n次元ベクトル解析

中嶋 慧

April 29, 2019

Contents

1　4次元のベクトル解析

4次元のユークリッド空間を考える。grad, rot, div を3次元のベクトル解析の記号とする。4次元へのそれらの拡張 grad_4, rot_4, div_4 と、med_4 を以下で定義する [1] [1)]：

$$\mathrm{grad}_4\varphi \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\varphi \\ \partial_4\varphi \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{rot}_4\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ a_4 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathrm{rot}\boldsymbol{a} \\ \partial_4\boldsymbol{a} - \mathrm{grad}a_4 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

$$\mathrm{med}_4\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathrm{med}\boldsymbol{b} \\ \partial_4\boldsymbol{b} - \mathrm{rot}\boldsymbol{a} \end{pmatrix}, \quad (\mathrm{med}\boldsymbol{b} \overset{\mathrm{def}}{=} -\mathrm{div}\boldsymbol{b}) \tag{1.3}$$

$$\mathrm{div}_4\begin{pmatrix} a_4 \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix} = \mathrm{div}\boldsymbol{a} + \partial_4 a_4. \tag{1.4}$$

今、6次元空間 $\{X^A\}_{A=1}^6$ を考え、

$$\star(dx^k \wedge dx^l) \overset{\mathrm{def}}{=} \varepsilon_{ikl}dX^i, \tag{1.5}$$

$$\star(dx^4 \wedge dx^i) \overset{\mathrm{def}}{=} dX^{i+3} \tag{1.6}$$

とする[2)]。このとき、

$$\star(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu) = \frac{1}{2}F_{kl}\varepsilon_{ikl}dX^i + \frac{1}{2}(F_{4i} - F_{i4})dX^{i+3} \tag{1.7}$$

[1)] med_4 の定義は、[1] のものとは少し異なる。

[2)] i, j などのラテン小文字の添え字は 1,2,3 を表し、μ, ν などのギリシャ文字の添え字は 1,2,3,4 を表す。

である。今、

$$a \stackrel{\text{def}}{=} a_i dx^i + a_4 dx^4 \tag{1.8}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\star da &= \partial_k a_l \varepsilon_{ikl} dX^i + (\partial_4 a_i - \partial_i a_4) dX^{i+3} \\ &= (\mathrm{rot}\boldsymbol{a})_i dX^i + (\partial_4 a_i - \partial_i a_4) dX^{i+3} \\ &= \sum_{A=1}^{6} \left[\mathrm{rot}_4 \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ a_4 \end{pmatrix} \right]_A dX^A \end{aligned} \tag{1.9}$$

である。

今、

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

とすると、

$${}^*F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & -B_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & -B_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & -B_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

である。ここで、

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{1.12}$$

に対して、

$$*F = \frac{1}{2} {}^*F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{1.13}$$

である。ただし、

$$*(a_{\mu_1 \cdots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{1}{s!} \varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_r \nu_1 \cdots \nu_s} a_{\mu_1 \cdots \mu_r} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_s} \tag{1.14}$$

である。ここで、$r + s = 4$ である。$\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_4}$ は完全反対称で、$\varepsilon_{1234} = 1$ である。

さて、$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ に対して、

$$*d*F = \partial_\mu F_{\mu\nu} dx^\nu \tag{1.15}$$

である。(1.10) の記号で、

$$\begin{aligned} *d*F &= \partial_i F_{ij} dx^j + \partial_4 F_{4j} dx^j + \partial_i F_{i4} dx^4 \\ &= \partial_i (\varepsilon_{ijk} B_k) dx^j + \partial_4 E_j dx^j - \partial_i E_i dx^4 \\ &= -\mathrm{div}\boldsymbol{E} dx^4 + [\partial_4 E_i - (\mathrm{rot}\boldsymbol{B})_i] dx^i \\ &= \left[\mathrm{med}_4 \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \right]_1 dx^4 + \sum_{i=1}^{3} \left[\mathrm{med}_4 \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \right]_{i+1} dx^i \end{aligned} \tag{1.16}$$

となる。ところで、

$$\sum_{i=1}^{3}(E_i dX^i + B_i dX^{i+3}) = \star * F \tag{1.17}$$

なので、$\mathrm{med}_4(\star * F)$ は $*d*F$ に相当する：

$$\mathrm{med}_4(\star * F) \approx *d*F. \tag{1.18}$$

これより、

$$\mathrm{med}_4(\star G) \approx *dG \tag{1.19}$$

を得る。G は 4 次元の 2 形式である。
　まとめると、

$$\mathrm{grad}_4\varphi \approx d\varphi, \tag{1.20}$$
$$\mathrm{rot}_4 a = \star da, \tag{1.21}$$
$$\mathrm{med}_4(\star G) \approx *dG, \tag{1.22}$$
$$\mathrm{div}_4 a = *d*a \tag{1.23}$$

となる。
　これより、

$$\mathrm{rot}_4\mathrm{grad}_4\varphi = \star dd\varphi = 0, \tag{1.24}$$
$$\mathrm{med}_4\mathrm{rot}_4 a \approx *dda = 0, \tag{1.25}$$
$$\mathrm{div}_4\mathrm{med}_4(\star G) = *d**dG = 0 \tag{1.26}$$

を得る。

2　n 次元のベクトル解析

$$A_n^{(0)} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{grad}_n, \tag{2.1}$$
$$A_n^{(1)} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{rot}_n, \tag{2.2}$$
$$A_n^{(2)} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{med}_n \tag{2.3}$$

とし、

$$A_{n+1}^{(m)}\begin{pmatrix}\beta^{(m)} \\ \beta^{(m-1)}\end{pmatrix} \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} A_n^{(m)}(\beta^{(m)}) \\ \partial_{n+1}\beta^{(m)} - A_n^{(m-1)}\big(\beta^{(m-1)}\big)\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

とする。また、

$$A_n^{(m+1)}A_n^{(m)}(\beta^{(m)}) = 0 \tag{2.5}$$

とする。$\beta^{(m)}$ は n 次元の m-form と同じだけの成分を持つベクトルである。例えば、

$$A_3^{(2)} = \mathrm{med}_3 = -\mathrm{div} \tag{2.6}$$

である ($\mathrm{med}_3 = \mathrm{div}$ でも良い)。

n 次元で (2.5) が満たされていると、$(n+1)$ 次元でも満たされている：

$$\begin{aligned} A_{n+1}^{(m+1)} A_{n+1}^{(m)} \begin{pmatrix} \beta^{(m)} \\ \beta^{(m-1)} \end{pmatrix} &= A_{n+1}^{(m+1)} \begin{pmatrix} A_n^{(m)}(\beta^{(m)}) \\ \partial_{n+1}\beta^{(m)} - A_n^{(m-1)}(\beta^{(m-1)}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_n^{(m+1)} A_n^{(m)}(\beta^{(m)}) \\ \partial_{n+1} A_n^{(m)}(\beta^{(m)}) - A_n^{(m)}(\partial_{n+1}\beta^{(m)}) + A_n^{(m)} A_n^{(m-1)}(\beta^{(m-1)}) \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

一般に、$\beta^{(m)}$ はある m-form $b^{(m)}$ と等価であり、

$$A_n^{(m)}(\beta^{(m)}) = \star_n^{(m)} db^{(m)} \tag{2.8}$$

の形になっていると思われる。(2.5) は、

$$ddb^{(m)} = 0 \tag{2.9}$$

を表すはずである。

References

[1] http://hooktail.sub.jp/vectoranalysis/4DNablaVer3.0.pdf