モノポールありの電磁気学

中嶋 慧

December 2, 2020

Abstract

この記事は、数理物理 Advent Calendar 2020 の 2 日目の記事である。

Contents

この記事では μ_0 と ε_0 は 1 とする。よって $c=1$ である。また、一般相対論的でなく、特殊相対論的に定式化する。計量は $(-1,1,1,1)$ とする。

1 導入

1.1 ヘビサイド方程式

よく知られているように、電場と磁場に対する $(3+1)$ 形式のマクスウェル方程式を最初に書いたのはヘビサイドである。その方程式には、磁流も含まれていた[1)]。そのため、磁荷, 磁流を含む電磁場の方程式をヘビサイド方程式という。ヘビサイド方程式は、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = \rho_{(\mathrm{m})}, \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = -\boldsymbol{J}_{(\mathrm{m})}, \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \rho, \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{J} \tag{1.4}$$

である。

複素電磁場

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{E} + i\boldsymbol{B} \tag{1.5}$$

を定義すると、ヘビサイド方程式は、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Psi} = \rho + i\rho_{(\mathrm{m})}, \tag{1.6}$$

$$-i\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\Psi} - \frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial t} = \boldsymbol{J} + i\boldsymbol{J}_{(\mathrm{m})} \tag{1.7}$$

となる。

今、

$$F_{i0} := E_i =: -F_{0i}\,,\quad F_{ij} := {\varepsilon_{ij}}^k B_k, \tag{1.8}$$

$$J^\mu := (\rho, \boldsymbol{J}), \tag{1.9}$$

$$J^\mu_{(\mathrm{m})} := (\rho_{(\mathrm{m})}, \boldsymbol{J}_{(\mathrm{m})}), \tag{1.10}$$

$$K_{\alpha\beta\gamma} := E_{\mu\alpha\beta\gamma} J^\mu_{(\mathrm{m})} \tag{1.11}$$

とする[2)]。ここで、$E_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は完全反対称で、$E_{0123}=1$ である[3)]。このとき、ヘビサイド方程式は、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu, \tag{1.12}$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = K_{\mu\nu\lambda} \tag{1.13}$$

[1)] 磁流 $\boldsymbol{J}_{(\mathrm{m})}$ にはオームの法則 $\boldsymbol{J}_{(\mathrm{m})} = g\boldsymbol{B}$ が仮定されていた。磁荷は 0 であった。
[2)] ${\varepsilon_{ij}}^k = \varepsilon_{ijk}$ であり、ε_{ijk} は完全反対称で、$\varepsilon_{123}=1$ である。
[3)] 一般相対論的には、$E_{0123} = \sqrt{-g}$ である。g は計量の行列式である。

となる。(1.13) は、

$$\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = J^\nu_{(\mathrm{m})} \tag{1.14}$$

とも書ける。ここで、

$${}^*F_{\mu\nu} := \frac{1}{2}E_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{1.15}$$

である[4)] 。(1.14) は (1.1), (1.2) からも直接得られるし、(1.13) と $E^{\mu\nu\lambda\alpha}$ とを縮約されることからも得られる。

　さらに、

$$F := \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{1.16}$$

$$K := \frac{1}{3!}K_{\alpha\beta\gamma}dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \tag{1.17}$$

とすると、(1.13) は、

$$dF = K \tag{1.18}$$

となる。(1.12) は、

$$d^\dagger F = j \quad (j := J_\mu dx^\mu) \tag{1.19}$$

や、

$$d * F = J(= *j) \tag{1.20}$$

と書ける[5)] 。ここで、

$$d^\dagger\omega := -(-1)^{Dp+D+1} * d * \omega \quad (\omega \text{は}\, p\, \text{形式}), \tag{1.21}$$

$$J := J^\mu\partial_\mu \rfloor \eta, \quad \eta := *1 \tag{1.22}$$

である。$\rfloor$ は内部積である。(1.14) は、

$$d^\dagger(*F) = -j_{(\mathrm{m})} \quad (j_{(\mathrm{m})} := J_{(\mathrm{m})\mu}dx^\mu) \tag{1.23}$$

となる[6)]。

[4)] 今、

$$F_{\mu\nu} = (-\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$$

と書くと、

$$F^{\mu\nu} = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}), \quad {}^*F^{\mu\nu} = (-\boldsymbol{B}, \boldsymbol{E})$$

である。

[5)] 任意の p 形式 $\omega = \omega_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$ のホッジ双対は、D 次元時空で、

$$*\omega := \frac{1}{r!}E^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_r}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_r} \quad (r := D - p)$$

である。$E_{\mu_1\cdots\mu_n}$ は完全反対称で、$E_{01\cdots d} = 1$ である。$d = D - 1$ である。一般相対論的には、$E_{01\cdots d} = \sqrt{-g}$ である。g は計量の行列式である。なお、$* * \omega = -(-1)^{p(D-p)}\omega$ である。

[6)] これは (1.18) のホッジ双対である。なお、

$$K = *j_{(\mathrm{m})}$$

である。

1.2　2つのベクトルポテンシャル

ヘビサイド方程式は、

$$dF = K, \tag{1.24}$$

$$d * F = J \tag{1.25}$$

であった。F を、

$$F = E + G \tag{1.26}$$

と分解し、

$$dE = 0, \tag{1.27}$$

$$d * E = J, \tag{1.28}$$

$$dG = K, \tag{1.29}$$

$$d * G = 0 \tag{1.30}$$

とする。E は普通のマクスウェル方程式を満たす。また、

$$G = *M \tag{1.31}$$

とすると、

$$d * M = K, \tag{1.32}$$

$$dM = 0 \tag{1.33}$$

であり、これは普通のマクスウェル方程式と同じ形である。よって、ヘビサイド方程式は、マクスウェル方程式 2 組に分かれる。

さて、この節の以下では、時空のトポロジーは自明だと仮定する。すると、(1.27), (1.33) より、

$$E = dA, \tag{1.34}$$

$$M = dB \tag{1.35}$$

と書ける。A, B はともに 1 形式である。F は、

$$F = dA + *dB \tag{1.36}$$

である。A, B の方程式は、

$$d * dA = J, \tag{1.37}$$

$$d * dB = K \tag{1.38}$$

である。ゲージ変換

$$A' = A - d\chi, \tag{1.39}$$

$$B' = B - d\lambda \tag{1.40}$$

の自由度がある。χ, λ はともにスカラー (0 形式) である。

2　変分原理

ヘビサイド方程式は、以下のラグランジアン形式[7)]から導かれる：

$$L = -\frac{1}{2}F \wedge *F + A \wedge J + K \wedge B\,, \quad F := dA + *dB. \tag{2.1}$$

ここで、A, B はベクトルポテンシャルである。J は電流 (1.22), K は磁流 (1.17) である。このとき、

$$\frac{\partial L}{\partial A} = J, \tag{2.2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial dA} = - * F, \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial L}{\partial B} = -K, \tag{2.4}$$
$$\frac{\partial L}{\partial dB} = F \tag{2.5}$$

である[8)]。オイラー・ラグランジュ方程式[9)]

$$\frac{\partial L}{\partial A} + d\frac{\partial L}{\partial dA} = 0\,, \quad \frac{\partial L}{\partial B} + d\frac{\partial L}{\partial dB} = 0 \tag{2.6}$$

は、

$$d * F = J, \tag{2.7}$$
$$dF = K \tag{2.8}$$

となる。これは、

$$d * dA = J, \tag{2.9}$$
$$d * dB = K \tag{2.10}$$

を意味する。

[7)] ラグランジアン密度に体積形式 $\eta(= *1)$ をかけたものをラグランジアン形式という。

[8)] 微分 p 形式 β $(p = 0, 1, \cdots, D)$ が微分形式の組 $\{\alpha^i\}_{i=1,\cdots,k}$ で表されていると仮定する。もし変分 $\delta\alpha^i$ の下で β の変分が

$$\delta\beta = \delta\alpha^i \wedge \omega_i$$

のように書けるとき、ω_i を β の α^i による微分と言い、

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha^i} := \omega_i$$

と書く [1]。すなわち、

$$\delta\beta \equiv \delta\alpha^i \wedge \frac{\partial \beta}{\partial \alpha^i}$$

である。

[9)] ψ が p 形式なら、

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\psi} = 0.$$

3　力

3.1　可能性 1

粒子に働く力を考える。これとしては、2 つの可能性が考えられる。1 つは、(2.1) の相互作用から求められる力である。(2.1) の相互作用の作用は、

$$S_{\mathrm{int}} = q\int_C A - q_{(\mathrm{m})}\int_C B = q\int_C dx^\mu \; A_\mu - q_{(\mathrm{m})}\int_C dx^\mu \; B_\mu \tag{3.1}$$

である。C は粒子の軌跡 (曲線) である。q は電荷, $q_{(\mathrm{m})}$ は磁荷である。よって、力は、

$$qE^\mu{}_\nu u^\nu - q_{(\mathrm{m})}M^\mu{}_\nu u^\nu \tag{3.2}$$

となる。ここで、u^μ は四元速度ベクトルであり、

$$E_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{3.3}$$

$$M_{\mu\nu} := \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{3.4}$$

である。微分形式で書くと、

$$E = dA, \quad M = dB \tag{3.5}$$

である[10]。単位体積当たりの力 f^μ は、

$$f^\mu = E^\mu{}_\nu J^\nu - M^\mu{}_\nu J^\nu_{(\mathrm{m})} \tag{3.6}$$

である。

3.2　可能性 2

力として別の可能性は、

$$f^\mu = F^\mu{}_\nu J^\nu - {}^*F^\mu{}_\nu J^\nu_{(\mathrm{m})} =: \tilde{f}^\mu \tag{3.7}$$

である [2]。空間成分は、

$$\boldsymbol{f} = \rho(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) + \rho_{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}) \tag{3.8}$$

である[11]。

単位体積当たりの力 f^μ は、電磁場のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ と、

$$\partial_\nu T^{\nu\mu} = -f^\mu \tag{3.9}$$

[10] $F = E + *M$ である。

[11] $E_{\mu\nu} = 0$ のとき、

$$f^\mu = -M^\mu{}_\nu J^\nu_{(\mathrm{m})}, \quad \tilde{f}^\mu = +M^\mu{}_\nu J^\nu_{(\mathrm{m})}$$

であり、逆符号である。

の関係にある。$\tilde{f}^\mu$ に対応するエネルギー・運動量テンソル $\tilde{T}^\mu{}_\nu$ は、

$$\tilde{T}^\mu{}_\nu = F^{\mu\lambda}F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{3.10}$$

であり、これは $F = dA$ の場合にはよく知られた表式である。$\partial_\mu \tilde{T}^\mu{}_\nu$ は、

$$\partial_\mu \tilde{T}^\mu{}_\nu = F_{\nu\lambda}\partial_\mu F^{\mu\lambda} + \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(\partial_\alpha F_{\nu\beta} - \partial_\beta F_{\nu\alpha} - \partial_\nu F_{\alpha\beta}) \tag{3.11}$$

となる。場の方程式 (1.12), (1.13) より、

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{T}^\mu{}_\nu &= -F_{\nu\lambda}J^\lambda + \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}E_{\lambda\alpha\nu\beta}J^\lambda_{(\mathrm{m})} \\ &= -F_{\nu\lambda}J^\lambda + {}^*F_{\nu\lambda}J^\lambda_{(\mathrm{m})} \\ &= -\tilde{f}_\nu \end{aligned} \tag{3.12}$$

となる。

3.3 可能性 1 に対するエネルギー・運動量テンソル

ところで、一般相対論ではエネルギー・運動量テンソルは、

$$T^{\mu\nu} = 2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \tag{3.13}$$

で求められる。g は計量の行列式である。$\mathcal{L}$ は電磁場のラグランジアン密度である。または、フレーム形式を θ^a とし、

$$T_a := \frac{\partial L}{\partial \theta^a} \tag{3.14}$$

とし、$T_a = T_{ab} * \theta^b$ と展開すると、T_{ab} が $T_{\mu\nu}$ に対応する [1]。さて、

$$-\frac{1}{2}F\wedge *F = -\frac{1}{2}(dA\wedge *dA - dB\wedge *dB) + dA\wedge dB \tag{3.15}$$

である。ここで、

$$*dB\wedge *dA = dA\wedge **dB = -dA\wedge dB \tag{3.16}$$

を用いた。第 1 等号で、ψ, χ がともに p 形式のとき、$\psi\wedge *\chi = \chi\wedge *\psi$ であることを使った。(3.15) の最後の項はフレーム形式によらないので、

$$T_a = \frac{\partial}{\partial\theta^a}\Big[-\frac{1}{2}(dA\wedge *dA - dB\wedge *dB)\Big] \tag{3.17}$$

であり、

$$T^\mu{}_\nu = E^{\mu\lambda}E_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu E_{\alpha\beta}E^{\alpha\beta} - M^{\mu\lambda}M_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu M_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta} \tag{3.18}$$

となる。

さて、(3.11) を得るのと同様にして、

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = E_{\nu\lambda}\partial_\mu E^{\mu\lambda} + \frac{1}{2}E^{\alpha\beta}(\partial_\alpha E_{\nu\beta} - \partial_\beta E_{\nu\alpha} - \partial_\nu E_{\alpha\beta}) \\ -M_{\nu\lambda}\partial_\mu M^{\mu\lambda} - \frac{1}{2}M^{\alpha\beta}(\partial_\alpha M_{\nu\beta} - \partial_\beta M_{\nu\alpha} - \partial_\nu M_{\alpha\beta}) \tag{3.19}$$

を得る。$ddA = 0$ と $ddB = 0$ に対応する恒等式

$$\partial_\alpha E_{\nu\beta} - \partial_\beta E_{\nu\alpha} - \partial_\nu E_{\alpha\beta} = 0, \tag{3.20}$$

$$\partial_\alpha M_{\nu\beta} - \partial_\beta M_{\nu\alpha} - \partial_\nu M_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.21}$$

と、場の方程式

$$\partial_\mu E^{\mu\lambda} = -J^\lambda, \tag{3.22}$$

$$\partial_\mu M^{\mu\lambda} = -J^\lambda_{(\mathrm{m})} \tag{3.23}$$

より[12)]、

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = -E_{\nu\lambda}J^\lambda + M_{\nu\lambda}J^\lambda_{(\mathrm{m})} = -f_\nu \tag{3.24}$$

となる。よって、$T^{\mu\nu}$ は力 (3.6) に対応する。

4 アクシオン項がある場合

電磁場のラグランジアン形式として、

$$L = -\frac{\beta}{2}F\wedge *F - \frac{\alpha}{2}F\wedge F + A\wedge J + K\wedge B \quad (F = dA + *dB) \tag{4.1}$$

を考える。$\beta = 1$, $\alpha = 0$ で (2.1) になる。$F = dA$ のとき、$F\wedge F$ は全微分 $d(A\wedge dA)$ だが、今は全微分ではない。このとき、

$$\frac{\partial L}{\partial A} = J, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial dA} = -\beta * F - \alpha F, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial B} = -K, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial dB} = \beta F - \alpha * F \tag{4.5}$$

であるから、オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$\beta d * F + \alpha dF = J, \tag{4.6}$$

$$\beta dF - \alpha d * F = K \tag{4.7}$$

---

12) (3.23) は、(2.10) より得られる $d^\dagger M = j_{(\mathrm{m})}$ から得られる。ここで、$M = dB$, $j_{(\mathrm{m})} = J_{(\mathrm{m})\mu}dx^\mu$ であった。

である。(4.6), (4.7) は、

$$dF = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}J + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}K, \tag{4.8}$$

$$d*F = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}J - \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}K \tag{4.9}$$

となる[13)]。この方程式は、§1.2 と同様に、マクスウェル方程式 2 組に分解できる。(4.8), (4.9) は、

$$d*dB = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}J + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}K, \tag{4.10}$$

$$d*dA = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}J - \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}K \tag{4.11}$$

を意味する。

5 考察

5.1 ラグランジアン形式の分析

(3.15) は、

$$-\frac{1}{2}F\wedge *F = -\frac{1}{2}(dA\wedge *dA - dB\wedge *dB) + d(A\wedge dB) \tag{5.1}$$

と書ける。最後の項は全微分なので、オイラー･ラグランジュ方程式に効かない。なので、(2.1) は、

$$L \overset{\mathrm{w}}{=} -\frac{1}{2}dA\wedge *dA + A\wedge J - \Big[-\frac{1}{2}dB\wedge *dB + B\wedge K \Big] \tag{5.2}$$

となる。$\overset{\mathrm{w}}{=}$ は全微分を除いて等しいという意味である。よって、この系は、マクスウェル場 (通常の電磁場) が 2 つあるだけの系である。2 つのマクスウェル場の間に相互作用はない。

もし、ラグランジアン形式が、

$$L = -\frac{1}{2}dA\wedge *dA + A\wedge J - \frac{1}{2}dB\wedge *dB + B\wedge K \tag{5.3}$$

なら、単位体積あたりの力 f^μ は、

$$f^\mu = E^\mu{}_\nu J^\nu + M^\mu{}_\nu J^\nu_{(\mathrm{m})} \tag{5.4}$$

13) 特に $\beta = 0$ の時、

$$dF = \frac{1}{\alpha}J,$$
$$d*F = -\frac{1}{\alpha}K$$

である。

となる[14]。この方が物理的にもっともらしいだろう。

なお、

$$\begin{aligned} F\wedge F &= dA\wedge dA + *dB\wedge *dB + 2dA\wedge *dB \\ &= dA\wedge dA + dB\wedge **dB + 2dA\wedge *dB \\ &= d(A\wedge dA) - d(B\wedge dB) + 2dA*dB \\ &\overset{\mathrm{w}}{=} 2dA\wedge *dB, \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$*F\wedge *F = F\wedge **F = -F\wedge F, \tag{5.6}$$

$$dB\wedge *dA = dA\wedge *dB \tag{5.7}$$

である。

5.2 最も一般的な場合

さて、ゲージ変換 (1.39), (1.40) で不変なラグランジアン形式としては、

$$-\frac{a}{2}dA\wedge *dA - \frac{b}{2}dB\wedge *dB - c\,dA\wedge *dB \tag{5.8}$$

が最も一般的だろう。そこで、

$$L = -\frac{a}{2}dA\wedge *dA - \frac{b}{2}dB\wedge *dB - c\,dA\wedge *dB + A\wedge J - B\wedge K \tag{5.9}$$

を考える。このとき、

$$\frac{\partial L}{\partial A} = J, \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial dA} = -a*dA - c*dB, \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial B} = -K, \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial dB} = -b*dB - c*dA \tag{5.13}$$

であり、オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$ad*dA + cd*dB = J, \tag{5.14}$$

$$bd*dB + cd*dA = -K \tag{5.15}$$

である。これは、

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d*dA \\ d*dB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \\ -K \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

---

14) $E_{\mu\nu} = 0$ のとき、

$$f^\mu = M^\mu{}_\nu J^\nu_{(\mathrm{m})} = \tilde{f}^\mu.$$

である。$ab - c^2 \neq 0$ を仮定すると、

$$\begin{pmatrix} d * dA \\ d * dB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} J \\ -K \end{pmatrix} = \frac{1}{ab - c^2} \begin{pmatrix} b & -c \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J \\ -K \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

となる。よって、

$$d * dA = \frac{b}{ab - c^2} J + \frac{c}{ab - c^2} K, \tag{5.18}$$

$$d * dB = -\frac{c}{ab - c^2} J - \frac{a}{ab - c^2} K \tag{5.19}$$

となる。この方程式もやはり、2 組のマクスウェル方程式である。

5.3 n 組の場への拡張

n 個の 1 形式 $\{A^r\}_{r=1}^n$ のラグランジアン形式が、

$$L = -\frac{1}{2}\kappa_{rs} dA^r \wedge * dA^s + A^r \wedge J_r \tag{5.20}$$

とする。$\kappa_{rs} = \kappa_{sr}$ である。このとき、

$$\frac{\partial L}{\partial A^r} = J_r, \tag{5.21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial dA^r} = -\kappa_{rs} * dA^s \tag{5.22}$$

であり、オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$\kappa_{rs} d * dA^s = J_r \tag{5.23}$$

となる。これは、

$$d * dA^r = (\kappa^{-1})^{rs} J_s \tag{5.24}$$

となり[15]、n 組のマクスウェル方程式である[16]。

[15] $(\kappa^{-1})^{rs}$ は κ_{rs} の逆行列である。

[16] 運動方程式

$$\lambda_{rs} d * dA^s = J'_r$$

を考える。$\lambda = (\lambda_{rs})$ は任意の正則な実行列である (対称とは限らない)。今、

$$\begin{aligned} \kappa &:= \sqrt{{}^t\lambda\lambda}, \\ C &:= \lambda\kappa^{-1}, \\ J_r &:= (C^{-1})^{rs} J'_s \end{aligned}$$

とすると、上の運動方程式は、(5.24) の形になる。

References

[1] 中嶋慧, 松尾衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』(現代数学社, 2020 年).

[2] 太田浩一『マクスウェル理論の基礎—相対論と電磁気学』(東京大学出版会, 2002 年).