『一般ゲージ理論と共変解析力学』の紹介

中嶋 慧

June 18, 2025

中嶋慧, 松尾衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』現代数学社, 2020 年

について紹介する。本書では、解析力学の基礎と特殊相対論の基礎を修得している読者を対象に、内山龍雄の一般ゲージ理論 (Phys. Rev. **101**, 1597 (1956)) と共変解析力学を解説した。一般ゲージ理論とは、古典系のゲージ理論の一般論であり、重力場を含む。共変解析力学とは、微分形式と「微分形式の微分形式による微分」とを用いて定式化される、時間と空間を平等に扱う解析力学である。本書は 5 部構成であり、第 1 部から第 4 部は私が、第 5 部は松尾氏が書き下ろし、全体を 2 人で協力して校正した。

第 1 部では質点系の解析力学の復習から始めて、電磁場, 複素スカラー場, ゲージ場, 重力場, ディラック場, ゲージ場としての重力場を解説した。また、テンソル解析や微分形式, 「微分形式の微分形式による微分」を解説した。微分形式 β が、微分形式の組 $\{\alpha^k\}$ で表されていて、α^k を微小に $\delta\alpha^k$ だけ動かしたとき、β の変化が、

$$\delta\beta = \sum_k \delta\alpha^k \wedge \omega_k$$

と書けるとき、ω_k を β の α^k による微分と言い、$\partial\beta/\partial\alpha^k$ と書く。

第 2 部は共変解析力学 (共変正準形式) の解説である。D 次元において、L をラグランジアンに対応する D 形式とするとき、

$$H(\psi^A, \pi_A) := \sum_A d\psi^A \wedge \pi_A - L(\psi^A, d\psi^A), \quad \pi_A := \frac{\partial L}{\partial d\psi^A}$$

で定義される D 形式を考える。共変正準形式における正準方程式は、De Donder-Weyl 理論のそれと等価であることを初めて示した。また、D 次元時空において、共変正準形式をディラック場と結合した重力場に応用し、正準方程式を導出した (D 次元での導出はこれが初めてである)。共変正準形式における生成子の研究についても紹介した。

第 3 部ではネーターの第 1 定理および第 2 定理を解説し、それを用いて内山龍雄の論文 (Phys. Rev. **101**, 1597 (1956)) を解説した。また、ワイルのゲージ理論, ヤンとミルズの 1954 年の論文, R. ショーの 1955 年の非可換ゲージ理論を紹介した。第 4 部は第 1, 2, 3 部への付録である。第 5 部は特殊相対論の復習の章と、一般ゲージ理論の物性への応用を解説した章からなる。