

# これまでの研究概要

中嶋 慧

June 19, 2025

## 1 非平衡統計物理の研究

### 1.1 量子ポンプと過剰エントロピー生成の研究

#### 1.1.1 先行研究

メゾスコピック系では、(電圧や温度差などの) バイアスがない状況でも、2つ以上のコントロール可能なパラメーター (コントロールパラメーター) のゆっくりした変調によって、電流やスピン流が誘導される。量子断熱ポンプと呼ばれるこの現象は、量子効果と非平衡効果が重要なため、理論的に面白く、盛んに研究されている。論文 [1] では、real-time diagrammatic approach と呼ばれる方法によって、ポンプ電荷 (量子ポンプによって取り出される電荷) を表す幾何学的な表式が与えられた。また、論文 [2] では、量子マスター方程式と完全係数統計を組み合わせた手法 (FCS-QME) によって、同様の表式が与えられた。この両者の関係は分かっていなかった。

コントロールパラメーターをゆっくり動かすことで、メゾスコピック系を非平衡定常状態から別のそれへと変化されるときに生成されるエントロピーの平均値は、定常エントロピー生成流の時間積分と幾何学的な項からなる。後者は過剰エントロピー生成と呼ばれ、熱力学エントロピーの非平衡への拡張概念として注目され、盛んに研究されている。論文 [3] では上述の FCS-QME の方法で過剰エントロピー生成が調べられ、時間反転対称性のある系において、その表式が与えられた。

#### 1.1.2 我々の研究

論文 [R1] において、量子ポンプに対する real-time diagrammatic approach の方法と FCS-QME の方法との等価性を証明した。また、FCS-QME の方法をスピン流にも使えるように拡張した。この手法を用いて、2つのリードと結合した、クーロン相互作用がある 1 準位量子ドット系において、コントロールパラメーターの組が以下の場合のポンプ電荷およびポンプされるスピンを調べた：

- 片方のリードにかかる磁場と量子ドットにかかる磁場
- 片方のリードと量子ドットとの結合の強さと量子ドットにかかる磁場

論文 [R1] ではクーロン相互作用が小さい極限と大きい極限を調べ、博士論文 [R6] では一般の場合を調べた。

論文 [R2] では三角形をなす3つ量子ドット系において、その間を貫く磁束をコントロールパラメーターの1つとした量子ポンプを研究した。

論文 [R5] では、FCS-QME の方法で過剰エントロピー生成を調べた。まず先行研究 [3] では、計算しようとする量とその計算手法の両方に不備があることを指摘した。また、時間反転対称性を仮定せずに、過剰エントロピー生成の表式を求めた。時間反転対称性のある場合は [3] の結果と一致した。また、時間反転対称性がなく、注目系のエネルギー固有値が縮退している場合には、従来考えられていたよりも、コントロールパラメーターの経路依存性が大きくなり得ることを示した。

## 1.2 スピード限界の研究

### 1.2.1 先行研究

マスター方程式  $\frac{dp}{dt} = Kp$  の解を  $K$  の擬似逆を用いた無限級数 (以下、 $R$  級数と呼ぶ) で表すことがある ([1], [R1], [R5]) がそれは一般に発散する。 $R$  級数の適用限界は明らかでなかった。

近年、スピード限界の研究が盛んに行われている。量子孤立系でのスピード限界は、Mandelstam-Tamm の関係式をはじめとして、半世紀以上にわたり研究されてきた。近年、白石・布能・齊藤 [4] などの研究により、古典系でもスピード限界が成り立つことが明らかになった。この白石・布能・齊藤の式の等号成立の例は知られていなかった。白石・布能・齊藤の研究を受け、論文 [5, 6] で GKSL 量子マスター方程式に従う系でのスピード限界が研究された。Vu・長谷川 [6] は、全エントロピー生成についての下限を距離  $d_T$  とアクティビティを用いて与えた。ここで  $d_T$  は初期状態と終状態との間の距離で、初期状態、終状態の密度演算子の固有値によって測られる。そのため、異なる状態間で  $d_T$  がゼロになることがある。また、 $d_T$  は量子コヒーレンスを測ることができない。

### 1.2.2 我々の研究

論文 [R9] では、緩和時間モデルにおいて、 $R$  級数のボレル和が厳密解と一致することを示し、2 準位系では  $R$  級数が厳密解の漸近展開であることを示した。また、2 準位系でこの漸近展開を用いて、白石・布能・齊藤の式の等号成立の例を初めて与えた。

論文 [R11] では、GKSL 量子マスター方程式に従う系で、全エントロピー生成についての下限を、相互作用描像でのトレース距離と変形されたアクティビティを用いて与えた。相互作用描像でのトレース距離は  $d_T$  より小さくなることはないため、我々のバウンドは Vu・長谷川のものより良くなり得る。

論文 [R14] では、[5] において、GKSL 量子マスター方程式の交換子の項 (ハミルトニアン項) に由来する寄与の評価を改善した。これにより、評価が大幅に改善することがあることを示した。

## 1.3 熱力学的不確定性関係の研究

### 1.3.1 先行研究

近年、非平衡系におけるゆらぎに関する不等式の研究が盛んである。特に、§1.2 で解説したスピード限界と、熱力学的不確定性関係 (thermodynamic uncertainty relation および kinetic uncertainty relation, KUR) が関心を持たれている。GKSL 量子マスター方程式に従う系において、Vu と齊藤 [7] は量子系における KUR を導き、それにはアクティビティ  $B$  に量子補正  $Q$  を加えたものが現れることを示した。この  $Q$  を計算するのは膨大な数の quantum trajectory について和を実行する必要がある、重い数値計算が必要である。Vu と齊藤は、 $B + Q$  は SLD フィッシャー情報量で抑えられることを示し、長時間極限でのみその評価式を与えた。他方、長谷川 [8] は Mandelstam-Tamm のスピード限界を応用し、量子 KUR を導いた。そこには  $B$  という、アクティビティの拡張と呼ばれる量が現れたが、その物理的意味は不明であった。

### 1.3.2 我々の研究

論文 [R12] では、まず SLD フィッシャー情報量を有限時間で任意の初期状態で計算できる表式を与え、 $Q$  の上限  $Q_+$  を求めた。 $Q_+$  は時間に関する 2 重積分で書かれ、これは時間の連立 1 階常微分方程式を解くことで容易に計算できる。さらに、 $Q$  の下限  $Q_-$  の同様な表式を与えた。また、長谷川の  $B$  が SLD フィッシャー情報量 ( $B + Q_+$ ) である事を指摘した。さらに、Mandelstam-Tamm のスピード限界を応用し、相互作用描像での状態間の距離を  $\sqrt{B}$  を用いて上から抑えるスピード限界を導出した。

## 2 量子測定・量子操作の精度と速度との間のトレードオフ

### 2.1 先行研究

論文 [9] により、対称性 (保存則), 不可逆性, 量子コヒーレンスの間の普遍的なトレードオフ構造が示された (SIQ 定理)。論文 [10] では、論文 [9] の不可逆性をもとに、様々な誤差と擾乱 (小澤や李・筒井のものを含む) を統一的に定式化し、SIQ 定理を用いてその下限を導出した。SIQ 定理は有限自由度の系に対してのみ使える。

### 2.2 我々の研究

一般の有限自由度の量子系が、無限自由度の装置と結合している場合を考える。装置が局所ハミルトニアンで書ける場合に、量子測定・操作の精度 (誤差・擾乱) と測定時間との間の普遍的なトレードオフ関係を示した [R13]。証明の方針：

- 装置を有限自由度の部分系で近似する。
- この近似に伴う誤差・擾乱の誤差を Lieb-Robinson bound [12, 13] で評価する。
- SIQ 定理を保存則が破れる場合へ拡張し、それを用いて部分系に対する誤差・擾乱を評価する。

- 保存則の破れの大きさを Lieb-Robinson bound で評価する。
- 部分系の大きさを時間の関数として上手く選ぶ。

## 3 共変解析力学の研究

### 3.1 先行研究

従来の場の正準形式は時間を特別扱いしているため、共変性が明確でない。また、ゲージ場や重力場は拘束系となり、取り扱いが複雑になる。この2つの問題は、共変解析力学では解消される。共変解析力学は、「微分形式の微分形式による微分」を用いて定式化された、時間と空間を平等に扱う正準形式であり、1980年代に発明された[11]。また中村により2002年に再発見され、神長により発展させられた[14]。時間と空間を平等に扱う正準形式として1930年代にDe Donder-Weyl理論が作られたが、共変解析力学との関係は不明であった。論文[14]では、1階形式の重力場が調べられたが、ディラック場との結合は扱っておらず、手法は4次元に特化したものであった。また、論文[15]と[16]では、独立にポアソン括弧が定式化された。論文[16]では、2階形式の重力場に対して、局所ローレンツ変換の生成子が調べられた。

### 3.2 私の研究

論文[R4]において、共変解析力学の正準方程式は、De Donder-Weyl理論での正準方程式を修正したものと等価であることを示した。

論文[R3], [R7] および著書[R8]では、ディラック場と結合した重力場を1階形式で調べた。特に、論文[R7] および著書[R8]では、それを一般次元で扱えるように定式化した。

論文[R7]において、論文[15]と[16]の2つのポアソン括弧の等価性を指摘した。また、

- ゲージ対称性のある物質場
- ゲージ場
- 重力場 (1階形式)

において、局所ゲージ変換 (重力場に対しては局所ローレンツ変換) の生成子を調べて、その表式を求めた。

論文[R10]において、広くクラスの変換 (局所ゲージ変換を含む) に対する生成子は、ネーターカレント形式と一致する事を示した。論文[R7]の結果は論文[R10]に含まれる。

著書[R8]は、ゲージ場の古典論の一般論 (重力場をも含む) の教科書であり、共変解析力学の初めての和書である (おそらく、共変解析力学の世界初の教科書である)。(質点系の)解析力学の基礎と特殊相対論の基礎を修得している読者を対象に、ゲージ理論の入門を微分形式を駆使しながら行い、また、共変解析力学の出版当時までの研究を解説した。

## 先行研究

- [1] H. L. Calvo, L. Classen, J. Splettstoesser and M. R. Wegewijs, Phys. Rev. B **86**, 245308 (2012).
- [2] T. Yuge, T. Sagawa, A. Sugita and H. Hayakawa, Phys. Rev. B **86**, 235308 (2012).
- [3] T. Yuge, T. Sagawa, A. Sugita and H. Hayakawa, J. Stat. Phys. **153**, 412 (2013).
- [4] N. Shiraishi, K. Funo and K. Saito, Phys. Rev. Lett. **121**, 070601 (2018).
- [5] K. Funo, N. Shiraishi and K. Saito, New J. Phys. **21**, 013006 (2019).
- [6] T. V. Vu and Y. Hasegawa, Phys. Rev. Lett. **126**, 010601 (2021).
- [7] T. V. Vu and K. Saito, Phys. Rev. Lett. **128**, 140602 (2022).
- [8] Y. Hasegawa, Nat. Commun. **14**, 2828 (2023).
- [9] H. Tajima, R. Takagi, and Y. Kuramochi, arXiv:2206.11086v1.
- [10] H. Emori and H. Tajima, arXiv:2309.14172v1.
- [11] A. D’Adda, J. E. Nelson and T. Regge, Annals of Physics **165**, 384 (1985).
- [12] B. Nachtergaele, Y. Ogata, and R. Sims, J. Stat. Phys. **124**, 1 (2006).
- [13] E. Iyoda, K. Kaneko, and T. Sagawa, Phys. Rev. Lett. **119**, 100601 (2017).
- [14] Y. Kaminaga, Electron. J. Theor. Phys. **9**, 199 (2012).
- [15] Y. Kaminaga, Electron. J. Theor. Phys. **14**, 55 (2018).
- [16] L. Castellani and A. D’Adda, Phys. Rev. D **101**, 025015 (2020).

## 我々の論文・著書

- [R1] S. Nakajima, M. Taguchi, T. Kubo and Y. Tokura, Phys. Rev. B **92**, 195420 (2015).
- [R2] M. Taguchi, S. Nakajima, T. Kubo and Y. Tokura, J. Phys. Soc. Jpn. **85**, 084704 (2016).
- [R3] S. Nakajima, Electron. J. Theor. Phys. **13**, 95 (2016).
- [R4] S. Nakajima, arXiv:1602.04849.
- [R5] S. Nakajima and Y. Tokura, J. Stat. Phys. **169**, 902 (2017).
- [R6] S. Nakajima, arXiv:1710.05646 (博士論文).
- [R7] S. Nakajima, arXiv:1909.06779.

- [R8] 中嶋 慧, 松尾 衛 『一般ゲージ理論と共変解析力学』 (現代数学社, 2020 年).
- [R9] S. Nakajima and Yasuhiro Utsumi, Phys. Rev. E **104**, 054139 (2021).
- [R10] S. Nakajima, J. Phys. Soc. Jpn. **92**, 084001 (2023).
- [R11] S. Nakajima and Yasuhiro Utsumi, New. J. Phys. **24**, 095004 (2022).
- [R12] S. Nakajima and Yasuhiro Utsumi, Phys. Rev. E **108**, 054136 (2023).
- [R13] S. Nakajima and Hiroyasu Tajima, arXiv:2405.15291.
- [R14] K. Sekiguchi, S. Nakajima, K. Funo, and H. Tajima, arXiv:2410.11604.