非慣性系

中嶋 慧

March 8, 2019

Abstract

このノートでは、ニュートン力学における非慣性系の運動方程式を、まずラグランジアンから導出し、次に一般相対論の質点の運動方程式から導出する。

Contents

1 設定

しばらくはニュートン力学を考え、重力はポテンシャル $U(\boldsymbol{x})$ で与えられるとする。§ 5 では一般相対論を考え、重力は計量テンソルで与えられるとする。

K_0 を慣性系とする。座標系 K' は K_0 に対して速度 $\boldsymbol{V}(t)$ で移動しているとする。更に、系 K は K' と原点 O を共有し、K' に対して角速度 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ で回転しているとする[1)]。ただし、$\boldsymbol{V}$ と、K' および K から見た粒子の速度は光速度に比べて十分小さいとする。K_0, K', K では、共通の時間座標 t を使う。

$\boldsymbol{e}_i^{(0)}$ を K_0 の i 番目の座標軸の単位方向ベクトルとする (これは時間に依らない)。これは、$\boldsymbol{e}_i^{(0)} \cdot \boldsymbol{e}_j^{(0)} = \delta_{ij}$ を満たす。K_0 から見た O の位置を $r_i \boldsymbol{e}_i^{(0)}$ とする。$\boldsymbol{e}_i(t)$ を K の i 番目の単位方向ベクトルとする (これは時間に依存する)。これは、$\boldsymbol{e}_i(t) \cdot \boldsymbol{e}_j(t) = \delta_{ij}$ を満たす。今、

$$\boldsymbol{e}_i(t) = R_{ji}(t) \boldsymbol{e}_j^{(0)} \tag{1.1}$$

とする。$R_{ij}(t)$ は直交行列で、

$$R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk}\,, \quad \det(R_{ij}) = 1 \tag{1.2}$$

[1)] $\boldsymbol{\Omega}(t)$ の意味は、すぐ後で詳しく述べる。

である。

$\boldsymbol{A}$ を任意のベクトルとすると、

$$\boldsymbol{A}(t) = A_i^{(0)}(t)\boldsymbol{e}_i^{(0)} = A_i(t)\boldsymbol{e}_i(t) \tag{1.3}$$

と書ける。このとき、

$$A_i^{(0)} = R_{ij}A_j, \tag{1.4}$$
$$A_i = R_{ji}A_j^{(0)} \tag{1.5}$$

となる。ここで、(1.2) を用いた。

K の座標 x_i は、K_0 では、

$$X_i = r_i(t) + R_{ij}(t)x_j \tag{1.6}$$

に対応する。ここで、$r_i(t)$ は O の位置で、$\dot{r}_i = \boldsymbol{V}(t)\cdot\boldsymbol{e}_i^{(0)}$ である。ただし、$\dot{X} = dX/dt$ である。

また、(1.2) より、

$$R_{ji}R_{ki} = \delta_{jk} \tag{1.7}$$

であり、これを微分して、

$$\dot{R}_{ji}R_{ki} + R_{ji}\dot{R}_{ki} = 0 \tag{1.8}$$

を得る。今、

$$\Omega_{jk}^{(0)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{R}_{ji}R_{ki} \tag{1.9}$$

と置くと、(1.8) は、

$$\Omega_{jk}^{(0)} + \Omega_{kj}^{(0)} = 0 \tag{1.10}$$

となる。よって、$\Omega_{jk}^{(0)}$ は反対称であり、

$$\Omega_{jk}^{(0)} = -\varepsilon_{ijk}\Omega_i^{(0)}(t) \tag{1.11}$$

の形に書ける。ここで、ε_{ijk} は完全反対称で、$\varepsilon_{123} = 1$ である。この時、角速度を、

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \Omega_i^{(0)}(t)\boldsymbol{e}_i^{(0)}(= \Omega_i\boldsymbol{e}_i) \tag{1.12}$$

と置く。

(1.6) で、X_i, x_j が粒子の位置で、時間の関数だとする。このとき、(1.6) を時間で微分して、

$$\dot{X}_i = \dot{r}_i + \dot{R}_{ij}x_j + R_{ij}\dot{x}_j \tag{1.13}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\dot{R}_{ij}x_j &= \Omega_{ik}^{(0)}R_{kj}x_j \\ &= -\varepsilon_{lik}\Omega_l^{(0)}R_{kj}x_j \end{aligned} \tag{1.14}$$

である。今、

$$x_k^{(0)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} R_{kj} x_j \tag{1.15}$$

とすると、これは

$$\boldsymbol{x} \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_i \boldsymbol{e}_i \tag{1.16}$$

を K_0 から見たときの k 成分である。今、$\boldsymbol{A} = A_i^{(0)} \boldsymbol{e}_i^{(0)} = A_i \boldsymbol{e}_i(t)$, $\boldsymbol{B} = B_i^{(0)} \boldsymbol{e}_i^{(0)} = B_i \boldsymbol{e}_i(t)$ に対して、

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon_{ijk} A_j^{(0)} B_k^{(0)} \boldsymbol{e}_i^{(0)} = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \boldsymbol{e}_i \tag{1.17}$$

とする。これを、

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_i^{(0)} \boldsymbol{e}_i^{(0)} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_i \boldsymbol{e}_i \tag{1.18}$$

と置く。このとき、

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ij} x_j &= \varepsilon_{ilk} \Omega_l^{(0)} x_k^{(0)} \\ &= (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})_i^{(0)} \end{aligned} \tag{1.19}$$

である。よって、

$$\dot{X}_i = \dot{r}_i + (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})_i^{(0)} + R_{ij} \dot{x}_j \tag{1.20}$$

となる。
　今、

$$\boldsymbol{v}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dot{X}_i \boldsymbol{e}_i^{(0)}, \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}' &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{V}(t) \\ &= \boldsymbol{v}' - \dot{r}_i \boldsymbol{e}_i^{(0)} (\equiv v_i' \boldsymbol{e}_i^{(0)}), \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\boldsymbol{v} \stackrel{\mathrm{def}}{=} R_{ij} \dot{x}_j \boldsymbol{e}_i^{(0)} = \dot{x}_i \boldsymbol{e}_i (\equiv v_i \boldsymbol{e}_i) \tag{1.23}$$

と置くと、これらは、K_0, K', K から見た質点の速度である。このとき、

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}(t), \tag{1.24}$$

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \boldsymbol{x} \tag{1.25}$$

である。K' での粒子の位置ベクトル $\boldsymbol{x}' = x_i^{(0)} \boldsymbol{e}_i^{(0)} \equiv x_i' \boldsymbol{e}_i^{(0)}$ と K でのそれ $\boldsymbol{x}$ は一致する。また、

$$\frac{dx_i'}{dt} = v_i' \tag{1.26}$$

である。

2 非慣性系での運動方程式の、ラグランジアンからの導出

まず、K' での運動方程式を求める。ラグランジアンは、

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}\boldsymbol{v}_0^2 - U \\ &= \frac{m}{2}\boldsymbol{v}'^2 + m\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V} + \frac{m}{2}\boldsymbol{V}^2 - U \end{aligned} \tag{2.1}$$

である。この式の第 3 項は位置も速度も含まず、運動方程式に効かない (または、時間だけの関数なので、$df(t)/dt$ の形に書けるので効かない)。第 2 項は、

$$m\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{V}) - m\boldsymbol{x}'\cdot\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} \tag{2.2}$$

と書ける。よって、運動方程式に効かない項を落とすと、

$$L' = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}'^2 - m\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{W} - U \tag{2.3}$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W} &\overset{\text{def}}{=} \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} \\ &= \ddot{r}_i\boldsymbol{e}_i^{(0)} \equiv W_i\boldsymbol{e}_i = W_i^{(0)}\boldsymbol{e}_i^{(0)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

である。ここで、$\ddot{X} = \frac{d^2}{dt^2}X$ である。オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$m\frac{dv_i'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x_i'} - mW_i^{(0)} \tag{2.5}$$

となる。右辺第 2 項は慣性力である。(1.26) より、上式は、

$$m\frac{d^2x_i'}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_i'} - mW_i^{(0)} \tag{2.6}$$

とも書ける。

次に K での運動方程式を調べる。(2.3) に (1.25) を代入して、

$$L = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2 + m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x}) + \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})^2 - m\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{W} - U \tag{2.7}$$

を得る。これより、

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})_i + m[\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\Omega})]_i - mW_i - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})_i, \tag{2.9}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = m\frac{dv_i}{dt} + m\frac{d(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})_i}{dt} \tag{2.10}$$

を得る。よって、オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} - mW_i + m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})_i + m\big(\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\Omega})\big)_i - m\frac{d(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})_i}{dt} \tag{2.11}$$

である。ここで、$v_i = \dot{x}_i$ を用いた。以下で示すように、

$$\frac{d(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})_i}{dt} = (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v})_i + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \boldsymbol{x}\right)_i \tag{2.12}$$

である。よって、(2.11) は、

$$m\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} - mW_i + m\left(\boldsymbol{x} \times \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_i + 2m(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega})_i + m\big(\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\Omega})\big)_i \tag{2.13}$$

となる。右辺の第 1 項以外は慣性力である。$2m(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega})_i$ の項はコリオリの力と呼ばれ、$m\big(\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\Omega})\big)_i$ の項は遠心力と呼ばれる。

(2.12) を示す。(2.12) の右辺は、

$$\begin{aligned}\frac{d(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})_i}{dt} &= \varepsilon_{ijk}\dot{\Omega}_j x_k + \varepsilon_{ijk}\Omega_j v_k \\ &= \varepsilon_{ijk}\dot{\Omega}_j x_k + (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v})_i \end{aligned} \tag{2.14}$$

である。上式の右辺第 1 項は、

$$\varepsilon_{ijk}\dot{\Omega}_j x_k = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \boldsymbol{x}\right)_i + \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\Omega} \cdot \frac{d\boldsymbol{e}_j}{dt} x_k \tag{2.15}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{e}_j}{dt} &= \dot{R}_{ij}\boldsymbol{e}_i^{(0)} \\ &= \Omega_{ik}^{(0)} R_{kj}\boldsymbol{e}_i^{(0)} \\ &= \Omega_{ik}^{(0)} R_{kj} R_{il}\boldsymbol{e}_l \\ &= \Omega_{lj}\boldsymbol{e}_l \end{aligned} \tag{2.16}$$

である。ただし、

$$\Omega_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_{ab}^{(0)} R_{ai} R_{bj} \tag{2.17}$$

であり、(1.5) より、

$$\Omega_{ij} = -\varepsilon_{kij}\Omega_k \tag{2.18}$$

となる。(2.15) の第 2 項において、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} \cdot \frac{d\boldsymbol{e}_j}{dt} &= \Omega_l \Omega_{lj} \\ &= -\varepsilon_{klj}\Omega_k\Omega_l \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

である。よって、(2.12) が示された。

3　非慣性系での計量

ここでは、K_0 で $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ が成り立つと仮定する。
線素は、

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (dX_i)^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu$$

である。ただし、$x^0 = ct$, $x^i = x_i$ である。
(1.6) より、

$$dX_i = dt(\dot{r}_i + \dot{R}_{ij}x_j) + R_{ij}dx_j \tag{3.1}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}(dX_i)^2 &= dt^2(\dot{r}_i + \dot{R}_{ij}x_j)^2 + (dx_i)^2 + 2dtdx_kR_{ik}(\dot{r}_i + \dot{R}_{ij}x_j) \\ &= h_{00}(t)(dx^0)^2 + (dx_i)^2 + 2h_{0k}(t)dx^0dx_k \end{aligned} \tag{3.2}$$

である。ここで、

$$h_{00} = \frac{1}{c^2}(\dot{r}_i + \dot{R}_{ij}x_j)^2, \tag{3.3}$$

$$h_{0k} = \frac{1}{c}R_{ik}(\dot{r}_i + \dot{R}_{ij}x_j) \tag{3.4}$$

である。また、

$$h_{ij} = 0 \tag{3.5}$$

である。$|h_{\mu\nu}| \ll 1$ である。

4　非慣性系での運動方程式の、一般相対論からの導出

一般相対論の質点の運動方程式は、

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \begin{Bmatrix}\alpha \\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \tag{4.1}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma \\ \mu\nu\end{Bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \tag{4.2}$$

である。これより、

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \begin{Bmatrix}\alpha \\ 00\end{Bmatrix}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 + 2\begin{Bmatrix}i \\ 0k\end{Bmatrix}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} + \begin{Bmatrix}i \\ kl\end{Bmatrix}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} = 0 \tag{4.3}$$

である。これから (2.13) を導入する。

$|h_{\mu\nu}(x)| \ll 1$ の仮定から、

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \approx \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}(\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) \tag{4.4}$$

であり、これより、

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ 00 \end{matrix} \right\} \approx \partial_0 h_{0k} - \frac{1}{2}\partial_k h_{00} \tag{4.5}$$

である。ここで、

$$\partial_0 h_{0k} = \frac{1}{c^2}\Big[R_{ik}\ddot{r}_i + \dot{R}_{ik}\dot{R}_{ij}x_j + R_{ik}\ddot{R}_{ij}x_j + \dot{R}_{ik}\dot{r}_i\Big], \tag{4.6}$$

$$-\frac{1}{2}\partial_k h_{00} = -\frac{1}{c^2}(\dot{R}_{ik}\dot{r}_i + \dot{R}_{ik}\dot{R}_{ij}x_j) \tag{4.7}$$

である。よって、

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ 00 \end{matrix} \right\} \approx \frac{1}{c^2}\Big[R_{ik}\ddot{r}_i + R_{ik}\ddot{R}_{ij}x_j\Big] \tag{4.8}$$

である。(1.11) より、

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ij} &= \Omega^{(0)}_{ik}R_{kj}, \\ \ddot{R}_{ij} &= \dot{\Omega}^{(0)}_{ik}R_{kj} + \Omega^{(0)}_{ik}\dot{R}_{kj} \\ &= \dot{\Omega}^{(0)}_{ik}R_{kj} + \Omega^{(0)}_{ik}\Omega^{(0)}_{kl}R_{lj} \end{aligned} \tag{4.9}$$

であるから、

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ 00 \end{matrix} \right\} \approx \frac{1}{c^2}\Big[R_{ik}\ddot{r}_i + R_{ik}\dot{\Omega}^{(0)}_{ik}R_{kj}x_j + R_{ik}\Omega^{(0)}_{ik}\Omega^{(0)}_{kl}R_{lj}x_j\Big] \tag{4.10}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} m\left\{ \begin{matrix} k \\ 00 \end{matrix} \right\}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 &\approx mc^2\left\{ \begin{matrix} k \\ 00 \end{matrix} \right\} \\ &\approx m\Big[R_{ik}\ddot{r}_i + R_{ik}\dot{\Omega}^{(0)}_{ik}R_{kj}x_j + R_{ik}\Omega^{(0)}_{ik}\Omega^{(0)}_{kl}R_{lj}x_j\Big] \end{aligned} \tag{4.11}$$

である。

(4.11) の第 1 項は (2.13) の第 2 項に対応している。以下で確かめるように、(4.11) の第 2 項は (2.13) の第 3 項に対応し、(4.11) の第 3 項は (2.13) の第 5 項に対応している。

$R_{ik}\dot{\Omega}^{(0)}_{ik}R_{kj}x_j$ において、$R_{kj}x_j = x^{(0)}_k$ である。また、

$$\dot{\Omega}^{(0)}_{ik}R_{kj}x_j = -\varepsilon_{ikm}\dot{\Omega}^{(0)}_m x^{(0)}_k = -\left(\boldsymbol{x} \times \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)\cdot \boldsymbol{e}^{(0)}_i \tag{4.12}$$

である。最後に、(1.5) より、$R_{ik}\dot{\Omega}^{(0)}_{ik}R_{kj}x_j$ は $-\left(\boldsymbol{x} \times \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_i$ に対応する。

$R_{ik}\Omega^{(0)}_{ik}\Omega^{(0)}_{kl}R_{lj}x_j$ において、

$$\begin{aligned}\Omega^{(0)}_{ik}\Omega^{(0)}_{kl}R_{lj}x_j &= \varepsilon_{ika}\Omega^{(0)}_a\varepsilon_{klb}\Omega^{(0)}_b x^{(0)}_l \\ &= \varepsilon_{ika}\Omega^{(0)}_a(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\Omega})^{(0)}_k \\ &= [(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\Omega})\times\boldsymbol{\Omega}]^{(0)}_i \\ &= -[\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\Omega})]^{(0)}_i \end{aligned} \tag{4.13}$$

なので、$R_{ik}\Omega^{(0)}_{ik}\Omega^{(0)}_{kl}R_{lj}x_j$ は、遠心力に対応する。

以下のように、(4.3) の第 3 項からコリオリの力を得る。$|h_{\mu\nu}| \ll 1$ と $\partial_0 h_{ij} \approx 0$ の下で[2]、

$$2\begin{Bmatrix} i \\ 0k \end{Bmatrix} \approx \partial_k h_{i0} - \partial_i h_{0k} = 2\partial_{[k}h_{i]0} \tag{4.14}$$

を得る。今、

$$\omega^j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}c\varepsilon^{jkm}\partial_{[k}h_{m]0} \tag{4.15}$$

とすると[3]、

$$\begin{aligned}2m\begin{Bmatrix} i \\ 0k \end{Bmatrix}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} &\approx 2m\varepsilon_{kij}\omega^j\frac{dx^k}{dt} \\ &= -2m(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\times\boldsymbol{\omega})^i \end{aligned} \tag{4.16}$$

となる。これはコリオリの力に対応する (コリオリの力を含む[4])。

コリオリの力の (4.15) の ω^i を求める。

$$h_{m0} = \frac{1}{c}R_{im}(\dot{r}_i + \dot{R}_{ij}x_j)$$

なので、

$$\begin{aligned}\partial_k h_{m0} &= \frac{1}{c}\dot{R}_{ik}R_{im} \\ &= \frac{1}{c}R_{lm}\Omega^{(0)}_{lj}R_{jk} \\ &= \frac{1}{c}\Omega_{mk}\end{aligned} \tag{4.17}$$

である。よって、

$$\omega^i = \Omega_i \tag{4.18}$$

となる。

以上より、(4.3) から (2.13) が導出された。

---

[2] K_0 で $h_{ij}=0$ なら、K でも $h_{ij}=0$ である。また、K_0 で $h_{ij}\sim h$ なら、K では、$\partial_0 h_{ij}$ は $h\beta$ のオーダーで、無視できる ((5.14))。

[3] ε^{jkm} は完全反対称で、$\varepsilon^{123}=1$ である。また、$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon^{ijk}$ と置く。

[4] K_0 で $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ が成立するなら、$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\Omega}$ となる ((4.18))。

5　K_0 で $h_{\mu\nu} \neq 0$ の場合

K_0 での $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ を $h^{(0)}_{\mu\nu}$ と書く。K_0 で、

$$|h^{(0)}_{\mu\nu}| \sim h \ll 1, \quad \partial_0 h^{(0)}_{\mu\nu} \approx 0 \tag{5.1}$$

の場合を考える。ここで、$h \stackrel{\text{def}}{=} h^{(0)}_{00}$ である。$\sim$ はオーダーが同じという意味である。この場合も、座標系変換の式は (1.6) であるとする。K_0, K', K から見た粒子の速度の典型的な大きさを v と置く。今、$\beta^2 \stackrel{\text{def}}{=} v^2/c^2 \sim \boldsymbol{V}^2/c^2 \ll 1$ を仮定している。さらに、$h \sim \beta^2$ を仮定し、(4.3) で β^2 のオーダーの項まで残すことを考える。

このとき、

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2dt^2 + (dX_i)^2 + h^{(0)}_{00}c^2dt^2 + 2h^{(0)}_{0i}cdtdX_i + h^{(0)}_{ij}dX_idX_j \\ &\equiv -c^2dt^2 + (dx_i)^2 + h_{00}c^2dt^2 + 2h_{0i}cdtdx_i + h_{ij}dx_idx_j \end{aligned} \tag{5.2}$$

であり、

$$dX_i = dt(\dot{r}_i + \dot{R}_{ij}x_j) + R_{ij}dx_j$$

より、

$$h_{00} = h^{(0)}_{00} + \frac{1}{c^2}(\dot{r}_i + \dot{R}_{ij}x_j)^2 + \frac{2}{c}h^{(0)}_{0i}(\dot{r}_i + \dot{R}_{ij}x_j) + \frac{1}{c^2}h^{(0)}_{ij}(\dot{r}_i + \dot{R}_{ik}x_k)(\dot{r}_j + \dot{R}_{jl}x_l), \tag{5.3}$$

$$h_{0k} = \frac{1}{c}R_{ik}(\dot{r}_i + \dot{R}_{ij}x_j) + h^{(0)}_{0i}R_{jk} + \frac{1}{c}h^{(0)}_{ij}(\dot{r}_i + \dot{R}_{il}x_l)R_{jk}, \tag{5.4}$$

$$h_{kl} = h^{(0)}_{ij}R_{ik}R_{jl} \tag{5.5}$$

となる。オーダーは、

$$h^{(0)}_{00} \sim h \sim \beta^2, \tag{5.6}$$

$$\frac{1}{c^2}(\dot{r}_i + \dot{R}_{ij}x_j)^2 \sim \beta^2, \tag{5.7}$$

$$\frac{2}{c}h^{(0)}_{0i}(\dot{r}_i + \dot{R}_{ij}x_j) \sim h\beta \sim \beta^3, \tag{5.8}$$

$$\frac{1}{c^2}h^{(0)}_{ij}(\dot{r}_i + \dot{R}_{ik}x_k)(\dot{r}_j + \dot{R}_{jl}x_l) \sim h\beta^2 \sim \beta^4, \tag{5.9}$$

$$\frac{1}{c}R_{ik}(\dot{r}_i + \dot{R}_{ij}x_j) \sim \beta, \tag{5.10}$$

$$h^{(0)}_{0i}R_{jk} \sim h \sim \beta^2, \tag{5.11}$$

$$\frac{1}{c}h^{(0)}_{ij}(\dot{r}_i + \dot{R}_{il}x_l)R_{jk} \sim h\beta \sim \beta^3, \tag{5.12}$$

$$h_{kl} \sim h \sim \beta^2 \tag{5.13}$$

である。また、$\partial_0 h^{(0)}_{\mu\nu}$ が $h\beta$ 程度以下だとすると、

$$\partial_0 h_{kl} \sim h\beta \sim \beta^3 \tag{5.14}$$

である。

(4.3) で β^2 のオーダーの項まで残すと、重力ポテンシャルがある場合の (2.13) が得られる。$h^{(0)}_{00}$ が重力ポテンシャルである。