重力のラグランジアン形式

中嶋 慧

February 28, 2020

Abstract

重力場のラグランジアン形式を、局所ローレンツ不変性の要請から決定する。

Contents

1 記号と公式

計量テンソルは、

$$\mathring{g}_{ab}\theta^a \otimes \theta^b, \quad \mathring{g}_{ab} := \mathrm{diag}(-1, 1, 1 \cdots, 1) \tag{1.1}$$

と書ける。θ^a はフレーム形式である。また、

$$\begin{aligned} \eta := *1\ ,\ \eta^a := *\theta^a\ ,\ \eta^{ab} := *(\theta^a \wedge \theta^b)\ , \\ \eta^{abc} := *(\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c)\ ,\ \eta^{abcd} := *(\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c \wedge \theta^d) \end{aligned} \tag{1.2}$$

を導入する。以下の公式が成り立つ：

$$\theta^a \wedge \eta_{bcd} = \delta^a_b \eta_{cd} - \delta^a_c \eta_{bd} + \delta^a_d \eta_{bc}, \tag{1.3}$$

$$\theta^a \wedge \eta_{bc} = -\delta^a_b \eta_c + \delta^a_c \eta_b \tag{1.4}$$

2　ラグランジアン形式の候補

重力のラグランジアン形式を L_{G} とする。これは、$d\theta^a$ の 2 次であると仮定する。つまり、

$$d\theta^a = \frac{1}{2}\Delta_{abc}\theta^b \wedge \theta^c \tag{2.1}$$

と置くと、

$$L_{\mathrm{G}} = \mathcal{L}_{\mathrm{G}}\eta, \quad \mathcal{L}_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}\Delta^{abc}P_{abcdef}\Delta^{def} \tag{2.2}$$

であり[1]、P_{abcdef} は $\mathring{g}_{ij}$ だけで書けると仮定する。また、

$$P_{abcdef} = -P_{acbdef} = -P_{abcdfe} = P_{defabc} \tag{2.3}$$

である。このようなものは、

$$P_{abcdef} = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i {}^{(i)}P_{abcdef}, \tag{2.4}$$

$${}^{(1)}P_{abc}{}^{def} := \delta_a^d\delta_b^{[e}\delta_c^{f]}, \tag{2.5}$$

$${}^{(2)}P_{abc}{}^{def} := \mathring{g}_{a[b}\delta_{c]}^{[f}\mathring{g}^{e]d}, \tag{2.6}$$

$${}^{(3)}P_{abc}{}^{def} := \delta_a^{[d}\delta_b^e\delta_c^{f]} \tag{2.7}$$

の形に限られる。α_i は実定数である。

ところで、Δ_{abc} は、

$$\Delta_{abc} = {}^{(1)}\Delta_{abc} + {}^{(2)}\Delta_{abc} + {}^{(3)}\Delta_{abc}, \tag{2.8}$$

$${}^{(i)}\Delta^b{}_{ba} = \delta_2^i\Delta^b{}_{ba}, \tag{2.9}$$

$${}^{(i)}\Delta_{[abc]} = \delta_3^i\Delta_{[abc]} \tag{2.10}$$

と分解できる。$\Delta_a := \Delta^b{}_{ba}$ とすると、

$${}^{(2)}\Delta_{abc} = \frac{2\mathring{g}_{a[b}\Delta_{c]}}{D-1}, \tag{2.11}$$

$${}^{(3)}\Delta_{abc} = \Delta_{[abc]}, \tag{2.12}$$

$${}^{(1)}\Delta_{abc} = \Delta_{abc} - {}^{(2)}\Delta_{abc} - {}^{(3)}\Delta_{abc} \tag{2.13}$$

である。今、

$${}^{(i)}\Delta_{abc} = {}^{(i)}I_{abc}{}^{def}\Delta_{def} \tag{2.14}$$

と置くと、

$${}^{(3)}I_{abc}{}^{def} = \delta_a^{[d}\delta_b^e\delta_c^{f]}, \tag{2.15}$$

$${}^{(2)}I_{abc}{}^{def} = \frac{2}{D-1}\mathring{g}_{a[b}\delta_{c]}^{[f}\mathring{g}^{e]d} \tag{2.16}$$

[1]添え字の上げ下げは、$\mathring{g}_{ab}$ のとその逆行列 $\mathring{g}^{ab}$ で行う。

であり、

$$ {}^{(i)}I_{abcdef} = {}^{(i)}I_{defabc} \tag{2.17} $$

である。また、

$$ P_{abcdef} = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{1}{2} {}^{(i)}I_{abcdef} \tag{2.18} $$

と書ける。

3　$\partial L_{\mathrm{G}}/\partial d\theta^a$ の書き換え：一般形

以下、

$$ F_a := \frac{\partial L_{\mathrm{G}}}{\partial d\theta^a} \tag{3.1} $$

を求める。

まず、

$$ V_{a,bc} = d\theta_a \wedge \eta_{bc} \tag{3.2} $$

は D 形式であり、

$$ \begin{aligned} V_{a,bc} &= \frac{1}{2}\Delta_{ade}\theta^d \wedge \theta^e \wedge \eta_{bc} \\ &= \frac{1}{2}\Delta_{ade}\theta^d \wedge \theta^e \wedge \eta_{bc} \\ &= \frac{1}{2}\Delta_{ade}(\delta^d_b\delta^e_c - \delta^d_c\delta^e_b)\eta \\ &= \Delta_{abc}\eta \end{aligned} \tag{3.3} $$

となる。このとき、ξ を D 形式として、

$$ \delta\Delta_{abc}\xi = (-\delta V_{a,bc} + \Delta_{abc}\delta\eta) * \xi \tag{3.4} $$

となる。特に、

$$ \delta\Delta_{abc}\eta = \delta V_{a,bc} - \Delta_{abc}\delta\eta \tag{3.5} $$

である。$d\theta^a$ についての変分は、

$$ \delta\Delta_{abc}\eta = \delta d\theta_a \wedge \eta_{bc} \tag{3.6} $$

である。

さて、

$$ \begin{aligned} \delta L_{\mathrm{G}} &= \frac{1}{2}\delta\Delta^{abc}P_{abcdef}\Delta^{def}\eta + \frac{1}{2}\Delta^{abc}P_{abcdef}\delta\Delta^{def}\eta \\ &= \delta\Delta^{abc}P_{abcdef}\Delta^{def}\eta \end{aligned} \tag{3.7} $$

なので、

$$\delta L_{\mathrm{G}} = \delta d\theta^a \wedge \eta^{bc} P_{abcdef} \Delta^{def} \tag{3.8}$$

となり、

$$\begin{aligned} F_a &= P_{abcdef} \Delta^{def} \eta^{bc} \\ &= * \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{1}{2} {}^{(i)} I_{abcdef} \Delta^{def} \theta^b \wedge \theta^c \\ &= * \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{1}{2} {}^{(i)} \Delta_{abc} \theta^b \wedge \theta^c \\ &= * \sum_{i=1}^{3} a_i {}^{(i)} d\theta_a, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$ {}^{(i)} d\theta_a := \frac{1}{2} {}^{(i)} \Delta_{abc} \theta^b \wedge \theta^c \tag{3.10}$$

を得る。

4　ゲージ不変性の要請

微小ローレンツ変換は、

$$\delta\theta^a = \varepsilon^a{}_b \theta^b, \quad \varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba} \tag{4.1}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} \delta L_{\mathrm{G}} &= \delta\theta^a \wedge \frac{\partial L_{\mathrm{G}}}{\partial \theta^a} + d(\delta\theta^a) \wedge F_a \\ &= \varepsilon^a{}_b \Big(\theta^b \wedge \frac{\partial L_{\mathrm{G}}}{\partial \theta^a} + d\theta^b \wedge F_a \Big) + d\varepsilon^{ab} \wedge \theta_{[b} \wedge F_{a]} \end{aligned} \tag{4.2}$$

である。L_{G} が大域ローレンツ不変なら第 1 項は、0 である。第 2 項は、

$$d\varepsilon^{ab} \wedge \theta_{[b} \wedge F_{a]} = d\big(\varepsilon^{ab} \theta_{[b} \wedge F_{a]}\big) - \varepsilon^{ab} d\big(\theta_{[b} \wedge F_{a]}\big) \tag{4.3}$$

であり、これが全微分であって欲しいので、

$$d\big(\theta_{[b} \wedge F_{a]}\big) = 0 \tag{4.4}$$

が要請される。

さて、

$$\theta_{[b} \wedge F_{a]} = \sum_{i=1}^{3} \theta_{[b} \wedge a_i * {}^{(i)} d\theta_{a]} \tag{4.5}$$

である。ここで、

$$
\begin{aligned}
*{}^{(i)}d\theta_a &= \frac{1}{2}{}^{(i)}\Delta_{adc}\eta^{dc}, && (4.6)\\
\theta_b \wedge *{}^{(i)}d\theta_a &= \frac{1}{2}{}^{(i)}\Delta_{adc}\theta_b \wedge \eta^{dc}\\
&= \frac{1}{2}{}^{(i)}\Delta_{adc}(-\delta^d_b\eta^c + \delta^c_b\eta^d)\\
&= -{}^{(i)}\Delta_{abc}\eta^c && (4.7)
\end{aligned}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
\theta_b \wedge *{}^{(3)}d\theta_a &= -\Delta_{[abc]}\eta^c, && (4.8)\\
\theta_b \wedge *{}^{(2)}d\theta_a &= -\frac{2\mathring{g}_{a[b}\Delta_{c]}}{D-1}\eta^c\\
&= -\frac{\mathring{g}_{ab}}{D-1}\Delta_c\eta^c + \frac{1}{D-1}\Delta_b\eta_a && (4.9)
\end{aligned}
$$

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
\theta_{[b} \wedge *{}^{(3)}d\theta_{a]} &= -\Delta_{[abc]}\eta^c, && (4.10)\\
\theta_{[b} \wedge *{}^{(2)}d\theta_{a]} &= \frac{1}{D-1}\Delta_{[b}\eta_{a]}, && (4.11)\\
\theta_{[b} \wedge *d\theta_{a]} &= -\Delta_{[ab]c}\eta^c && (4.12)
\end{aligned}
$$

となる。今、

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}\mathcal{F}_{ab} &:= \Delta_{[ab]c}\eta^c = -\theta_{[b} \wedge *d\theta_{a]}, && (4.13)\\
{}^{(2)}\mathcal{F}_{ab} &:= 2\Delta_{[a}\eta_{b]} = -2(D-1)\theta_{[b} \wedge *{}^{(2)}d\theta_{a]}, && (4.14)\\
{}^{(3)}\mathcal{F}_{ab} &:= \Delta_{[abc]}\eta^c = -\theta_{[b} \wedge *{}^{(3)}d\theta_{a]} && (4.15)
\end{aligned}
$$

とすると、

$$
\theta_{[b} \wedge F_{a]} = \sum_{i=1}^{3} b_i {}^{(i)}\mathcal{F}_{ab} \tag{4.16}
$$

となる $\{b_i\}$ が存在する。今、

$$
\begin{aligned}
F_a &= *H_a, && (4.17)\\
H_a &= c_0 d\theta_a + c_2{}^{(2)}d\theta_a + c_3{}^{(3)}d\theta_a && (4.18)
\end{aligned}
$$

とすると、

$$
c_0 = -b_1\,, \quad c_2 = -2(D-1)b_2\,, \quad c_3 = -b_3 \tag{4.19}
$$

である。さて、

$$
\begin{aligned}
d\eta_{ab} &= d\theta^c \wedge \eta_{abc}\\
&= \frac{1}{2}\Delta^c{}_{de}\theta^d \wedge \theta^e \wedge \eta_{abc}\\
&= -\Delta_b\eta_a + \Delta_a\eta_b + \Delta^c{}_{ab}\eta_c\\
&= {}^{(2)}\mathcal{F}_{ab} + \Delta^c{}_{ab}\eta_c && (4.20)
\end{aligned}
$$

である。また、

$$\Delta_{[abc]} = \frac{2}{3}\Delta_{[ab]c} + \frac{1}{3}\Delta_{cab} \tag{4.21}$$

なので、

$$\Delta^c{}_{ab}\eta_c = 3^{(3)}\mathcal{F}_{ab} - 2^{(1)}\mathcal{F}_{ab} \tag{4.22}$$

である。よって、

$$d\eta_{ab} = {}^{(2)}\mathcal{F}_{ab} + 3^{(3)}\mathcal{F}_{ab} - 2^{(1)}\mathcal{F}_{ab} \tag{4.23}$$

となる。また、θ^a の双対基底を e_b とする $(e_a \rfloor \theta^b = \delta^b_a)$ と、

$$e_d \rfloor d\theta^d = \Delta_c\theta^c, \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}(e_d \rfloor d\theta^d) \wedge \eta_{ab} &= \Delta_c\theta^c \wedge \eta_{ab} \\ &= -2\Delta_{[a}\eta_{b]} \\ &= -{}^{(2)}\mathcal{F}_{ab}\end{aligned} \tag{4.25}$$

である。また、$\theta_{[a} \wedge *d\theta_{b]} = {}^{(1)}\mathcal{F}_{ab}$ である。

以上より、

$${}^{(1)}\mathcal{F}_{ab} = \theta_{[a} \wedge *d\theta_{b]}, \tag{4.26}$$

$${}^{(2)}\mathcal{F}_{ab} = (e_c \rfloor d\theta^c) \wedge \eta_{ab}, \tag{4.27}$$

$${}^{(3)}\mathcal{F}_{ab} = \frac{1}{3}\big[d\eta_{ab} - {}^{(2)}\mathcal{F}_{ab} + 2^{(1)}\mathcal{F}_{ab}\big] \tag{4.28}$$

であり、

$$\begin{aligned}\theta_{[b} \wedge F_{a]} &= \sum_{i=1}^{3} b_i{}^{(i)}\mathcal{F}_{ab} \\ &= \frac{b_3}{3}d\eta_{ab} + \Big(b_2 - \frac{1}{3}b_3\Big)(e_c \rfloor d\theta^c) \wedge \eta_{ab} + \Big(b_1 + \frac{2}{3}b_3\Big)\theta_{[a} \wedge *d\theta_{b]}\end{aligned} \tag{4.29}$$

を得る。よって、

$$b_2 = \frac{1}{3}b_3\,, \quad b_1 = -\frac{2}{3}b_3 \tag{4.30}$$

であれば良い [1]。よって、

$$\begin{aligned}H_a &= b_3\Big[\frac{2}{3}d\theta_a - \frac{2(D-1)}{3}{}^{(2)}d\theta_a - {}^{(3)}d\theta_a\Big] \\ &= b_3\Big[\frac{2}{3}d\theta_a - \frac{2}{3}\mathring{g}_{a[b}\Delta_{c]}\theta^b \wedge \theta^c - \frac{1}{2}\Delta_{[abc]}\theta^b \wedge \theta^c\Big]\end{aligned} \tag{4.31}$$

となる。これは、次を意味する：

$$\begin{aligned}F_a &= \frac{2b_3}{3}\Big[* d\theta_a - \mathring{g}_{a[b}\Delta_{c]}\eta^{bc} - \frac{3}{4}\Delta_{[abc]}\eta^{bc}\Big] \\ &= \frac{2b_3}{3}\Big[\frac{1}{2}\Delta_{abc}\eta^{bc} - \Delta^b\eta_{ab} - \frac{3}{4}\Delta_{[abc]}\eta^{bc}\Big] \\ &= \frac{2b_3}{3}\Big[\frac{1}{2}\Delta_{abc}\eta^{bc} - \Delta^b\eta_{ab} - \frac{1}{4}(\Delta_{abc} + 2\Delta_{[bc]a})\eta^{bc}\Big] \\ &= \frac{2b_3}{3}\Big[\frac{1}{4}\Delta_{abc}\eta^{bc} - \Delta^b\eta_{ab} - \frac{1}{2}\Delta_{bca}\eta^{bc}\Big].\end{aligned} \tag{4.32}$$

5 $\partial L_{\mathrm{G}}/\partial d\theta^a$ の書き換え：ゲージ不変性な場合

ここで、

$$f_{abc} := \theta_c \wedge *(d\theta_a \wedge \theta_b) \tag{5.1}$$

という量を計算してみる：

$$\begin{aligned} f_{abc} &= \theta_c \wedge \frac{1}{2}\Delta_a{}^{de}\eta_{deb} \\ &= \frac{1}{2}\Delta_a{}^{de}(\mathring{g}_{cd}\eta_{eb} - \mathring{g}_{ce}\eta_{db} + \mathring{g}_{cb}\eta_{de}) \\ &= \Delta_{ac}{}^{d}\eta_{db} + \frac{1}{2}\mathring{g}_{cb}\Delta_a{}^{de}\eta_{de}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

これより、

$$f^b{}_{ab} = -\Delta^b\eta_{ab} + \frac{1}{2}\Delta_a{}^{bc}\eta_{bc}, \tag{5.3}$$

$$f^b{}_{ba} = \Delta_{bca}\eta^{bc} + \frac{1}{2}\Delta_a{}^{bc}\eta_{bc} \tag{5.4}$$

である。よって、

$$Af^b{}_{ab} + Bf^b{}_{ba} = \frac{A+B}{2}\Delta_a{}^{bc}\eta_{bc} - A\Delta^b\eta_{ab} + B\Delta_{bca}\eta^{bc} \tag{5.5}$$

である。一方、

$$F_a = \frac{2b_3}{3}\left[\frac{1}{4}\Delta_{abc}\eta^{bc} - \Delta^b\eta_{ab} - \frac{1}{2}\Delta_{bca}\eta^{bc}\right] \tag{5.6}$$

なので、

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{2b_3}{3}(f^b{}_{ab} - \frac{1}{2}f^b{}_{ba}) \\ &= \frac{2b_3}{3}\left[\theta_b \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a) - \frac{1}{2}\theta_a \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_b)\right] \\ &= -\frac{2b_3}{3}\pi_a \equiv \frac{1}{\kappa}\pi_a, \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\pi_a := -\theta_b \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a) + \frac{1}{2}\theta_a \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_b) \tag{5.8}$$

を得る。

6 L_{G} の表式

ところで、$F_a = \frac{1}{2}(F_a)_{bc}\eta^{bc}$ と置くと、

$$d\theta^a \wedge F_a = \frac{1}{2}\Delta^{abc} \wedge (F_a)_{bc}\eta \tag{6.1}$$

であり、

$$(F_a)_{bc} = 2P_{abcdef}\Delta^{def} \tag{6.2}$$

なので、

$$d\theta^a \wedge F_a = 2L_{\mathrm{G}} \tag{6.3}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
L_{\mathrm{G}} &= \frac{1}{2}d\theta^a \wedge F_a \\
&= \frac{1}{2\kappa}d\theta^a \wedge \pi_a \\
&= \frac{1}{2\kappa}\Big[-d\theta^a \wedge \theta_b \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a) + \frac{1}{2}d\theta^a \wedge \theta_a \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_b)\Big] \\
&= \frac{1}{2\kappa}N^*, \qquad (6.4)\\
N^* &:= -d\theta^a \wedge \theta_b \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a) + \frac{1}{2}d\theta^a \wedge \theta_a \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_b) \qquad (6.5)
\end{aligned}$$

となる。

7　N^* とアインシュタイン・ヒルベルト作用

実は、

$$N^* = A^a{}_c \wedge A^{cb} \wedge \eta_{ba} \tag{7.1}$$

と書ける [2]。$A^a{}_b$ はレビ=チビタ接続である。また、

$$N^* = *R^* - d(A^{ab} \wedge \eta_{ab}) \tag{7.2}$$

とも書ける[2)] 。つまり、L_{G} は、全微分項を除くと、アインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン形式である。

---

2) $\omega^a{}_b$ を接続形式とする。$A^a{}_b$ をレビ=チビタ接続 (捩率がない場合の接続形式) とする：

$$d\theta^a = -A^a{}_b \wedge \theta^b.$$

曲率形式は、

$$\Omega^a{}_b := d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b =: \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d$$

であり、

$$R_{ab} := R^c{}_{acb}, \quad R := \mathring{g}^{ab}R_{ab}$$

とする。R はスカラー曲率である。$*R = R\eta$ は、

$$*R = \Omega^{ab} \wedge \eta_{ab}$$

と書ける。リーマン接続 (同じことだがレビ=チビタ接続) のスカラー曲率を R^* と書く。

(7.1) を示す。
まず、

$$\begin{aligned} d\theta^b \wedge \theta_a &= -A^b{}_c \wedge \theta^c \wedge \theta_a \\ &= -A^b{}_{cd}\theta^d \wedge \theta^c \wedge \theta_a \end{aligned} \tag{7.3}$$

である。ここで、

$$A^a{}_b = A^a{}_{bc}\theta^c \tag{7.4}$$

と置いた。よって、

$$*(d\theta^b \wedge \theta_a) = -A^b{}_{cd}\eta^{dc}{}_a \tag{7.5}$$

であり、

$$\begin{aligned} \theta_e \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a) &= -A^b{}_{cd}\theta_e \wedge \eta^{dc}{}_a \\ &= -A^b{}_{cd}(\delta^d_e \eta^c{}_a - \delta^c_e \eta^d{}_a + \mathring{g}_{ea}\eta^{dc}) \\ &= -A^b{}_{ce}\eta^c{}_a + A^b{}_{ec}\eta^c{}_a - \mathring{g}_{ea}A^b{}_{cd}\eta^{dc} \end{aligned} \tag{7.6}$$

である。よって、

$$\theta_b * (d\theta^b \wedge \theta_a) = -A_b \eta^b{}_a - A_{abc}\eta^{cb} \tag{7.7}$$

となる。ここで、

$$A_a := A^b{}_{ab} \tag{7.8}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \theta_a \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_b) &= -A^b{}_{ca}\eta^c{}_b + A^b{}_{ac}\eta^c{}_b - A^b_{abc}\eta^{cb} \\ &= -A^b{}_{ca}\eta^c{}_b - 2A_{abc}\eta^{cb} \end{aligned} \tag{7.9}$$

なので、$\pi_a = -\theta_b \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a) + \frac{1}{2}\theta_a \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_b)$ は、

$$\pi_a = A_b \eta^b{}_a - \frac{1}{2}A_{bca}\eta^{cb} \tag{7.10}$$

となる。
　ところで、

$$\begin{aligned} \Pi_a &:= \frac{1}{2}A^{bc} \wedge \eta_{abc} \\ &= \frac{1}{2}A^{bc}{}_d \theta^d \wedge \eta_{abc} \\ &= \frac{1}{2}A^{bc}{}_d(\delta^d_a \eta_{bc} - \delta^d_b \eta_{ac} + \delta^d_c \eta_{ab}) \\ &= \frac{1}{2}(A^{bc}{}_a \eta_{bc} - A^c \eta_{ac} - A^b \eta_{ab}) \\ &= A_b \eta^b{}_a - \frac{1}{2}A_{bca}\eta_{cb} \\ &= \pi_a \end{aligned} \tag{7.11}$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
N^* &= d\theta^a \wedge \pi_a \\
&= d\theta^a \wedge \Pi_a \\
&= d\theta^a \wedge \frac{1}{2} A^{bc} \wedge \eta_{abc} \\
&= -A^a{}_d \wedge \theta^d \wedge \frac{1}{2} A^{bc} \wedge \eta_{abc} \\
&= \frac{1}{2} A^a{}_d \wedge A^{bc} \wedge \theta^d \wedge \eta_{abc} \\
&= \frac{1}{2} A^a{}_d \wedge A^{bc} \wedge (\delta^d_a \eta_{bc} - \delta^d_b \eta_{ac} + \delta^d_c \eta_{ab}) \\
&= A^a{}_c \wedge A^{cb} \wedge \eta_{ba}
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

となる。

References

[1] F. Gronwald and F.W. Hehl, “On the Gauge Aspects of Gravity”, arXiv:gr-qc/9602013

[2] Walter Thirring, “A Course in Mathematical Physics 2”, Springer (second edition, 1978).