左右の固有ベクトル

中嶋 慧

July 29, 2020

Abstract

このノートでは、まず、正方行列 A の右固有ベクトル $|r_n\rangle$ と左固有ベクトル $\langle l_n|$ の定義を与え、

$$\begin{aligned}\langle l_m|r_n\rangle &= \delta_{nm},\\ A &= \sum_n \lambda_n|r_n\rangle\langle l_n|\end{aligned}$$

と出来ることと、A が対角化可能であることが同値であることを示す。

次に、確率行列やマスター方程式への左右の固有ベクトルの応用を議論する。

Contents

1 準備

N 次正方行列 A の固有ベクトル $|r_n\rangle$ を、

$$A|r_n\rangle = \lambda_n|r_n\rangle \tag{1.1}$$

で定義する。λ_n は固有値である。$|r_n\rangle$ を右固有ベクトルという。A の左固有ベクトル $\langle l_n|$ を、

$$\langle l_n|A = \lambda_n\langle l_n| \tag{1.2}$$

で定義する。(1.1) に $\langle l_m|$ を左からかけ、

$$\langle l_m|A|r_n\rangle = \lambda_n\langle l_m|r_n\rangle \tag{1.3}$$

となる。また (1.2) より、

$$\langle l_m|A|r_n\rangle = \lambda_m\langle l_m|r_n\rangle \tag{1.4}$$

であるから、

$$(\lambda_n - \lambda_m)\langle l_m|r_n\rangle = 0 \tag{1.5}$$

であり、

$$\lambda_n \neq \lambda_m \quad \text{なら} \quad \langle l_m|r_n\rangle = 0 \tag{1.6}$$

である。

2 疑問

さて、どのような時に以下の性質が成り立つか？

$$\langle l_m|r_n\rangle = \delta_{nm} \tag{2.1}$$

と規格直交化可能であり、A が、

$$A = \sum_n \lambda_n|r_n\rangle\langle l_n| \tag{2.2}$$

と書ける。

3 疑問への答え

A が対角化可能であることが必要十分である。

3.1 十分性

A が対角化可能なら§ 2 のように出来る。$U = (|r_1\rangle, |r_2\rangle, \cdots, |r_N\rangle)$ とし、

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \langle l_1| \\ \langle l_2| \\ \cdots \\ \langle l_N| \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

と置けば良い。このとき、$U^{-1}A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N)U^{-1}$ より (1.2) が成り立つ。また、(2.1) は明らかである。(2.2) は、

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N)U^{-1} \tag{3.2}$$

より従う。

3.2 必要性

$$V \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \langle l_1| \\ \langle l_2| \\ \cdots \\ \langle l_N| \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

と置くと、

$$\sum_n \lambda_n |r_n\rangle\langle l_n| = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N)V \tag{3.4}$$

である。また、(2.1) は、

$$VU = 1_N \tag{3.5}$$

なので、$V = U^{-1}$ となり、

$$\sum_n \lambda_n |r_n\rangle\langle l_n| = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N)U^{-1} \tag{3.6}$$

となるので、(2.2) は A が対角化可能であることを意味する。

4　確率行列とそのべき乗

N 次正方行列 $R=(R_{ik})$ が、

$$\sum_i R_{ik}=1 \tag{4.1}$$

を満たすとき、R 確率行列であるという。今、

$$e \overset{\text{def}}{=} (1,1,\cdots,1) \tag{4.2}$$

と置くと、(4.1) は、

$$eR=e \tag{4.3}$$

と同値である。よって、e は確率行列の固有値 1 の左固有ベクトルである。

今、

$$p=(p_1,p_2,\cdots,p_N)^T, \quad ep=1 \tag{4.4}$$

とする。^{T} は転置である。p が $ep=1$ を満たすとき確率と呼ぶと、

$$p' \overset{\text{def}}{=} Rp \tag{4.5}$$

も確率であって欲しい。(4.3) は p' も確率であること (確率保存) を表す。

今、

$$R|r_n\rangle=\lambda_n|r_n\rangle, \tag{4.6}$$

$$\langle l_n|R=\lambda_n\langle l_n|, \quad |l_0\rangle=e \tag{4.7}$$

とすると、R が対角化可能なら、

$$R=\sum_n \lambda_n|r_n\rangle\langle l_n|, \quad \langle l_m|r_n\rangle=\delta_{nm} \tag{4.8}$$

である。また、$\lambda_0=1$ であり、$\lambda_n(n\neq 1)$ の固有値の絶対値は 1 未満である。よって、

$$R^M=\sum_n \lambda_n^M|r_n\rangle\langle l_n| \tag{4.9}$$

であり、

$$\lim_{M\to\infty} R^M=|r_0\rangle\langle l_0|=|r_0\rangle e \tag{4.10}$$

である。ここで、

$$R|r_0\rangle=|r_0\rangle, \quad e|r_0\rangle=1 \tag{4.11}$$

であり、$|r_0\rangle$ は定常である。つまり、任意の確率 p について、

$$\lim_{M\to\infty} R^M p=|r_0\rangle \tag{4.12}$$

である。

5　マスター方程式：遷移行列と疑似逆行列

$p(t)$ を確率とし、その時間発展がマスター方程式

$$\frac{dp(t)}{dt} = Kp(t) \tag{5.1}$$

で記述されるとする。確率の保存より、

$$eK = 0 \tag{5.2}$$

である ((5.1) に左から e をかけよ)。よって、遷移行列 K は固有値 0 をを持ち、逆行列を持たない。しかし、

$$\mathcal{R}K = 1_N - |r_0\rangle e, \tag{5.3}$$

$$K|r_0\rangle = 0\,, \quad e|r_0\rangle = 1 \tag{5.4}$$

で定義される疑似逆行列 $\mathcal{R}$ は存在する。