大統一理論における共変微分

中嶋 慧

November 19, 2020

1　ゲージ理論

この章は [1] を参考にした。

1.1　ゲージ場の導入

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0(\psi, \partial_\mu \psi)$ が、場の量の組 $\{\psi^A\}_{A=1}^N$ の大域的変換

$$\psi'(x) = T(\varepsilon)\psi(x), \quad \psi = {}^t(\psi^1, \cdots, \psi^N) \tag{1.1}$$

で不変だと仮定する。$T(\varepsilon)$ はある線形リー群 G の表現である。ただし、$\varepsilon = \{\varepsilon^r\}_{r=1,\cdots,n}$ は実パラメーターの組で、すべての r に対して $\varepsilon^r = 0$ のときが恒等変換に対応する。微小変換は、

$$\delta\psi := \psi' - \psi = \varepsilon^r G_r \psi \tag{1.2}$$

である。ただし、G_r は群 G のリー代数の基底の表現である。G_r の交換関係は、

$$[G_r, G_s] = f^t{}_{rs} G_t \tag{1.3}$$

となる。$f^t{}_{rs}(= -f^t{}_{sr})$ は構造定数と呼ばれる実定数である。

このとき、

$$D_\mu \psi := \partial_\mu \psi + \boldsymbol{A}_\mu \psi \tag{1.4}$$

という量を導入する。これを共変微分と呼ぶ。$\boldsymbol{A}_\mu$ は以下の変換則が成り立つように決める：

$$D'_\mu \psi' := \partial_\mu \psi' + \boldsymbol{A}'_\mu \psi' = T(\varepsilon(x)) D_\mu \psi. \tag{1.5}$$

ここで、$\psi' = T(\varepsilon(x))\psi$ である。このとき、$\mathcal{L}_0(\psi, D_\mu \psi)$ はゲージ不変である。

(1.5) より、

$$\boldsymbol{A}'_\mu = T \boldsymbol{A}_\mu T^{-1} - \partial_\mu T \cdot T^{-1} \tag{1.6}$$

を得る。ところで、上式の右辺第 2 項は、

$$-\partial_\mu T \cdot T^{-1} = a^r{}_\mu G_r \tag{1.7}$$

と書ける。$a^r{}_\mu$ は実数である。いま、

$$\boldsymbol{A}_\mu^{(0)} := A^r{}_\mu G_r, \tag{1.8}$$
$$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)} := \boldsymbol{A}_\mu - \boldsymbol{A}_\mu^{(0)} \tag{1.9}$$

とおく。$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)}$ は $\boldsymbol{G}_r$ の線形結合では書けない部分である。これらはそれぞれ、

$$\boldsymbol{A}_\mu^{(0)\prime} = T\boldsymbol{A}_\mu^{(0)}T^{-1} - \partial_\mu T\cdot T^{-1}, \tag{1.10}$$
$$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)\prime} = T\boldsymbol{A}_\mu^{(1)}T^{-1} \tag{1.11}$$

と変換する。$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)}$ は、(1.5) を満たすためには不要であり、0 であっても困ることはない。よって、$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)} = 0$ とおく。このとき、

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + A^r{}_\mu G_r\psi \tag{1.12}$$

となる。$A^r{}_\mu$ がゲージ場である。

1.2 ゲージ場の変換則

ところで、$T(\varepsilon)$ は単位元の近くで、

$$T(\varepsilon) = \exp[\varepsilon^r G_r] \tag{1.13}$$

と書ける[1)]。(1.13) に対して、

$$\partial_\mu T = \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}}\partial_\mu\boldsymbol{E}e^{(1-s)\boldsymbol{E}} \quad (\boldsymbol{E} := \varepsilon^r G_r) \tag{1.14}$$

である[2)]。(1.14) より、

$$\begin{aligned}\partial_\mu T\cdot T^{-1} &= \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}}\partial_\mu\boldsymbol{E}e^{-s\boldsymbol{E}} \\ &= \partial_\mu\varepsilon^r\int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}}G_r e^{-s\boldsymbol{E}}\end{aligned} \tag{1.15}$$

---

1) U(n), SU(n), SO(n), Sp(n) の任意の元はこの形で書ける。

2) ここで、

$$\frac{\partial e^{H(\alpha)}}{\partial\alpha^n} = \int_0^1 ds\ e^{sH(\alpha)}\frac{\partial H(\alpha)}{\partial\alpha^n}e^{(1-s)H(\alpha)}$$

を用いた。$\alpha = \{\alpha^n\}$ はパラメーター α^n の組である。これは以下のように示される。いま、

$$C(x) := e^{-xH(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\alpha^n}e^{xH(\alpha)}$$

とおくと、$C(0) = 0$ であり、$C(x)$ は、

$$\frac{dC(x)}{dx} = e^{-xH(\alpha)}\frac{\partial H(\alpha)}{\partial\alpha^n}e^{xH(\alpha)}$$

を満たす。上式を $x = 0$ から $x = 1$ まで積分して、

$$C(1) = e^{-H(\alpha)}\frac{\partial e^{H(\alpha)}}{\partial\alpha^n} = \int_0^1 dx\ e^{-xH(\alpha)}\frac{\partial H(\alpha)}{\partial\alpha^n}e^{xH(\alpha)}$$

を得る。これに左から $e^{H(\alpha)}$ をかけて上の公式が得られる。

となる。ところで、

$$
\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{E}} G_r e^{-\boldsymbol{E}} &= \alpha^s{}_r(\varepsilon) G_s, && (1.16)\\
\alpha^r{}_s(\varepsilon) &:= [\exp(\boldsymbol{e})]^r{}_s, \quad [\boldsymbol{e}]^a{}_b := \varepsilon^r f^a_{\ rb} && (1.17)
\end{aligned}
$$

である。よって、

$$
\partial_\mu T \cdot T^{-1} = \partial_\mu \varepsilon^r G_s \int_0^1 ds\ \alpha^s{}_r(s\varepsilon) =: \partial_\mu \varepsilon^r G_s l^s{}_r(\varepsilon) \tag{1.18}
$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
l^s{}_r(\varepsilon) &= \int_0^1 ds\ [\exp(s\boldsymbol{e})]^s{}_r \\
&= \int_0^1 ds\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n [\boldsymbol{e}^n]^s{}_r \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} [\boldsymbol{e}^n]^s{}_r && (1.19)
\end{aligned}
$$

である。

ゲージ場の変換則は、

$$
A'^r{}_\mu = \alpha^r{}_s(\varepsilon) A^s{}_\mu - l^r{}_s(\varepsilon) \partial_\mu \varepsilon^s \tag{1.20}
$$

となる。微小変換では、

$$
A'^r{}_\mu = A^r{}_\mu + \varepsilon^s f^r{}_{st} A^t{}_\mu - \partial_\mu \varepsilon^r \tag{1.21}
$$

となる。

2 Liouville space

M 次行列から M 次行列への線形写像 $\mathcal{J}$ を考える。A を M 次行列とすると、$\mathcal{J}(A)$ も M 次行列である。例えば、

$$
\mathcal{J}(A) = \sum_a L_a A R_a \tag{2.1}
$$

である。L_a, R_a は M 次行列である。

$\{|n\rangle\}$ を任意の正規直交基底とすると、M 次行列 $\bullet$ は、$\bullet = \sum_{n,m} \bullet_{nm} |n\rangle\langle m|$ と書ける。これを Liouville space の元 $|\bullet\rangle\rangle = \sum_{n,m} \bullet_{nm} |nm\rangle\rangle$ にマップすることができる。ただし、

$$
\begin{aligned}
|n\rangle\langle m| &\longleftrightarrow |nm\rangle\rangle, && (2.2)\\
\mathrm{Tr}(A^\dagger B) &\longleftrightarrow \langle\langle A|B\rangle\rangle && (2.3)
\end{aligned}
$$

とする。Liouville space での内積は、Hilbert-Schmidt product である。M 次行列から M 次行列への線形写像 $\mathcal{J}$ は、Liouville space での行列 (M^2 次行列) になる：

$$
|\mathcal{J}(\bullet)\rangle\rangle = \hat{J} |\bullet\rangle\rangle. \tag{2.4}
$$

$\hat{J}$ の行列表示は、

$$J_{nm,kl} = \langle\langle nm|\hat{J}|kl\rangle\rangle \tag{2.5}$$

である。例えば、(2.1) に対して、

$$J_{nm,kl} = \sum_a (L_a)_{nk}(R_a)_{lm} \tag{2.6}$$

である。

　以下、$\mathcal{J}(\bullet)$ を $\mathcal{J}\bullet$ と書く。

　さて、$\mathcal{J}$ として、

$$\mathcal{J}(U)\bullet = L(U)\bullet R(U) \tag{2.7}$$

を考える。U は線形リー群 G の元であり、

$$L(V)L(U) = L(VU)\,, \quad R(U)R(V) = R(VU)\,, \quad U, V \in G \tag{2.8}$$

とする。このとき、

$$\mathcal{J}(V)\mathcal{J}(U) = \mathcal{J}(VU) \tag{2.9}$$

となる。$\mathcal{J}(U)$ の行列表示は、

$$[J(U)]_{nm,kl} = [L(U)]_{nk}[R(U)]_{lm} \tag{2.10}$$

である。

　さて、

$$U = e^E\,, \quad E = \varepsilon^r\mathcal{G}_r \tag{2.11}$$

のとき、

$$L(U) = \exp(L_*(E))\,, \quad R(U) = \exp(R_*(E)) \tag{2.12}$$

する。$\mathcal{G}_r$ は G のリー代数の基底である。このとき、ε^r が微小とすると、

$$\begin{aligned} J(U)\bullet &= [1 + L_*(E)]\bullet[1 + R_*(E)] \\ &= \bullet + L_*(E)\bullet + \bullet R_*(E) \\ &= \bullet + \varepsilon^r[L_*(\mathcal{G}_r)\bullet + \bullet R_*(\mathcal{G}_r)] \end{aligned} \tag{2.13}$$

である。対応する $\hat{J}$ を、

$$\hat{J}(U) = 1 + \varepsilon^r[\hat{L}_*(\mathcal{G}_r) + \hat{R}_*(\mathcal{G}_r)] \tag{2.14}$$

と書く。

3　大統一理論

　さて、M 次行列 φ を考え、

$$|\psi\rangle\rangle = {}^t(\varphi^{11}, \varphi^{12}, \cdots, \varphi^{MM}) \tag{3.1}$$

とし、

$$\mathcal{J}(U)\bullet = L(U) \bullet R(U) \tag{3.2}$$

に対して、

$$|\psi\rangle\rangle \to \hat{J}(U)|\psi\rangle\rangle \tag{3.3}$$

を考える。$\hat{J}$ は線形リー群 G の表現である。さて、微小変換が、

$$\delta\psi = \varepsilon^r G_r \psi \tag{3.4}$$

のとき、共変微分 (1.12) は、

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A^r{}_\mu G_r \psi \tag{3.5}$$

であった。今は、

$$\delta|\psi\rangle\rangle = \varepsilon^r[\hat{L}_*(\mathcal{G}_r) + \hat{R}_*(\mathcal{G}_r)]|\psi\rangle\rangle \tag{3.6}$$

であるから、

$$D_\mu|\psi\rangle\rangle = \partial_\mu|\psi\rangle\rangle + A^r{}_\mu[\hat{L}_*(\mathcal{G}_r) + \hat{R}_*(\mathcal{G}_r)]|\psi\rangle\rangle \tag{3.7}$$

である。これを行列 φ で書くと、

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + A^r{}_\mu[L_*(\mathcal{G}_r)\varphi + \varphi R_*(\mathcal{G}_r)] \tag{3.8}$$

となる。

　全ての φ^{nm} がディラック場とし、

$$\langle\langle\bar{\psi}| = (\bar{\varphi}_{11}, \bar{\varphi}_{12}, \cdots, \bar{\varphi}_{MM}), \quad \bar{\varphi}_{nm} = i(\varphi^{nm})^\dagger \gamma^0 \tag{3.9}$$

とすると、

$$\langle\langle\bar{\psi}|\psi\rangle\rangle = \mathrm{Tr}(\bar{\varphi}\varphi), \quad (\bar{\varphi})_{nm} = \bar{\varphi}_{mn}, \quad \bar{\varphi} = i\varphi^\dagger\gamma^0 \tag{3.10}$$

である。上の第 3 式の † は、転置し、各成分に † をする演算である。例えば、

$$\mathcal{L}_0(\psi, \partial_\mu\psi) = -\langle\langle\bar{\psi}|\gamma^\mu\partial_\mu|\psi\rangle\rangle \tag{3.11}$$

のとき、

$$\mathcal{L}_0(\psi, \partial_\mu\psi) = -\mathrm{Tr}[\bar{\varphi}\gamma^\mu\partial_\mu\varphi] \tag{3.12}$$

であり、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(\psi, D_\mu\psi) &= -\langle\langle\bar{\psi}|\gamma^\mu D_\mu|\psi\rangle\rangle \\ &= -\mathrm{Tr}\Big(\bar{\varphi}\gamma^\mu\{\partial_\mu\varphi + A^r{}_\mu[L_*(\mathcal{G}_r)\varphi + \varphi R_*(\mathcal{G}_r)]\}\Big)\end{aligned} \tag{3.13}$$

である。

特に、

$$R(U) = {}^tL(U) \tag{3.14}$$

の場合、

$$\varphi \to L(U)\varphi \cdot {}^tL(U) \tag{3.15}$$

であり、

$$\mathcal{L}_0(\psi, D_\mu\psi) = -\mathrm{Tr}\Big(\bar{\varphi}\gamma^\mu\{\partial_\mu\varphi + A^r{}_\mu[G_r\varphi + \varphi\cdot{}^tG_r]\}\Big), \quad G_r := L_*(\mathcal{G}_r) \tag{3.16}$$

となる。

SU(5) 統一模型 [2] では特に、

$$L(U) = U\,, \quad R(U) = {}^tL(U) = {}^tU\,, \quad U \in \mathrm{SU}(5) \tag{3.17}$$

で、

$${}^t\varphi = -\varphi \tag{3.18}$$

である場合が使われる。この場合、φ や $|\psi\rangle\rangle$ は 10 成分であり、上三角成分を書くと、

$$\varphi = \begin{pmatrix} & u^c_B & -u^c_G & -u_R & -d_R \\ & & u^c_R & -u_G & -d_G \\ & & & -u_B & -d_B \\ & & & & -e^+ \\ & & & & \end{pmatrix}_L \tag{3.19}$$

である。全成分は左巻き成分である。^{c} は反粒子を表し、R, G, B はカラーを表す。なお、右巻き成分は、

$$\psi_R = \begin{pmatrix} d_R \\ d_G \\ d_B \\ e^+ \\ \nu^c_e \end{pmatrix}_R \tag{3.20}$$

である。

References

[1] 中嶋慧, 松尾 衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』(現代数学社, 2020 年).

[2] 「SU(5) 統一模型」http://www.sp.u-tokai.ac.jp/~yasue/ffn/zemi4.pdf