2h)}{2^6-1} = \frac{64B(h) - B(2h)}{63} \tag{2.11}$$

は、

$$\int_a^b dx\ g(x) = N(h) + r_8' h^8 \tag{2.12}$$

を満たす。$N(h)$ に特に名前はないが、ニュートンが 1695 年の論文で書いてる [2, 3] ので、ここではニュートンの公式と呼ぶ。この場合、ニュートンの公式の誤差は $\mathcal{O}(h^8)$ である。

2.5 ロンバーグ積分

この考え方を一般化した数値積分法をロンバーグ積分法という。

2.6 ニュートン・コーツの公式

n 点が等間隔に与えられたとき、その点を通る $(n-1)$ 次多項式が存在する。その多項式の積分によって、積分を近似する公式をニュートン・コーツの公式という。$n=2$ の場合、

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.13}$$

であり、台形公式である。$n=3$ の場合は、

$$(b-a)\frac{f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{6} \tag{2.14}$$

でシンプソンの公式となる。$n=4$ はシンプソンの 3/8 公式であり、$n=5$ がブール公式となる。ニュートンの公式はニュートン・コーツの公式には含まれない。

References

[1] J. N. Lynesst and B. W. Ninham, Mathematics of Computation **21**, 162 (1967).

[2] 長田直樹『ニュートン 無限級数の衝撃』現代数学社, 2019 年.

[3] Naoki Osada, Arch. Hist. Exact Sci. **67**, 457 (2013).