一般化平均

中嶋 慧

December 29, 2022

Abstract

算術平均, 幾何平均, 算術幾何平均, 対数平均などを議論する。

Contents

1 一般の重み付き平均

この記事では a, b は正の数とする。
$g(x)$ を正の単調関数 $(\neq 1)$ とする。このとき、

$$g^{-1}\Big(\sum_i w_i g(a_i)\Big), \quad \sum_i w_i = 1 \tag{1.1}$$

は a_i の一般的な重み付き平均である。特に、$w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ とし、

$$m[g(x)](a,b) := g^{-1}\Big(\frac{g(a)+g(b)}{2}\Big) \tag{1.2}$$

とすると、

$$m[x](a,b) = \frac{a+b}{2} = A(a,b), \tag{1.3}$$

$$m[\ln x](a,b) = \sqrt{ab} = G(a,b), \tag{1.4}$$

$$m[x^{-1}](a,b) = \frac{2ab}{a+b} = H(a,b) \tag{1.5}$$

である。また、

$$\mu[g(x)](a,b) := g^{-1}\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b dx\ g(x)\Big) \tag{1.6}$$

とすると、

$$\mu[x](a,b) = A(a,b), \tag{1.7}$$

$$\mu[x^{-1}](a,b) = \frac{b-a}{\ln\frac{b}{a}} = \psi(a,b), \tag{1.8}$$

$$\mu[x^{-2}](a,b) = G(a,b) \tag{1.9}$$

である。$\psi(a,b)$ は対数平均である。

2 算術幾何平均と対数平均

いま、

$$\alpha_0 = \max(\alpha,\beta), \quad \beta_0 = \min(\alpha,\beta), \tag{2.1}$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n+\beta_n}{2}, \quad \beta_{n+1} = \sqrt{\alpha_n\beta_n} \tag{2.2}$$

とすると、

$$\beta_0 \le \beta_1 \le \beta_2 \le \beta_n \le \mathcal{M}(\alpha,\beta) \le \alpha_n \le \alpha_2 \le \alpha_1 \le \alpha_0 \tag{2.3}$$

である。$\mathcal{M}(\alpha,\beta)$ が算術幾何平均であり、$\lim\alpha_n = \mathcal{M}(\alpha,\beta) = \lim\beta_n$ である。

$$\beta_n = m_n(\alpha,\beta), \quad \alpha_n = M_n(\alpha,\beta) \tag{2.4}$$

と置く。ところで、

$$H(a,b) \le G(a,b) \le \psi(a,b) \le N(a,b) \le A(a,b) \tag{2.5}$$

である。ここで、

$$H(a,b) = \frac{2ab}{a+b},\ G(a,b) = \sqrt{ab},\ \psi(a,b) = \frac{b-a}{\ln\frac{b}{a}},\ N(a,b) = \frac{a+b+\sqrt{ab}}{3},\ A(a,b) = \frac{a+b}{2} \tag{2.6}$$

である。$\psi(a,b)$ は対数平均である。また、

$$G = m_1 \le \psi \le m_3 \le \mathcal{M} \tag{2.7}$$

である。ψ を上から近似したい。$\psi(a,b)$ を G, N の線形結合で近似すると、

$$f_{GA}(a,b) := \frac{1}{2}(G+N) = \frac{2}{3}G + \frac{1}{3}A = \frac{a+b+4\sqrt{ab}}{6} \tag{2.8}$$

が最適で、

$$\psi \le f_{GA}, \quad f_{GA}(1,x) - \psi(1,x) \approx \frac{1}{2880}(x-1)^4 \tag{2.9}$$

である。また、$f_{GA} = \frac{1}{3}G + \frac{2}{3}M_2$ である。

3　算術幾何平均の仲間

いま、

$$r_1(\theta) := a\cos^2\theta + b\sin^2\theta, \tag{3.1}$$
$$r_2(\theta) := \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}, \tag{3.2}$$
$$r_0(\theta) := a^{\cos^2\theta} b^{\sin^2\theta} \tag{3.3}$$

とする。このとき、

$$M[f(x), n](a,b) := f^{-1}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\ f(r_n(\theta))\Big) \tag{3.4}$$

とすると、

$$M[x^{-1}, 2](a,b) = \Big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\ \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\Big]^{-1} = \mathcal{M}(a,b) \tag{3.5}$$

は算術幾何平均である [1]。また、

$$M[x, 1](a,b) = \frac{a+b}{2} = A(a,b) \tag{3.6}$$

は算術平均であり、

$$M[\ln x, 0](a,b) = \sqrt{ab} = G(a,b) \tag{3.7}$$

は幾何平均である。また、

$$M[x, 2](a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\ \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}, \tag{3.8}$$
$$M[x, 0](a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\ a^{\cos^2\theta} b^{\sin^2\theta} \tag{3.9}$$

はそれぞれ Toader mean, Toader–Qi mean と呼ばれる [1]。

References

[1] Tie-Hong Zhao, Bu-Chuan Zhou, Miao-KunWang and Yu-Ming Chu, "On approximating the quasi-arithmetic mean", Journal of Inequalities and Applications volume 2019, Article number: 42 (2019)