一般ゲージ場論

中嶋 慧

November 28, 2020

Abstract

この記事は、主に内山龍雄『一般ゲージ場論序説』(岩波書店, 1987 年) を参考に、重力場も含むゲージ場の一般論をまとめたものである。

Contents

1　不変変分論

この章は [1] を参考にした。

1.1　準備

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は、場 ψ^A とその微分 $\partial_\mu \psi^A$ で表される。$A = 1, 2, \cdots, N$ とし、A はテンソル添え字も含むとする。以下、D 次元時空を考える。計量を $g_{\mu\nu}$ とし、$(- + \cdots +)$ の符号を持つとする。$g := \det g_{\mu\nu}$ とし、$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \sqrt{-g}\mathcal{L}$ とする。微小変換

$$\delta x^\mu := x'^\mu - x^\mu, \tag{1.1}$$

$$\delta\psi^A(x) := \psi'^A(x') - \psi^A(x) \tag{1.2}$$

の下で、作用

$$S := \int_\Omega d^D x \ \boldsymbol{\mathcal{L}} \tag{1.3}$$

は、

$$S' = \int_\Omega d^D x \ \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \boldsymbol{\mathcal{L}}(\psi + \delta\psi, \partial_\mu \psi + \delta\partial_\mu \psi) \tag{1.4}$$

に変わる。ヤコビアンは、

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x')}{\partial(x)} &:= \det \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \\ &= 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu) \end{aligned} \tag{1.5}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \delta S &:= S' - S \\ &= \int_\Omega d^D x \ \left[\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial \psi^A} \delta\psi^A + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu \psi^A)} \delta(\partial_\mu \psi^A) + \boldsymbol{\mathcal{L}} \partial_\mu(\delta x^\mu) \right] \\ &=: \int_\Omega d^D x \ \delta\boldsymbol{\mathcal{L}} \end{aligned} \tag{1.6}$$

となる。今、

$$\bar{\delta} F(x) := F'(x') \big|_{x'=x} - F(x) \tag{1.7}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} \delta F(x) &= F'(x') - F'(x') \big|_{x'=x} + F'(x') \big|_{x'=x} - F(x) \\ &= \partial_\mu F \delta x^\mu + \bar{\delta} F(x) \end{aligned} \tag{1.8}$$

であり、

$$\bar{\delta}(\partial_\mu F) = \partial_\mu(\bar{\delta}F), \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\delta(\partial_\mu F) &= \bar{\delta}(\partial_\mu F) + \partial_\nu\partial_\mu F\delta x^\nu \\ &= \partial_\mu(\bar{\delta}F) + \partial_\nu\partial_\mu F\delta x^\nu \\ &= \partial_\mu(\delta F) - \partial_\nu F\partial_\mu(\delta x^\nu)\end{aligned} \tag{1.10}$$

が従う。よって、

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} &= \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\psi^A}(\bar{\delta}\psi^A + \partial_\mu\psi^A\delta x^\mu) + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}(\partial_\mu(\bar{\delta}\psi^A) + \partial_\nu\partial_\mu\psi^A\delta x^\nu) + \boldsymbol{\mathcal{L}}\partial_\mu(\delta x^\mu) \\ &= [\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A\bar{\delta}\psi^A + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\psi^A}\partial_\mu\psi^A\delta x^\mu + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\partial_\nu\partial_\mu\psi^A\delta x^\nu \\ &\quad +\boldsymbol{\mathcal{L}}\partial_\mu(\delta x^\mu) + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\bar{\delta}\psi^A\Big) \\ &= [\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A\bar{\delta}\psi^A + \partial_\mu\boldsymbol{\mathcal{L}}\delta x^\mu + \boldsymbol{\mathcal{L}}\partial_\mu(\delta x^\mu) + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\bar{\delta}\psi^A\Big) \\ &= [\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A\bar{\delta}\psi^A + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\bar{\delta}\psi^A + \boldsymbol{\mathcal{L}}\delta x^\mu\Big)\end{aligned} \tag{1.11}$$

となる。ここで、

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A := \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\psi^A} - \partial_\mu\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)} \tag{1.12}$$

である。$\bar{\delta}$ の代わりに δ を使うと、

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} &= [\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A(\delta\psi^A - \partial_\mu\psi^A\delta x^\mu) + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\delta\psi^A - \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\partial_\nu\psi^A\delta x^\nu + \boldsymbol{\mathcal{L}}\delta x^\mu\Big) \\ &= [\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A(\delta\psi^A - \partial_\mu\psi^A\delta x^\mu) + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\delta\psi^A - \boldsymbol{T}^\mu{}_\nu\delta x^\nu\Big)\end{aligned} \tag{1.13}$$

となる。ここで、

$$\boldsymbol{T}^\mu{}_\nu := \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\partial_\nu\psi^A - \delta^\mu_\nu\boldsymbol{\mathcal{L}} =: \sqrt{-g}T^\mu{}_\nu \tag{1.14}$$

である。$T^\mu{}_\nu$ は正準エネルギー・運動量テンソルである。

1.2　Noether の第 1 定理

n 個の実数パラメーター $\varepsilon^r(r = 1, 2, \cdots, n)$ に依存する大域的変換

$$x'^\mu = f^\mu(\varepsilon, x), \tag{1.15}$$

$$\psi'^A = [\boldsymbol{T}(\varepsilon)]^A{}_B\psi^B \tag{1.16}$$

を考える。ただし、$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ は線形リー群の表現になっているとする。$\varepsilon = 0$ が恒等変換になるものとする。無限小変換は、

$$\delta x^\mu = \varepsilon^r {f_r}^\mu(x), \tag{1.17}$$
$$\delta\psi^A = \varepsilon^r [\boldsymbol{G}_r]^A{}_B \psi^B \tag{1.18}$$

である。ただし、

$$ {f_r}^\mu(x) := \frac{\partial f^\mu}{\partial \varepsilon^r}\Big|_{\varepsilon=0},\ \boldsymbol{G}_r := \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \varepsilon^r}\Big|_{\varepsilon=0} \tag{1.19}$$

である。$\boldsymbol{G}_r$ は、

$$[\boldsymbol{G}_r, \boldsymbol{G}_s] = f^a_{\ rs}\boldsymbol{G}_a \tag{1.20}$$

を満たす。$f^a_{\ rs}$ はリー群の構造定数である。

無限小変換に対する (1.13) の $\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}$ は、

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} = \varepsilon^r \boldsymbol{\mathcal{L}}_r, \tag{1.21}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_r := [\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A([\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B - \partial_\mu {f_r}^\mu) + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B - \boldsymbol{T}^\mu_{\ \nu}{f_r}^\nu\Big) \tag{1.22}$$

である。無限小変換で $\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} \equiv 0$ となるとすると[1)]、$\boldsymbol{\mathcal{L}}_r \equiv 0$, すなわち、

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A([\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B - \partial_\mu {f_r}^\mu) + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B - \boldsymbol{T}^\mu_{\ \nu}{f_r}^\nu\Big) \equiv 0 \tag{1.23}$$

が従う。運動方程式の下で、

$$\partial_\mu \boldsymbol{J}^\mu_{\ r} = 0, \tag{1.24}$$
$$\boldsymbol{J}^\mu_{\ r} := \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B - \boldsymbol{T}^\mu_{\ \nu}{f_r}^\nu \tag{1.25}$$

が従う。これを Noether の第 1 定理という。

1.3 Noether の第 2 定理

次に局所的変換

$$\delta x^\mu = \varepsilon^r(x){f_r}^\mu(x), \tag{1.26}$$
$$\delta\psi^A = \varepsilon^r(x)G^A_r(x) + \partial_\mu\varepsilon^r F^{A,\mu}_r(x) \tag{1.27}$$

を考える。この時、

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} &\equiv [\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A(\delta\psi^A - \partial_\mu\psi^A\delta x^\mu) + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\delta\psi^A - \boldsymbol{T}^\mu_{\ \nu}\delta x^\nu\Big)\\ &\equiv [\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A\Big\{\varepsilon^r[G^A_r - \partial_\mu\psi^A {f_r}^\mu(x)] + \partial_\mu\varepsilon^r F^{A,\mu}_r\Big\}\\ &\quad + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}[\varepsilon^r G^A_r + \partial_\nu\varepsilon^r F^{A,\nu}_r] - \boldsymbol{T}^\mu_{\ \nu}\varepsilon^r {f_r}^\nu\Big)\end{aligned} \tag{1.28}$$

[1)] '≡' は運動方程式を使わずに成り立つ式を表す。

である。第 1 項の中の最後の項は、

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A\partial_\mu\varepsilon^r F_r^{A,\mu} = \partial_\mu([\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A\varepsilon^r F_r^{A,\mu}) - \varepsilon^r\partial_\mu([\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A F_r^{A,\mu}) \tag{1.29}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} \equiv \varepsilon^r&\Big\{[\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A[G_r^A - \partial_\mu\psi^A f_r{}^\mu(x)] - \partial_\mu([\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A F_r^{A,\mu})\Big\}\\ &+\partial_\mu(\boldsymbol{B}^\mu{}_r\varepsilon^r + \boldsymbol{C}^{\mu,\nu}{}_r\partial_\nu\varepsilon^r)\end{aligned} \tag{1.30}$$

となる。ただし、

$$\boldsymbol{B}^\mu{}_r := \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}G_r^A - \boldsymbol{T}^\mu{}_\nu f_r{}^\nu + [\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A F_r^{A,\mu}, \tag{1.31}$$

$$\boldsymbol{C}^{\mu,\nu}{}_r := \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}F_r^{A,\nu} \tag{1.32}$$

である。作用の変化は、

$$\begin{aligned}\delta S \equiv &\int_\Omega d^Dx\ \varepsilon^r\Big\{[\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A[G_r^A - \partial_\mu\psi^A f_r{}^\mu] - \partial_\mu([\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A F_r^{A,\mu})\Big\}\\ &+\int_\Omega d^Dx\ \partial_\mu(\boldsymbol{B}^\mu{}_r\varepsilon^r + \boldsymbol{C}^{\mu,\nu}{}_r\partial_\nu\varepsilon^r)\end{aligned} \tag{1.33}$$

である。Ω は任意の領域である。さて、今、$\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} \equiv 0$ だったとする。上の第 2 項の表面項が落ちるように ε^r を選べるので、

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A[G_r^A - \partial_\mu\psi^A f_r{}^\mu] - \partial_\mu([\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A F_r^{A,\mu}) \equiv 0 \tag{1.34}$$

が従う。これを $\delta S \equiv 0$ に代入し、

$$\partial_\mu(\boldsymbol{B}^\mu{}_r\varepsilon^r + \boldsymbol{C}^{\mu,\nu}{}_r\partial_\nu\varepsilon^r) \equiv 0 \tag{1.35}$$

を得る。これは、

$$\partial_\mu\boldsymbol{B}^\mu{}_r\varepsilon^r + (\boldsymbol{B}^\nu{}_r + \partial_\mu\boldsymbol{C}^{\mu,\nu}{}_r)\partial_\nu\varepsilon^r + \boldsymbol{C}^{(\mu,\nu)}{}_r\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon^r \equiv 0 \tag{1.36}$$

を意味する。() は対称化の記号である。ε は任意なので、

$$\partial_\mu\boldsymbol{B}^\mu{}_r \equiv 0, \tag{1.37}$$

$$\boldsymbol{B}^\nu{}_r + \partial_\mu\boldsymbol{C}^{\mu,\nu}{}_r \equiv 0, \tag{1.38}$$

$$\boldsymbol{C}^{(\mu,\nu)}{}_r \equiv 0 \tag{1.39}$$

を得る。この 3 式と (1.34) を Noether の第 2 定理という。(1.37) は (1.38) と (1.39) を組み合わせれば導く事が出来る。

1.4 Noether の第 2 定理の性質

(1.37) は、

$$\partial_\mu\Big[\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}G_r^A-\boldsymbol{T}^\mu{}_\nu f_r{}^\nu+[\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A F_r^{A,\mu}\Big]\equiv 0 \tag{1.40}$$

である。(1.34) より、

$$\partial_\mu\Big[\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}G_r^A-\boldsymbol{T}^\mu{}_\nu f_r{}^\nu\Big]+[\boldsymbol{\mathcal{L}}]_A[G_r^A-\partial_\mu\psi^A f_r{}^\mu]\equiv 0 \tag{1.41}$$

を得る。これは (1.23) と一致する。この式と、運動方程式から、保存則

$$\partial_\mu \boldsymbol{J}^\mu{}_r \;=\; 0, \tag{1.42}$$

$$\boldsymbol{J}^\mu{}_r \;:=\; \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}G_r^A-\boldsymbol{T}^\mu{}_\nu f_r{}^\nu \tag{1.43}$$

が従う。これより、

$$Q_r \;:=\; \int d^{D-1}x\ \boldsymbol{J}^0{}_r \tag{1.44}$$

は保存量となる。

これらは、大域的変換からも従うが、以下の議論は、局所的変換において初めて従う。

(1.38) と運動方程式から、

$$\boldsymbol{J}^\mu{}_r \;=\; -\partial_\mu \boldsymbol{C}^{\mu,\nu}{}_r \tag{1.45}$$

を得る。また、(1.39) を用いて、

$$\boldsymbol{J}^\nu{}_r \;=\; -\partial_\mu \boldsymbol{C}^{[\mu,\nu]}{}_r \tag{1.46}$$

となる。ここで、[ ] は反対称化の記号である[2)]。これより、

$$\begin{aligned} Q_r \;&=\; -\int d^{D-1}x\ \partial_k \boldsymbol{C}^{[k,0]}{}_r \\ &=\; \int_S dS_k\ \boldsymbol{C}^{0,k}{}_r \end{aligned} \tag{1.48}$$

を得る。$k=1,2,\cdots,D-1$ であり、S は場全体を包む大きな球の表面で、dS_k は S の面積素である。Q_r は、場の無限遠 (S 上) での漸近的振舞だけが分かれば計算できる。

(1.34) は、N 個のオイラー・ラグランジュ方程式が独立でなく、真に独立なのは $(N-n)$ 個であることを意味する。独立な $(N-n)$ 個の方程式を解いても、その解には n 個の任意関数が

2)

$$A^{(\mu\nu)} := \frac{1}{2}(A^{\mu\nu}+A^{\nu\mu}),\ A^{[\mu\nu]} := \frac{1}{2}(A^{\mu\nu}-A^{\nu\mu}). \tag{1.47}$$

含まれる事になる。これは次のように考えると分かる。無限小変換 (1.18) によって、場 ψ^A は ψ'^A に変換される。ψ^A の変分 $\Delta\psi^A$ に伴う ψ'^A の変分を $\Delta\psi'^A(x')$ とすると、

$$\Delta\psi^A = \frac{\partial\psi^A}{\partial\psi'^B}\Delta\psi'^B(x') \tag{1.49}$$

の関係がある。$\Delta\psi'^B(x')$ による変分を考えると、

$$\begin{aligned}\Delta S &:= \int_\Omega d^D x\ [\boldsymbol{\mathcal{L}}\{\psi(x)\}]_A \Delta\psi^A \\ &= \int_\Omega d^D x'\ \frac{\partial(x)}{\partial(x')}[\boldsymbol{\mathcal{L}}\{\psi(x)\}]_A \frac{\partial\psi^A}{\partial\psi'^B}\Delta\psi'^B(x')\end{aligned} \tag{1.50}$$

である。一方、

$$\Delta S' = \int_\Omega d^D x'\ [\boldsymbol{\mathcal{L}}\{\psi'(x')\}]_B \Delta\psi'^B(x') \tag{1.51}$$

であり、$S = S'$ を仮定しているので、

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}\{\psi'(x')\}]_B \equiv \frac{\partial(x)}{\partial(x')}[\boldsymbol{\mathcal{L}}\{\psi(x)\}]_A \frac{\partial\psi^A}{\partial\psi'^B} \tag{1.52}$$

を得る。したがって、$[\boldsymbol{\mathcal{L}}\{\psi(x)\}]_A = 0$ から $[\boldsymbol{\mathcal{L}}\{\psi'(x)\}]_B = 0$ も従う。つまり、ψ^A も ψ'^B も同じ方程式の解である。そして、後者は n 個の任意関数を含む。

ところで、場の正準共役量は、

$$\boldsymbol{\pi}_A := \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\partial_0\psi^A} \tag{1.53}$$

である。(1.39) の $\mu = \nu = 0$ 成分より、

$$0 \equiv \boldsymbol{C}^{0,0}{}_r = \boldsymbol{\pi}_A F_r^{A,0} \tag{1.54}$$

である。つまり、π_A は独立ではない。これは、正準形式および量子化の際に大きな障害となる [2]。

2 Noether の定理の応用

この章も文献 [1] を参考にした。[2] にも同様の解説がある。

2.1 Noether の第 1 定理の応用

電荷を持った複素スカラー場 ϕ が電磁場 A_μ と相互作用している場合を考える。ラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi^*(\partial_\mu - iqA_\mu)\phi - m^2\phi^*\phi \tag{2.1}$$

である。ただし、

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.2}$$

である。本記事では、$c = \mu_0 = \varepsilon_0 = 1$ とする。位相変換

$$\delta\phi = e^{i\varepsilon}\phi - \phi, \tag{2.3}$$

$$\delta\phi^* = e^{-i\varepsilon}\phi^* - \phi^* \tag{2.4}$$

で $\mathcal{L}$ は不変である (x^μ, A_μ は不変)。Noether current に $-q$ を書けたものを J^μ とする：

$$\begin{aligned} J^\mu &:= -q\Big[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}i\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}(-i\phi^*)\Big] \\ &= iq[(\partial^\mu + iqA^\mu)\phi^*\phi - \phi^*(\partial^\mu - iqA^\mu)\phi]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

保存量

$$Q := \int d^{D-1}x\ \sqrt{-g}J^0 \tag{2.6}$$

は全電荷である。

ところで、A_μ のオイラー・ラグランジュ方程式は、

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} =: \sqrt{-g}j^\mu \tag{2.7}$$

である。j^μ を電流の定義として良いが、これは J^μ と一致する：

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} \equiv -q\Big[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}i\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}(-i\phi^*)\Big]. \tag{2.8}$$

これが成立するのは、$\mathcal{L}$ に $\partial_\mu\phi$, $\partial_\mu\phi^*$ が、

$$\nabla_\mu\phi := (\partial_\mu - iqA_\mu)\phi,\ (\nabla_\mu\phi)^* := (\partial_\mu + iqA_\mu)\phi \tag{2.9}$$

という特別な組み合わせで現れるためである。

Noether の第 1 定理によると、$\partial_\mu[(\sqrt{-g})J^\mu] = 0$ は、(1.23) に ϕ, ϕ^* のオイラー・ラグランジュ方程式を代入することで成り立つ。一方、$\partial_\mu[(\sqrt{-g})J^\mu] = 0$ は、(2.7) に ∂_μ をかける事でも得られる。後者では、$F^{\mu\nu}$ の反対称性が重要である。次節で、保存則のこの 2 つ導入法の背景、および、$\partial_\mu\phi$, $\partial_\mu\phi^*$ が (2.9) の形でのみ現れる背景を述べる。

2.2 Noether の第 2 定理の応用

同じ複素スカラー場で、局所的変換

$$\delta\phi = e^{-iq\lambda(x)}\phi - \phi, \tag{2.10}$$
$$\delta\phi^* = e^{iq\lambda(x)}\phi^* - \phi^* \tag{2.11}$$

とゲージ変換

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu\lambda \tag{2.12}$$

を行うと、(2.1) は不変である。無限小変換は、

$$\delta\phi = -iq\lambda\phi,\ \delta\phi^* = iq\lambda\phi^*,\ \delta A_\mu = -\partial_\mu\lambda \tag{2.13}$$

である。$\boldsymbol{B}^\mu{}_r, \boldsymbol{C}^{\mu,\nu}{}_r$ は、

$$\boldsymbol{B}^\mu := \sqrt{-g}\Big[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}(-iq\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}(iq\phi)\Big] + \frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\delta A_\nu}(-\delta^\mu_\nu), \tag{2.14}$$
$$\boldsymbol{C}^{\mu,\nu} := -\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \tag{2.15}$$

である[3)]。恒等式 (1.39) は、

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = 0 \tag{2.17}$$

で、これは、A_μ の微分が、$\mathcal{L}$ の中に、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.18}$$

という特別な組み合わせでのみ現れることを示している。恒等式 (1.38) は、

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}(-iq\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}(iq\phi) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} \equiv 0 \tag{2.19}$$

となる。A_μ のオイラー・ラグランジュ方程式は、(2.7)

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} =: \sqrt{-g}j^\mu \tag{2.20}$$

である。(2.19) より、

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} \equiv -iq\Big[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}\phi^*\Big] \tag{2.21}$$

---

3) ここで、

$$\frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\delta\phi^A} := \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\phi^A} - \partial_\mu\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\partial_\mu\phi^A}. \tag{2.16}$$

を得る。これは (2.8) である。この式の背景には、局所的位相変換に対する $\mathcal{L}$ の不変性がある。(2.19) はまた、$\partial_\mu\phi$, $\partial_\mu\phi^*$ および A_μ が、(2.9) という組み合わせでのみ $\mathcal{L}$ の中に現れることを示す。

恒等式 (1.34) は、

$$\frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\delta\phi}(-iq\phi)+\frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\delta\phi^*}(iq\phi^*)-\partial_\mu\Big(-\frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\delta A_\mu}\Big)\equiv 0 \tag{2.22}$$

である。これは、ϕ, ϕ^* の運動方程式と、A_μ の運動方程式との間の関係を表している。

3 ゲージ場の一般論

この章も [1] を参考にした。

3.1 ゲージ場の導入

n 個の実数パラメーター $\varepsilon^r(r=1,2,\cdots,n)$ に依存する大域的変換

$$\psi'^A = [\boldsymbol{T}(\varepsilon)]^A{}_B\psi^B \tag{3.1}$$

で作用が不変とする (座標 x^μ は不変)。ただし、$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ は線形リー群の表現になっているとする。$\varepsilon=0$ が恒等変換になるものとする。この時、局所的変換

$$\psi'^A = [\boldsymbol{T}(\varepsilon(x))]^A{}_B\psi^B \tag{3.2}$$

で作用が不変となるように、ψ のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0$ を修正することを考える。

(3.2) の無限小変換は、

$$\delta\psi^A = \varepsilon^r(x)[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B \tag{3.3}$$

である。ただし、

$$\boldsymbol{G}_r := \frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\varepsilon^r}\Big|_{\varepsilon=0} \tag{3.4}$$

である。$\boldsymbol{G}_r$ は、

$$[\boldsymbol{G}_r,\boldsymbol{G}_s] = f^a_{\ rs}\boldsymbol{G}_a \tag{3.5}$$

を満たす。$f^a_{\ rs}$ はリー群の構造定数である。$f^a_{\ rs}=-f^a_{\ sr}$ である。構造定数は実数である。

(3.3) で ε が定数の場合、$\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}_0\equiv 0$ を仮定しているので、(1.23) より、

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}_0]_A[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B\Big) \equiv 0 \tag{3.6}$$

が従う。これを書き換えると、

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{\partial\psi^A}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\partial_\mu\psi^B \equiv 0 \tag{3.7}$$

となる。ところで、局所的変換では、

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 &\equiv \Big[\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{\partial\psi^A}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\partial_\mu\psi^B\Big]\varepsilon^r(x) + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B\partial_\mu\varepsilon^r(x)\\ &\equiv \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B\partial_\mu\varepsilon^r(x)\end{aligned} \tag{3.8}$$

である。そこで、新しい場 $B^r{}_\mu$ を導入し、$\partial_\mu\varepsilon^r$ に比例することを消す必要がある。$\delta B^r{}_\mu$ として、

$$\delta B^r{}_\mu = \varepsilon^s M^r{}_{s,\mu} + C\{{}^r{}_\mu|^\nu{}_s\}\partial_\nu\varepsilon^s \tag{3.9}$$

を仮定する。ただし、$C\{{}^r{}_\mu|{}^\nu{}_s\}$ は nD 次の行列 C の成分である。$\delta B^r{}_\mu$ の線形結合で $\partial_\mu\varepsilon^r$ を消したいので、行列 C は $B^r{}_\mu$ には依存しない (x には依存してよい)。また、C^{-1} も存在する必要がある。そこで、

$$A^r{}_\mu := -(C^{-1})\{{}^r{}_\mu|{}^\nu{}_s\}B^s{}_\nu \tag{3.10}$$

が存在する[4)]。このとき、

$$\delta A^r{}_\mu = \varepsilon^s N^r{}_{s,\mu} - \partial_\mu\varepsilon^r \tag{3.11}$$

となる。$A^r{}_\mu$ をゲージ場という。

求める $\mathcal{L}$ は $\psi^A, \partial_\mu\psi^A, A^r{}_\mu$ の関数である。A の微分は不要である。$\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} \equiv 0$ は、

$$\begin{aligned}0 \equiv \Big[\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\psi^A}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\partial_\mu\psi^B\Big]\varepsilon^r(x) + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B\partial_\mu\varepsilon^r(x)\\ + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial A^r{}_\mu}(\varepsilon^s N^r{}_{s,\mu} - \partial_\mu\varepsilon^r)\end{aligned} \tag{3.12}$$

となる。ε^r の係数から、

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\psi^A}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\partial_\mu\psi^B + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial A^s{}_\mu}N^s{}_{r,\mu} \equiv 0 \tag{3.13}$$

を得る。$\partial_\nu\varepsilon^r$ の係数から、

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B - \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial A^r{}_\mu} \equiv 0 \tag{3.14}$$

を得る。この式は、$\partial_\mu\psi^A$ と $A^r{}_\mu$ とが、

$$\nabla_\mu\psi^A := \partial_\mu\psi^A + A^r{}_\mu[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B \tag{3.15}$$

という組み合わせ (これを ψ^A の共変微分と呼ぶ) でのみ、$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ に含まれる事を意味する。そこで、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} =: \boldsymbol{\mathcal{L}}'(\psi, \nabla_\mu\psi, A) \tag{3.16}$$

と置く。この時、

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\psi^A} = \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial\psi^A} + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial\nabla_\mu\psi^B}A^r{}_\mu[\boldsymbol{G}_r]^B{}_A, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\partial_\mu\psi^A} = \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial\nabla_\mu\psi^A}, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial A^r{}_\mu} = \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial A^r{}_\mu} + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial\nabla_\mu\psi^A}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B\psi^B \tag{3.19}$$

となる。これらの使うと (3.14) は、

$$-\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial A^r{}_\mu} \equiv 0 \tag{3.20}$$

---

4) $(C^{-1})\{{}^r{}_\mu|{}^\sigma{}_t\}C\{{}^t{}_\sigma|{}^\nu{}_s\} = \delta^\nu_\mu\delta^r_s$ である。

となる。つまり、$\boldsymbol{\mathcal{L}}'$ に A はあらわには現れない：

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}'(\psi, \nabla_\mu \psi, A) = \boldsymbol{\mathcal{L}}'(\psi, \nabla_\mu \psi). \tag{3.21}$$

(3.13) は、

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial \psi^A}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B \psi^B + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial \nabla_\mu \psi^A}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B \partial_\mu \psi^B \\
&\quad + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial \nabla_\mu \psi^A}\Big([\boldsymbol{G}_s]^A{}_B \psi^B N^s{}_{r,\mu} + A^s{}_\mu [\boldsymbol{G}_s]^A{}_B [\boldsymbol{G}_r]^B{}_C \psi^C\Big) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial \psi^A}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B \psi^B + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial \nabla_\mu \psi^A}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B \nabla_\mu \psi^B \\
&\quad + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial \nabla_\mu \psi^A}\Big([\boldsymbol{G}_s]^A{}_B \psi^B N^s{}_{r,\mu} + A^s{}_\mu [\boldsymbol{G}_s]^A{}_B [\boldsymbol{G}_r]^B{}_C \psi^C - [\boldsymbol{G}_r]^A{}_B A^s{}_\mu [\boldsymbol{G}_s]^B{}_C \psi^C\Big) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial \psi^A}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B \psi^B + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial \nabla_\mu \psi^A}[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B \nabla_\mu \psi^B \\
&\quad + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial \nabla_\mu \psi^A}\Big([\boldsymbol{G}_s]^A{}_B \psi^B N^s{}_{r,\mu} + A^s{}_\mu ([\boldsymbol{G}_s, \boldsymbol{G}_r])^A{}_B \psi^B\Big)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

となる。

ところで、$(\nabla_\mu \psi)^A$ の変換則は、微小局所変換のもとで以下のようになる：

$$\begin{aligned}
(\nabla'_\mu \psi')^A &= \partial_\mu \psi'^A + A'^r{}_\mu (\boldsymbol{G}_r \psi')^A \\
&= \partial_\mu[\psi^A + \varepsilon^r (\boldsymbol{G}_r \psi)^A] + (A^r{}_\mu + \varepsilon^s N^r{}_{s,\mu} - \partial_\mu \varepsilon^r)[(\boldsymbol{G}_r \psi)^A + \varepsilon^s (\boldsymbol{G}_r \boldsymbol{G}_s \psi)^A] \\
&= (\nabla_\mu \psi)^A + \varepsilon^r (\boldsymbol{G}_r \partial_\mu \psi)^A + \varepsilon^s [N^r{}_{s,\mu} (\boldsymbol{G}_r \psi)^A + A^r{}_\mu (\boldsymbol{G}_r \boldsymbol{G}_s \psi)^A] \\
&= (\nabla_\mu \psi)^A + \varepsilon^r (\boldsymbol{G}_r \nabla_\mu \psi)^A + \varepsilon^s [N^r{}_{s,\mu} (\boldsymbol{G}_r \psi)^A + A^r{}_\mu ([\boldsymbol{G}_r, \boldsymbol{G}_s] \psi)^A] \\
&= (\nabla_\mu \psi)^A + \varepsilon^r (\boldsymbol{G}_r \nabla_\mu \psi)^A + \varepsilon^s [N^r{}_{s,\mu} (\boldsymbol{G}_r \psi)^A + A^r{}_\mu f^t{}_{rs} (\boldsymbol{G}_t \psi)^A].
\end{aligned} \tag{3.23}$$

つまり、

$$\delta(\nabla_\mu \psi)^A = \varepsilon^r (\boldsymbol{G}_r \nabla_\mu \psi)^A + \varepsilon^s [N^t{}_{s,\mu} + A^r{}_\mu f^t{}_{rs}](\boldsymbol{G}_t \psi)^A \tag{3.24}$$

である[5)]。さて、もし、

$$N^t{}_{r,\mu} = -A^s{}_\mu f^t{}_{sr} = A^s{}_\mu f^t{}_{rs} \tag{3.25}$$

ならば、

$$\delta(\nabla_\mu \psi)^A = \varepsilon^r (\boldsymbol{G}_r \nabla_\mu \psi)^A \tag{3.26}$$

---

5) よって、(3.22) は、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial \psi^A} \delta \psi^A + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial (\nabla_\mu \psi)^A} \delta (\nabla_\mu \psi)^A \equiv 0$$

となる。

となり、$(\nabla_\mu\psi)^A$ の変換則は ψ^A と同じ形になる。以下では、$N^t{}_{r,\mu}$ をこのように選ぶ。$A^r{}_\mu$ の変換則は、

$$\delta A^r{}_\mu = \varepsilon^s f^r{}_{st} A^t{}_\mu - \partial_\mu \varepsilon^r \tag{3.27}$$

となる。

(3.27) より、$A^r{}_\mu$ が実数なら、$\delta A^r{}_\mu$ も実数である。よって、$A^r{}_\mu$ を実数と仮定する。

また、以下では、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_0(\psi^A, (\nabla_\mu\psi)^A, \theta^a{}_\mu) \tag{3.28}$$

と選ぶ。このとき、(3.22) は、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{\partial \psi^A}(\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \psi^B + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{\partial (\nabla_\mu\psi)^A}(\boldsymbol{G}_r)^A{}_B (\nabla_\mu\psi)^B \equiv 0 \tag{3.29}$$

となる。これは (3.7) で微分を共変微分に置き換えたものである。

3.2 ゲージ場の変換則

$\nabla_\mu\psi^A$ は ψ^A と同じ変換則

$$\delta\nabla_\mu\psi^A = \varepsilon^r[\boldsymbol{G}_r]^A{}_B \nabla_\mu\psi^B \tag{3.30}$$

を満たす。一般の変換

$$\psi'^A = [\boldsymbol{T}(\varepsilon(x))]^A{}_B \psi^B \tag{3.31}$$

は無限小変換の積み重ねで実現できる。よって、一般の変換に対して、

$$(\nabla_\mu\psi)'^A = \nabla'_\mu\psi'^A = [\boldsymbol{T}]^A{}_B (\nabla_\mu\psi)^B \tag{3.32}$$

である。今、

$$\boldsymbol{A}_\mu := A^r{}_\mu \boldsymbol{G}_r \tag{3.33}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \nabla'_\mu\psi'^A &= \partial_\mu(\boldsymbol{T}\psi)^B + (\boldsymbol{A}'_\mu\boldsymbol{T}\psi)^A \\ &= (\partial_\mu\boldsymbol{T}\psi)^A + (\boldsymbol{T}\partial_\mu\psi)^A + (\boldsymbol{A}'_\mu\boldsymbol{T}\psi)^A \end{aligned} \tag{3.34}$$

および、

$$[\boldsymbol{T}]^A{}_B(\nabla_\mu\psi)^B = (\boldsymbol{T}\partial_\mu\psi)^A + (\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu\psi)^A \tag{3.35}$$

なので、

$$\begin{aligned} (\partial_\mu\boldsymbol{T}\psi)^A + (\boldsymbol{A}'_\mu\boldsymbol{T}\psi)^A &= (\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu\psi)^A, \\ \boldsymbol{A}'_\mu\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu - \partial_\mu\boldsymbol{T}, \\ \boldsymbol{A}'_\mu &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu\boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} \end{aligned} \tag{3.36}$$

を得る。つまり、

$$A'^{r}{}_{\mu}\boldsymbol{G}_r = A^{r}{}_{\mu}\boldsymbol{T}\boldsymbol{G}_r\boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{3.37}$$

である。これが一般のゲージ変換である。
　ところで、

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{G}_r\boldsymbol{T}^{-1} = \alpha^{s}{}_{r}\boldsymbol{G}_s \tag{3.38}$$

を満たす n 次行列 α が存在する (付録 A)。それを $\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})$ と書く：

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{G}_r\boldsymbol{T}^{-1} = [\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})]^{s}{}_{r}\boldsymbol{G}_s. \tag{3.39}$$

$\boldsymbol{T}$ が、

$$\boldsymbol{T} = \exp(\varepsilon^r \boldsymbol{G}_r) \tag{3.40}$$

と書ける時、付録 A より、

$$\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}) = \exp(\varepsilon^r \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)) \tag{3.41}$$

である。ここで、

$$[\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)]^{t}{}_{s} = f^{t}{}_{rs} \tag{3.42}$$

である。よって、

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{G}_r\boldsymbol{T}^{-1} = [\exp(\boldsymbol{e})]^{s}{}_{r}\boldsymbol{G}_s,\ \boldsymbol{e} := \varepsilon^r \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r) \tag{3.43}$$

である。
　$\boldsymbol{E} := \varepsilon^r \boldsymbol{G}_r$ と置くと、

$$\partial_\mu \boldsymbol{T} = \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}}\partial_\mu \boldsymbol{E} e^{(1-s)\boldsymbol{E}} \tag{3.44}$$

なので、

$$\begin{aligned}\partial_\mu \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} &= \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}}\partial_\mu \boldsymbol{E} e^{-s\boldsymbol{E}} \\ &= \partial_\mu \varepsilon^r \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}}\boldsymbol{G}_r e^{-s\boldsymbol{E}} \\ &= \partial_\mu \varepsilon^r \boldsymbol{G}_s \int_0^1 ds\ [\exp(s\boldsymbol{e})]^{s}{}_{r} =: \partial_\mu \varepsilon^r \boldsymbol{G}_s l^{s}{}_{r}\end{aligned} \tag{3.45}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}l^{s}{}_{r} &= \int_0^1 ds\ [\exp(s\boldsymbol{e})]^{s}{}_{r} \\ &= \int_0^1 ds\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n [\boldsymbol{e}^n]^{s}{}_{r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}[\boldsymbol{e}^n]^{s}{}_{r}\end{aligned} \tag{3.46}$$

である。よって、

$$A'^r{}_\mu = [\exp(\boldsymbol{e})]^r{}_s A^s{}_\mu - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} [\boldsymbol{e}^n]^r{}_s \partial_\mu \varepsilon^s \tag{3.47}$$

となる。

3.3 ラグランジアン密度の形：Noether の第 2 定理の応用

ゲージ場 $A^r{}_\mu$ の運動方程式を考える。$A^r{}_\mu$ にだけ依存するラグランジアン密度を $\boldsymbol{\mathcal{L}}_1(A^r{}_\mu, \partial_\nu A^r{}_\mu)$ とし、これがゲージ変換で不変と仮定する。特に、無限小変換

$$\delta A^r{}_\mu = \varepsilon^s f^r{}_{st} A^t{}_\mu - \partial_\mu \varepsilon^r \tag{3.48}$$

の下で、$\delta \boldsymbol{\mathcal{L}}_1 = 0$ である：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_1}{\partial A^r{}_\mu} \delta A^r{}_\mu + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_1}{\partial \partial_\nu A^r{}_\mu} \partial_\nu (\delta A^r{}_\mu) \equiv 0. \tag{3.49}$$

ここで、$\delta(\partial_\nu A^r{}_\mu) = \partial_\nu(\delta A^r{}_\mu)$ を用いた。ε^s に比例する項より、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_1}{\partial A^r{}_\mu} f^r{}_{st} A^t{}_\mu + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_1}{\partial \partial_\nu A^r{}_\mu} f^r{}_{st} \partial_\nu A^t{}_\mu \equiv 0 \tag{3.50}$$

を得る。$\partial_\nu \varepsilon^r$ に比例する項より、

$$-\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_1}{\partial A^r{}_\mu} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_1}{\partial \partial_\nu A^s{}_\mu} f^s{}_{rt} A^t{}_\mu \equiv 0 \tag{3.51}$$

を得る。$\partial_\nu \partial_\mu \varepsilon^r$ に比例する項より、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_1}{\partial \partial_\nu A^r{}_\mu} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_1}{\partial \partial_\mu A^r{}_\nu} \equiv 0 \tag{3.52}$$

を得る。この式より、$A^r{}_\mu$ の微分は、$\partial_\mu A^r{}_\nu - \partial_\nu A^r{}_\mu$ という組み合わせでのみ $\boldsymbol{\mathcal{L}}_1$ の中に含まれる事が分かる。この事と (3.51) より、$A^r{}_\mu$ の微分は、

$$F^r{}_{\mu\nu} := \partial_\mu A^r{}_\nu - \partial_\nu A^r{}_\mu + f^r{}_{st} A^s{}_\mu A^t{}_\nu \tag{3.53}$$

という組み合わせでのみ $\boldsymbol{\mathcal{L}}_1$ の中に含まれる事が分かる。$F^r{}_{\mu\nu}$ はゲージ場の曲率、またはゲージの強さと呼ばれる。

3.4 ゲージ場の曲率

3.4.1 共変微分と曲率との関係

$F^r{}_{\mu\nu}$ は次のように考えると自然に現れる。

ψ^A は変換則

$$\psi'^A = \psi^A + \varepsilon^r [\boldsymbol{G}_r]^A{}_B \psi^B \tag{3.54}$$

に従い、その共変微分は、

$$(\nabla_\mu \psi)^A = \partial_\mu \psi^A + A^r{}_\mu [\boldsymbol{G}_r]^A{}_B \psi^B \tag{3.55}$$

であった。これより、一般に、場の組 $\{\phi^a\}$ が、

$$\phi'^a = \phi^a + \varepsilon^r (G_r)^a{}_b \phi^b \tag{3.56}$$

と変換するとき、

$$(\nabla_\mu \phi)^a := \partial_\mu \phi^a + A^r{}_\mu (G_r)^a{}_b \phi^b \tag{3.57}$$

と定める。これより、

$$\begin{aligned}(\nabla_\nu \nabla_\mu \psi)^A &= \partial_\nu (\nabla_\mu \psi)^A + A^s{}_\nu [\boldsymbol{G}_s]^A{}_B (\nabla_\mu \psi)^B \\ &= \partial_\nu \partial_\mu \psi^A + \partial_\nu A^r{}_\mu (\boldsymbol{G}_r \psi)^A + A^r{}_\mu (\boldsymbol{G}_r \partial_\nu \psi)^A + A^s{}_\nu (\boldsymbol{G}_s \partial_\mu \psi)^A + A^s{}_\nu A^r{}_\mu (\boldsymbol{G}_s \boldsymbol{G}_r \psi)^A\end{aligned} \tag{3.58}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}([\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi)^A &= (\partial_\mu A^r{}_\nu - \partial_\nu A^r{}_\mu)(\boldsymbol{G}_r \psi)^A + A^s{}_\mu A^t{}_\nu ([\boldsymbol{G}_s, \boldsymbol{G}_t]\psi)^A \\ &= F^r{}_{\mu\nu} [\boldsymbol{G}_r]^A{}_B \psi^B\end{aligned} \tag{3.59}$$

となる。$F^r{}_{\mu\nu}$ が自然に現れた。

3.4.2 曲率の変換則

今、

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} := F^r{}_{\mu\nu} \boldsymbol{G}_r \tag{3.60}$$

とする。これは、

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu + [\boldsymbol{A}_\mu, \boldsymbol{A}_\nu] \tag{3.61}$$

とも書ける。その変換則は、(3.36)

$$\boldsymbol{A}'_\mu = \boldsymbol{T} \boldsymbol{A}_\mu \boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu \boldsymbol{T} \boldsymbol{T}^{-1}$$

より、

$$\boldsymbol{F}'_{\mu\nu} = \partial_\mu (\boldsymbol{T} \boldsymbol{A}_\nu \boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\nu \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}) + (\boldsymbol{T} \boldsymbol{A}_\mu \boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1})(\boldsymbol{T} \boldsymbol{A}_\nu \boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\nu \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}) - (\mu \longleftrightarrow \nu) \tag{3.62}$$

である。第1項は、

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\nu\boldsymbol{T}^{-1}-\partial_\nu\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}) &= \partial_\mu\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\nu\boldsymbol{T}^{-1}+\boldsymbol{T}\partial_\mu\boldsymbol{A}_\nu\boldsymbol{T}^{-1}+\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\nu\partial_\mu\boldsymbol{T}^{-1}\\ &\quad -\partial_\mu\partial_\nu\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}-\partial_\nu\boldsymbol{T}\partial_\mu\boldsymbol{T}^{-1}\\ &= \partial_\mu\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\nu\boldsymbol{T}^{-1}+\boldsymbol{T}\partial_\mu\boldsymbol{A}_\nu\boldsymbol{T}^{-1}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\nu\boldsymbol{T}^{-1}\partial_\mu\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\\ &\quad -\partial_\mu\partial_\nu\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}+\partial_\nu\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\partial_\mu\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\end{aligned} \tag{3.63}$$

である。ここで、$\partial_\mu\boldsymbol{T}^{-1}=-\boldsymbol{T}^{-1}\partial_\mu\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}$ を用いた。第2項は、

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu\boldsymbol{T}^{-1}-\partial_\mu\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1})(\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\nu\boldsymbol{T}^{-1}-\partial_\nu\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1})\\ &=\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu\boldsymbol{A}_\nu\boldsymbol{T}^{-1}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu\boldsymbol{T}^{-1}\partial_\nu\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}-\partial_\mu\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\nu\boldsymbol{T}^{-1}+\partial_\mu\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\partial_\nu\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\end{aligned} \tag{3.64}$$

である。よって、

$$\boldsymbol{F}'_{\mu\nu}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{3.65}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}F'^{r}_{\mu\nu} &= [\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})]^r{}_sF^s{}_{\mu\nu}\\ &= [\exp\boldsymbol{e}]^r{}_sF^s{}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{3.66}$$

を得る。

　今、

$$\boldsymbol{f}_{\mu\nu}:=\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)F^r{}_{\mu\nu} \tag{3.67}$$

とすると、

$$\boldsymbol{f}'_{\mu\nu}=\exp(\boldsymbol{e})\boldsymbol{f}_{\mu\nu}\exp(-\boldsymbol{e}) \tag{3.68}$$

となる。よって、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Gauge}}=\frac{1}{4k}\mathrm{Tr}[\boldsymbol{f}_{\mu\nu}\boldsymbol{f}^{\mu\nu}] \tag{3.69}$$

はゲージ不変である。k は正の定数である。今、

$$\kappa_{rs}:=-\mathrm{Tr}[\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s)]=-f^u{}_{rv}f^v{}_{su}(=-\kappa_{sr}) \tag{3.70}$$

とすると、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Gauge}}=-\frac{1}{4k}\kappa_{rs}F^r{}_{\mu\nu}F^{s,\mu\nu} \tag{3.71}$$

となる。

　一般に

$$\mathrm{Tr}[\boldsymbol{f}_{\mu\nu}\boldsymbol{f}_{\alpha\beta}] \tag{3.72}$$

はゲージ不変である。今、

$$F_{r,\mu\nu} := \kappa_{rs} F^s{}_{\mu\nu} \tag{3.73}$$

とすると、(3.72) のゲージ不変性より、

$$F'_{r,\mu\nu} = F_{s,\mu\nu}[\exp(-\boldsymbol{e})]^s{}_r \tag{3.74}$$

を得る。

変換のリー群が半単純のとき、$\det \kappa_{rs} \neq 0$ であり、κ_{rs} は逆を持つ。更に、コンパクト半単純の場合は、パラメーターを適当に変換して $\kappa_{rs} = \delta_{rs}$ と出来る。なお、ローレンツ群は非コンパクトである。

3.4.3 曲率の共変微分

(3.66) より、微小変換では、

$$F'^r_{\mu\nu} = F^r_{\mu\nu} + \varepsilon^t f^r{}_{ts} F^s_{\mu\nu} \tag{3.75}$$

となる。よって一般処方 (3.57) より、

$$\nabla_\lambda F^r_{\mu\nu} = \partial_\lambda F^r_{\mu\nu} + A^t{}_\lambda f^r{}_{ts} F^s_{\mu\nu} \tag{3.76}$$

となる。これは、

$$\nabla_\lambda \boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\lambda \boldsymbol{F}_{\mu\nu} + [\boldsymbol{A}_\lambda, \boldsymbol{F}_{\mu\nu}] \tag{3.77}$$

とも書ける。変換則は、

$$\nabla'_\lambda \boldsymbol{F}'_{\mu\nu} = \boldsymbol{T} \nabla_\lambda \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \boldsymbol{T}^{-1} \tag{3.78}$$

となり、$\nabla_\lambda \boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ は $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ と同じ変換則を満たす。

また、微小変換で、

$$F'_{r,\mu\nu} = F_{r,\mu\nu} - \varepsilon^t f^s{}_{tr} F_{s,\mu\nu} \tag{3.79}$$

となるので、

$$\nabla_\lambda F_{r,\mu\nu} = \partial_\lambda F_{r,\mu\nu} - A^t{}_\lambda f^s{}_{tr} F_{s,\mu\nu} \tag{3.80}$$

である。ここで、

$$f_{abc} := \kappa_{ar} f^r{}_{bc} \tag{3.81}$$

が完全反対称である (付録 A) 事を使うと、

$$\nabla_\lambda(\kappa_{rs} F^s{}_{\mu\nu}) = \kappa_{rs} \nabla_\lambda F^s{}_{\mu\nu} \tag{3.82}$$

を示す事が出来る。

3.5 ゲージ場の運動方程式

$A^r{}_\mu$ の微分は、$F^r{}_{\mu\nu}$ の形でのみ現れる：

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_1 =: \ \boldsymbol{\mathcal{L}}'_1(A^r{}_\mu, F^r{}_{\mu\nu}). \tag{3.83}$$

よって、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_1}{\partial A^r{}_\mu} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'_1}{\partial A^r{}_\mu} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'_1}{\partial F^s{}_{\mu\nu}} \cdot 2 f^s{}_{rt} A^t{}_\nu, \tag{3.84}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_1}{\partial \partial_\nu A^r{}_\mu} = 2 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'_1}{\partial F^r{}_{\nu\mu}} \tag{3.85}$$

となる。(3.51), 即ち、

$$-\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_1}{\partial A^r{}_\mu} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_1}{\partial \partial_\nu A^s{}_\mu} f^s{}_{rt} A^t{}_\mu \equiv 0$$

は、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'_1}{\partial A^r{}_\mu} \equiv 0 \tag{3.86}$$

となる。これより、$\boldsymbol{\mathcal{L}}_1$ は $F^r{}_{\mu\nu}$ だけの関数である。

(3.50) は、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'_1}{\partial F^s{}_{\mu\nu}} f^s{}_{rt} F^t{}_{\mu\nu} \equiv 0 \tag{3.87}$$

となる。ここで、(A.23) を用いた。(3.66) より、微小変換で、$\delta F^s{}_{\mu\nu} = \varepsilon^r f^s{}_{rt} F^t{}_{\mu\nu}$ なので、上式は、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'_1}{\partial F^s{}_{\mu\nu}} \delta F^s{}_{\mu\nu} \equiv 0 \tag{3.88}$$

と等価となる。つまり、$\boldsymbol{\mathcal{L}}'_1$ がゲージ不変であるという前提そのものを表している。$\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_{\mathrm{Gauge}}$ とすると、この式が満たされる。

以下では、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\psi, \nabla\psi) + \mathcal{L}'_1 \tag{3.89}$$

について考える。$A^r{}_\mu$ の運動方程式は、

$$\frac{\delta \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\delta A^r{}_\mu} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'_1}{\partial F^s{}_{\mu\nu}} \cdot 2 f^s{}_{rt} A^t{}_\nu - \partial_\nu \Big(2 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'_1}{\partial F^r{}_{\nu\mu}} \Big) + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{\partial A^r{}_\mu} = 0 \tag{3.90}$$

である。ここで、

$$\boldsymbol{\pi}_r{}^{\mu\nu} := 2 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'_1}{\partial F^s{}_{\mu\nu}}, \tag{3.91}$$

$$\boldsymbol{j}_r{}^\mu := \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{\partial A^r{}_\mu} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{\partial (\nabla_\mu \psi)^A} (\boldsymbol{G}_r \psi)^A \tag{3.92}$$

と置くと、

$$\partial_\nu \boldsymbol{\pi}_r{}^{\mu\nu} - f^s{}_{tr} A^t{}_\nu \boldsymbol{\pi}_s{}^{\mu\nu} = -\boldsymbol{j}_r{}^\mu \tag{3.93}$$

となる。この微分の形は (3.80) と同じなので、

$$\nabla_\lambda \boldsymbol{\pi}_r{}^{\mu\nu} := \partial_\lambda \boldsymbol{\pi}_r{}^{\mu\nu} - f^s{}_{tr} A^t{}_\lambda \boldsymbol{\pi}_s{}^{\mu\nu} \tag{3.94}$$

として、

$$\nabla_\nu \boldsymbol{\pi}_r{}^{\mu\nu} = -\boldsymbol{j}_r{}^\mu. \tag{3.95}$$

恒等式 (1.34) を $\boldsymbol{\mathcal{L}}'_1$ に適用すると、

$$\partial_\mu [\boldsymbol{\mathcal{L}}'_1]_r{}^\mu - A^t{}_\mu f^s{}_{tr} [\boldsymbol{\mathcal{L}}'_1]_s{}^\mu \equiv 0 \tag{3.96}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\mathcal{L}}'_1]_r{}^\mu &:= \frac{\delta \boldsymbol{\mathcal{L}}'_1}{\delta A^r{}_\mu} \\ &\equiv \nabla_\nu \boldsymbol{\pi}_r{}^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.97}$$

である。(3.96) の微分の形は (3.80) と同じである。今、

$$\nabla_\lambda \boldsymbol{X}_r{}^\mu := \partial_\lambda \boldsymbol{X}_r{}^\mu - f^s{}_{tr} A^t{}_\lambda \boldsymbol{X}_s{}^\mu \ (\boldsymbol{X}_r{}^\mu = \nabla_\nu \boldsymbol{\pi}_r{}^{\mu\nu}, \boldsymbol{j}_r{}^\mu) \tag{3.98}$$

とすると、

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \boldsymbol{\pi}_r{}^{\mu\nu} \equiv 0, \tag{3.99}$$

$$\nabla_\mu \boldsymbol{j}_r{}^\mu = 0 \tag{3.100}$$

を得る。

$\boldsymbol{\mathcal{L}}'_1$ についての恒等式 (1.37) から (1.39) は、

$$\partial_\mu \boldsymbol{J}_r{}^\mu \equiv 0, \tag{3.101}$$

$$\boldsymbol{J}_r{}^\mu + \partial_\nu \boldsymbol{\pi}_r{}^{\mu\nu} \equiv 0, \tag{3.102}$$

$$\boldsymbol{\pi}_r{}^{(\mu\nu)} \equiv 0 \tag{3.103}$$

となる。ここで、

$$\boldsymbol{J}_r{}^\nu := \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'_1}{\partial \partial_\nu A^s{}_\mu} f^s{}_{rt} A^t{}_\mu - [\boldsymbol{\mathcal{L}}'_1]_r{}^\mu \tag{3.104}$$

である。運動方程式 (3.95) を使うと、

$$\boldsymbol{J}_r{}^\nu = \boldsymbol{j}_r{}^\nu - f^s{}_{tr} A^t{}_\mu \boldsymbol{\pi}_r{}^{\nu\mu} \tag{3.105}$$

となる。(3.101) に代入して、

$$\partial_\nu (\boldsymbol{j}_r{}^\nu - f^s{}_{tr} A^t{}_\mu \boldsymbol{\pi}_r{}^{\nu\mu}) = 0. \tag{3.106}$$

なお、運動方程式 (3.95) は、Maxwell 方程式とそっくりの形

$$\partial_\nu \boldsymbol{\pi}_r{}^{\mu\nu} = -(\boldsymbol{j}_r{}^\mu - f^s{}_{tr} A^t{}_\nu \boldsymbol{\pi}_r{}^{\mu\nu}) = -\boldsymbol{J}_r{}^\mu \tag{3.107}$$

に書ける。右辺の第 2 項からも分かるように、ゲージ場が「ゲージ荷」を持っているため、ゲージ場はゲージ場自身の源の役割も持つ。

3.6 ゲージ場の再定義

3.6.1 $\boldsymbol{G}_r$ の規格化

今、

$$\kappa_{rs} = M\delta_{rs}, \tag{3.108}$$
$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{G}_r\boldsymbol{G}_s) = -N\delta_{rs} \tag{3.109}$$

の場合を考える。ただし、M, N は正の定数である。このとき、この時、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Gauge}} = -\frac{M}{4k}\delta_{rs}F^r{}_{\mu\nu}F^{s,\mu\nu} \tag{3.110}$$

である。$\boldsymbol{G}_r = \alpha\boldsymbol{G}'_r$($\alpha$ は定数) とすると、

$$[\boldsymbol{G}'_r, \boldsymbol{G}'_s] = f'^a{}_{rs}\boldsymbol{G}'_a, \quad f'^a{}_{rs} = \frac{1}{\alpha}f^a{}_{rs} \tag{3.111}$$

である。また、(3.70) の κ_{rs} は、

$$\kappa'_{rs} := -f'^u{}_{rv}f'^v{}_{su} = \frac{1}{\alpha^2}\kappa_{rs} \tag{3.112}$$

となる。よって、

$$\kappa'_{rs} = \frac{M}{\alpha^2}\delta_{rs} \equiv M'\delta_{rs}, \tag{3.113}$$
$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{G}'_r\boldsymbol{G}'_s) = -\frac{N}{\alpha^2}\delta_{rs} \tag{3.114}$$

である。また、$A^r{}_\mu\boldsymbol{G}_r = A'^r{}_\mu\boldsymbol{G}'_r$ で $A'^r{}_\mu$ を定義すると、$A'^r{}_\mu = \alpha A^r{}_\mu$ であり、

$$\begin{aligned} F'^r{}_{\mu\nu} &:= \partial_\mu A'^r{}_\nu - \partial_\nu A'^r{}_\mu + f'^r{}_{st}A'^s{}_\mu A'^t{}_\nu \\ &= \alpha F^r{}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.115}$$

となる。よって、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Gauge}} = -\frac{1}{4k}\kappa'_{rs}F'^r{}_{\mu\nu}F'^{s,\mu\nu} = -\frac{M'}{4k}\delta_{rs}F'^r{}_{\mu\nu}F'^{s,\mu\nu} \tag{3.116}$$

となる。α を適当に選んで、$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{G}'_r\boldsymbol{G}'_s) = -\delta_{rs}$ や $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{G}'_r\boldsymbol{G}'_s) = -\frac{1}{2}\delta_{rs}$ とすることが出来る。以下、$\boldsymbol{G}_r$ は適当に規格化されていると仮定し、$'$ を省略する。

3.6.2 ゲージ場の再定義

多くの文献では、ゲージ場 $A^r{}_\mu$ を $gA^r{}_\mu$ と表している。ここで、

$$g := \sqrt{\frac{k}{M}} \tag{3.117}$$

である。今、後者の $A^r{}_\mu$ を $\tilde{A}^r{}_\mu$ と置く ($A^r{}_\mu = g\tilde{A}^r{}_\mu$) と、$\psi^A$ の共変微分は、

$$\nabla_\mu \psi^A = \partial_\mu \psi^A + g\tilde{A}^r{}_\mu [\boldsymbol{G}_r]^A{}_B \psi^B \tag{3.118}$$

となり、ゲージ場の曲率は、

$$F^r{}_{\mu\nu} = g\tilde{F}^r{}_{\mu\nu}, \quad \tilde{F}^r{}_{\mu\nu} := \partial_\mu \tilde{A}^r{}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}^r{}_\mu + gf^r{}_{st}\tilde{A}^s{}_\mu \tilde{A}^t{}_\nu \tag{3.119}$$

となる。また、$\mathcal{L}_{\text{Gauge}}$ は、

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}} = -\frac{1}{4}\delta_{rs}\tilde{F}^r{}_{\mu\nu}\tilde{F}^{s,\mu\nu} \tag{3.120}$$

となる。オイラー・ラグランジュ方程式 (3.93) は、$\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_{\text{Gauge}}$ の場合、

$$\partial_\nu \tilde{\boldsymbol{F}}_r{}^{\mu\nu} - gf^s{}_{tr}\tilde{A}^t{}_\nu \tilde{\boldsymbol{F}}_s{}^{\mu\nu} = \tilde{\boldsymbol{j}}_r{}^\mu, \tag{3.121}$$

$$\tilde{\boldsymbol{j}}_r{}^\mu := g\boldsymbol{j}_r{}^\mu = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{\partial \tilde{A}^r{}_\mu} \tag{3.122}$$

となる。ここで、$g\tilde{\boldsymbol{F}}_r{}^{\mu\nu} := \delta_{rs}\boldsymbol{F}^{r,\mu\nu}$ である[6)]。

6) 添え字を $\kappa_{rs} = M\delta_{rs}$ でなく、δ_{rs} で下げていることに注意せよ。また、$\boldsymbol{F}^{r,\mu\nu} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}F^{r,\mu\nu}$ である。

4 重力場

この章も [1] を参考にした。重力場のゲージ理論および、重力場のエネルギーについて、文献 [3] が詳しい。

4.1 大域的変換：時空が平坦な場合

まず平坦な時空を考える。つまり、曲率テンソルが至る所 0 とする。この時、時空全体にローレンツ座標系を設定できる。その座標を $X^k(k=0,1,2,\cdots,D-1)$ とし、計量を $\eta_{ab}=\mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1)$ とする。また、一般座標を x^μ とする。今、

$$h^k{}_\mu(x):=\frac{\partial X^k}{\partial x^\mu},\ h^\mu{}_k(x):=\frac{\partial x^\mu}{\partial X^k} \tag{4.1}$$

とすると、

$$h^k{}_\nu h^\nu{}_l=\delta^k_l,\ h^\mu{}_k h^k{}_\nu=\delta^\mu_\nu \tag{4.2}$$

となる。また、

$$g_{\mu\nu}=\eta_{ab}h^a{}_\mu(x)h^b{}_\mu(x) \tag{4.3}$$

である。$h^k{}_\mu$ を多脚場という。

大域的内部ローレンツ変換

$$X'^k=a^k{}_lX^l \tag{4.4}$$

に対して、h は

$$h'^k_\mu=a^k{}_lh^l{}_\mu, \tag{4.5}$$

$$h'^\mu_k=(a^{-1})^l{}_kh^\mu{}_l \tag{4.6}$$

と変換される。微小変換

$$a^k{}_l=\delta^k{}_l+\varepsilon^k{}_l \tag{4.7}$$

に対して、場の組 $\{\psi^A\}$ は、

$$\delta\psi^A=\frac{1}{2}\varepsilon^{kl}(\boldsymbol{G}_{kl}\psi)^A \tag{4.8}$$

と変換すると仮定する。$\varepsilon^{kl}=-\varepsilon^{lk}$, $\boldsymbol{G}_{kl}=-\boldsymbol{G}_{lk}$ である。$\psi^\alpha(\alpha=1,2,\cdots,2^{[D/2]})$ をディラックのスピノール場とし、$\bar\psi_\alpha:=i(\psi^\dagger\gamma^0)_\alpha$ とする。ただし、γ^a は、

$$\gamma^{(a}\gamma^{b)}=\eta^{ab}=\mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1) \tag{4.9}$$

を満たすガンマ行列である。ψ^α に対して、

$$\delta\psi^\alpha=\frac{1}{4}\varepsilon^{ab}(\gamma_{ab}\psi)^\alpha,\ \gamma_{ab}:=\gamma_{[a}\gamma_{b]} \tag{4.10}$$

であり、$\bar\psi_\alpha$ に対して、

$$\delta\bar\psi_\alpha=-\frac{1}{4}\varepsilon^{ab}(\bar\psi\gamma_{ab})_\alpha \tag{4.11}$$

である。

4.2 局所的変換：時空が平坦な場合

以下では一般の時空は考える。この場合、X 系は存在しない。ただし、(4.3) を満たす多脚場は存在する。局所内部ローレンツ変換は

$$h'^{k}{}_{\mu} = a^{k}{}_{l}(x)h^{l}{}_{\mu}, \tag{4.12}$$

$$h'^{\mu}{}_{k} = (a^{-1})^{l}{}_{k}h^{\mu}{}_{l} \tag{4.13}$$

である。このとき、場の共変微分は、

$$\nabla_\mu \psi^A := \partial_\mu \psi^A + \frac{1}{2}A^{ab}{}_{\mu}(\boldsymbol{G}_{ab}\psi)^A \tag{4.14}$$

である。$A^{ab}{}_{\mu} = -A^{ba}{}_{\mu}$ である。特に、

$$\nabla_\mu \psi^\alpha = \partial_\mu \psi^\alpha + \frac{1}{4}A^{ab}{}_{\mu}(\gamma_{ab}\psi)^\alpha, \tag{4.15}$$

$$\nabla_\mu \bar{\psi}_\alpha = \partial_\mu \bar{\psi}_\alpha - \frac{1}{4}A^{ab}{}_{\mu}(\bar{\psi}\gamma_{ab})_\alpha \tag{4.16}$$

である。今、

$$\boldsymbol{A}_\mu := \frac{1}{2}A^{ab}{}_{\mu}\boldsymbol{G} \tag{4.17}$$

とすると、

$$\boldsymbol{A}'_\mu = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu\boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{4.18}$$

である。ところで、$\psi^A = V^a$(ベクトル場) のとき、

$$[\boldsymbol{T}]^{k}{}_{l}V^l = a^{k}{}_{l}V^l \tag{4.19}$$

つまり、$[\boldsymbol{T}]^{k}{}_{l} = a^{k}{}_{l}$ である[7]。これと、

$$(\boldsymbol{A}_\mu)^{a}{}_{b} = A^{a}{}_{b\mu} \tag{4.21}$$

より、

$$A'^{a}{}_{b\mu} = a^{a}{}_{i}A^{a}{}_{j\mu}(a^{-1})^{j}{}_{b} - \partial_\mu a^{a}{}_{i}(a^{-1})^{i}{}_{b} \tag{4.22}$$

を得る。A の曲率は、

$$F^{a}{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu A^{a}{}_{b\nu} - \partial_\nu A^{a}{}_{b\mu} + A^{a}{}_{c\mu}A^{c}{}_{b\nu} - A^{a}{}_{c\nu}A^{c}{}_{b\mu} \tag{4.23}$$

であり、その変換則は、

$$F'^{a}{}_{b\mu\nu} = a^{a}{}_{i}F^{i}{}_{j\mu\nu}(a^{-1})^{j}{}_{b} \tag{4.24}$$

である。よって、

$$r^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} := h^{\alpha}{}_{a}F^{a}{}_{b\mu\nu}h^{b}{}_{\beta} \tag{4.25}$$

はゲージ不変である。

---

[7] これより、

$$(\boldsymbol{G}_{ab})^{i}{}_{j} = \delta^i_a\eta_{bj} - \delta^i_b\eta_{aj} \tag{4.20}$$

を得る。

4.3 曲率テンソル

一般公式より、

$$\nabla_\mu V_k = \partial_\mu V_k + A_k{}^l{}_\mu V_l \tag{4.26}$$

である。一方、

$$\nabla_\mu V_\nu \equiv \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} V_\lambda \tag{4.27}$$

と定める。ただし、$\nabla_\mu V_\nu$ は 2 階テンソルでることを要請する。これにより、Γ の変換則が決まる。さて、今、

$$h^k{}_\nu \nabla_\mu V_k = \nabla_\mu V_\nu \tag{4.28}$$

を要請する (ただし、$V_\nu = h^k{}_\nu V_k$)。左辺は、

$$\begin{aligned} h^k{}_\nu \nabla_\mu V_k &= \partial_\mu V_\nu - \partial_\mu h^k{}_\nu V_k + h^k{}_\nu A_k{}^l{}_\mu V_l \\ &= \partial_\mu V_\nu - \partial_\mu h^k{}_\nu h^\lambda{}_k V_\lambda + A_k{}^l{}_\mu h^k{}_\nu h^\lambda{}_l V_\lambda \end{aligned} \tag{4.29}$$

であるから、

$$\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} = \partial_\mu h^k{}_\nu h^\lambda{}_k - A_k{}^l{}_\mu h^k{}_\nu h^\lambda{}_l \tag{4.30}$$

を得る。これは、

$$\partial_\mu h^k{}_\lambda = \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} h^k{}_\alpha - A^k{}_{l\mu} h^l{}_\lambda \tag{4.31}$$

とも書ける。

ところで、$h^k{}_\nu$ は 2 階微分可能なので、

$$\partial_\nu \partial_\mu h^k{}_\lambda = \partial_\mu \partial_\nu h^k{}_\lambda \tag{4.32}$$

である。左辺は、

$$\begin{aligned} &\partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} h^k{}_\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} \partial_\nu h^k{}_\alpha - \partial_\nu A^k{}_{l\mu} h^l{}_\lambda - A^k{}_{l\mu} \partial_\nu h^l{}_\lambda \\ &= \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} h^k{}_\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} (\Gamma^\rho{}_{\alpha\nu} h^k{}_\rho - A^k{}_{l\nu} h^l{}_\alpha) - \partial_\nu A^k{}_{l\mu} h^l{}_\lambda - A^k{}_{l\mu} (\Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} h^l{}_\alpha - A^l{}_{m\nu} h^m{}_\lambda) \end{aligned} \tag{4.33}$$

であり、右辺は、

$$\partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} h^k{}_\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} (\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu} h^k{}_\rho - A^k{}_{l\mu} h^l{}_\alpha) - \partial_\mu A^k{}_{l\nu} h^l{}_\lambda - A^k{}_{l\nu} (\Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} h^l{}_\alpha - A^l{}_{m\mu} h^m{}_\lambda) \tag{4.34}$$

なので、

$$h^k{}_\alpha R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = F^k{}_{l\mu\nu} h^l{}_\beta \tag{4.35}$$

を得る。ここで、

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} := \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\mu} \Gamma^\gamma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\gamma\nu} \Gamma^\gamma{}_{\beta\mu} \tag{4.36}$$

は曲率テンソルである。(4.35) より、(4.25) の $r^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ は $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ となる。

A 線形リー群

この付録は [1] の付録 B を参考にした。

A.1 線形リー群とリー代数

複素数の行列要素を持つ N 次行列の全体を $\mathrm{M}(N,\mathbb{C})$ と書く。$\mathrm{M}(N,\mathbb{C})$ のうち、行列式が 0 でないもの全体を $\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$ と書く。$\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$ の閉部分群を線形リー群と言う。G を線形リー群とする。リー代数 $\mathfrak{g}$ を、

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathrm{M}(N,\mathbb{C}) | {}^{\forall}a \in \mathbb{R},\ \exp(aX) \in G\} \tag{A.1}$$

で定義する。$\mathfrak{g}$ の任意の元 A, B について、

$$aA \in \mathfrak{g}\ (a \in \mathbb{R}), \quad A + B \in \mathfrak{g}, \quad [A,B] := AB - BA \in \mathfrak{g} \tag{A.2}$$

となる。$\boldsymbol{G}_r$ をリー代数の基底とすると、任意の $X \in \mathfrak{g}$ は、実数 c^r を用いて、$X = c^r\boldsymbol{G}_r$ と一意的に書ける。

$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ を線形リー群の元とすると、単位元の近くで、

$$\boldsymbol{T}(\varepsilon) = \exp[\varepsilon^r\boldsymbol{G}_r] \tag{A.3}$$

と書ける。ε^r は実パラメーターである。コンパクト (パラメーターの範囲が有限) で連結な線形リー群[8)]の任意の元は、この形で書けるが、一般には、この形で書けるとは限らない。

A.2 構造定数

$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ を線形リー群 G の元とすると、任意の実パラメーター a, b に対して、$\boldsymbol{T}(a)\boldsymbol{T}(b) \in G$ なので、

$$\boldsymbol{T}(c) = \boldsymbol{T}(a)\boldsymbol{T}(b) \tag{A.4}$$

となる実パラメーター c が存在する。これを

$$c^r = f^r(a,b) \tag{A.5}$$

とかく。$f^r(a,b)$ は以下の性質を持つ：

$$f^r(a, f(b,c)) = f^r(f(a,b), c), \tag{A.6}$$
$$f^r(a,0) = f^r(0,a) = a^r. \tag{A.7}$$

また、$f^r(a,b)$ は a, b について任意の階数まで連続微分可能とする。$a = 0$ が G の単位元に相当するので、(A.4) を a^r, b^s で微分した後、a, b を全て 0 と置くと、

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{T}(c)}{\partial c^k\partial c^l}\bigg|_{c=0}\frac{\partial f^l(a,b)}{\partial a^r}\bigg|_{a,b=0}\frac{\partial f^k(a,b)}{\partial b^s}\bigg|_{a,b=0} + \frac{\partial^2 f^p(a,b)}{\partial a^r\partial b^s}\bigg|_{a,b=0}\boldsymbol{G}_p = \boldsymbol{G}_r\boldsymbol{G}_s \tag{A.8}$$

8) $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ は連結なコンパクト群である。

を得る。ここで、(A.3) より、

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{T}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^r}\right|_{\varepsilon=0} = \boldsymbol{G}_r \tag{A.9}$$

である事を用いた。(A.7) より、

$$\left.\frac{\partial f^l(a,b)}{\partial a^r}\right|_{b=0} = \delta^l_r, \quad \left.\frac{\partial f^k(a,b)}{\partial b^s}\right|_{a=0} = \delta^k_s \tag{A.10}$$

なので、(A.8) は、

$$\left.\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}(c)}{\partial c^r \partial c^s}\right|_{c=0} + \left.\frac{\partial^2 f^p(a,b)}{\partial a^r \partial b^s}\right|_{a,b=0} \boldsymbol{G}_p = \boldsymbol{G}_r \boldsymbol{G}_s \tag{A.11}$$

となる。r, s を入れ換えた式との差を計算して、

$$[\boldsymbol{G}_r, \boldsymbol{G}_s] = \boldsymbol{G}_r \boldsymbol{G}_s - \boldsymbol{G}_s \boldsymbol{G}_r = f^p{}_{rs} \boldsymbol{G}_p, \tag{A.12}$$

$$f^p{}_{rs} := \left.\frac{\partial^2 f^p(a,b)}{\partial a^r \partial b^s}\right|_{a,b=0} - \left.\frac{\partial^2 f^p(a,b)}{\partial a^s \partial b^r}\right|_{a,b=0} \tag{A.13}$$

となる。構造定数と呼ばれる $f^p{}_{rs}$ は、パラメーターの結合則を表す関数 $f^p(a,b)$ により完全に決定される。構造定数は実数である。パラメーターの取り方を変えると、$f^p(a,b)$ や構造定数, 基底 $\boldsymbol{G}_r$ も変化する。

A.3 随伴表現

$X \in G$, $A \in \mathfrak{g}$ とすると、

$$X e^A X^{-1} = e^{XAX^{-1}} \in G \tag{A.14}$$

なので、$XAX^{-1} \in \mathfrak{g}$ である。特に、$X\boldsymbol{G}_r X^{-1} \in \mathfrak{g}$ なので、

$$X\boldsymbol{G}_r X^{-1} = \alpha^s{}_r \boldsymbol{G}_r \tag{A.15}$$

と書ける。$\alpha^s{}_r$ は実数である。α は群の表現となる。これは随伴表現と呼ばれる。α を $\mathrm{Ad}(X)$ と書く。

今、$X \in G$ が実数 s を用いて、

$$X = e^{sB} \tag{A.16}$$

と書けるとする。この時、

$$\mathrm{Ad}(X) =: \exp(s \cdot \mathrm{ad}(B)) \tag{A.17}$$

で行列 $\mathrm{ad}(B)$ を定める。定義より、

$$e^{sB} \boldsymbol{G}_r e^{-sB} = \boldsymbol{G}_s [\exp(s \cdot \mathrm{ad}(B))]^s{}_r \tag{A.18}$$

である。s で微分した後に $s=0$ と置いて、

$$[B, \boldsymbol{G}_r] = \boldsymbol{G}_t [\mathrm{ad}(B)]^t{}_r. \tag{A.19}$$

$B = \boldsymbol{G}_s$ として、

$$(f^t{}_{sr} \boldsymbol{G}_t =)[\boldsymbol{G}_s, \boldsymbol{G}_r] = \boldsymbol{G}_t [\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s)]^t{}_r \tag{A.20}$$

即ち、

$$[\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s)]^t{}_r = f^t{}_{sr} \tag{A.21}$$

を得る。

ヤコビ恒等式

$$[[\boldsymbol{G}_r, \boldsymbol{G}_s], \boldsymbol{G}_t] + [[\boldsymbol{G}_s, \boldsymbol{G}_t], \boldsymbol{G}_r] + [[\boldsymbol{G}_t, \boldsymbol{G}_r], \boldsymbol{G}_s] = 0 \tag{A.22}$$

より、

$$f^p{}_{rs} f^q{}_{pt} + f^p{}_{st} f^q{}_{pr} + f^p{}_{tr} f^q{}_{ps} = 0. \tag{A.23}$$

これと (A.21) より、

$$[\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s), \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)] = \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_t) f^t{}_{sr}. \tag{A.24}$$

これは、$\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s)$ がリー代数 $\mathfrak{g}$ の表現であることを表す。

A.4 構造定数の完全反対称性

上式に $\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_u)$ をかけて Tr を取ると、

$$\mathrm{Tr}\Big([\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s), \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)]\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_u)\Big) = -\kappa_{tu} f^t{}_{sr} \tag{A.25}$$

である。左辺は、

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\Big([\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s), \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)]\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_u)\Big) &= \mathrm{Tr}\Big(\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)[\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_u), \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s)]\Big) \\ &= \mathrm{Tr}\Big(\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_t)\Big) f^t{}_{us} \\ &= -\kappa_{rt} f^t{}_{us} \end{aligned} \tag{A.26}$$

なので、

$$\kappa_{rt} f^t{}_{us} = \kappa_{tu} f^t{}_{sr} \tag{A.27}$$

を得る。この式は、

$$f_{rus} = f_{usr} = -f_{urs} \tag{A.28}$$

を意味する。これより、f_{abc} は完全反対称である。

B　エネルギー運動量保存則

B.1　「物質」系のエネルギー・運動量保存則

重力場以外を「物質」と呼ぶ。「物質」は、スカラー場の組 $\{\phi^a\}$ とゲージ場の組 $\{A^r_\mu\}$ とからなるとする。「物質場」をまとめて、$\{\psi^A\}$ と書く。微小座標変換

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x) \tag{B.1}$$

を考える。この時、

$$\delta\phi^a = 0, \tag{B.2}$$
$$\delta A^r_\mu = -A^r_\alpha \partial_\mu \varepsilon^\alpha, \tag{B.3}$$
$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\alpha\nu}\partial_\mu\varepsilon^\alpha - g_{\mu\alpha}\partial_\nu\varepsilon^\alpha \tag{B.4}$$

である。この変換で、「物質」のラグランジアン密度 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}$ が不変[9] とする。この時、Noether の第 2 定理は、

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}]_A(-\partial_\nu\psi^A) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}(-\partial_\nu g_{\alpha\beta}) + \partial_\mu([\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}]^\alpha_r A^r_\nu \delta^\mu_\alpha + \sqrt{-g}T^{\alpha\beta}\delta^\mu_{(\alpha} g_{\beta)\nu}) \equiv 0 \tag{B.5}$$

および、

$$\partial_\mu \boldsymbol{B}^\mu{}_\nu \equiv 0, \tag{B.6}$$
$$\boldsymbol{B}^\mu{}_\nu + \partial_\alpha \boldsymbol{C}^{\alpha,\mu}{}_\nu \equiv 0, \tag{B.7}$$
$$\boldsymbol{C}^{(\alpha,\mu)}{}_\nu \equiv 0 \tag{B.8}$$

である。ただし、

$$\boldsymbol{B}^\mu{}_\nu := -\sqrt{-g}\Theta^\mu{}_\nu + [\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}]^\alpha_r(-A^r_\nu\delta^\mu_\alpha) - \sqrt{-g}T^{\alpha\beta}\delta^\mu_{(\alpha}g_{\beta)\nu}, \tag{B.9}$$
$$\boldsymbol{C}^{\alpha,\mu}{}_\nu := \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}}{\partial(\partial_\alpha A^r_\sigma)}(-A^r_\nu\delta^\mu_\sigma) \tag{B.10}$$

である。ここで、

$$T^{\mu\nu} = 2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}}{\partial g_{\mu\nu}} \tag{B.11}$$

はエネルギー・運動量テンソルで、

$$\Theta^\mu{}_\alpha := \frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\partial_\alpha\psi^A - \delta^\mu_\alpha\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}\Big] \tag{B.12}$$

は正準エネルギー・運動量テンソル[10]である。ただし、$\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}/\partial(\partial_\mu g_{\alpha\beta}) = 0$ を用いた。また、$[\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}]^\alpha_r$ は A^r_α に対する $[\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}]_A$ である。

---

[9] ラグランジアン密度が不変とは、(1.6) の $\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}$ が 0 という事である。

[10] これは (B.17) より分かるように、$\Theta^\mu{}_\alpha$ はテンソルの成分ではない。

物質の運動方程式 $[\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}]_A = 0$ を使うと、(B.5) は、

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}T^\mu{}_\nu) - \frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}\partial_\nu g_{\alpha\beta} = 0 \tag{B.13}$$

となる。これは、

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \tag{B.14}$$

と等価[11)]であり、エネルギー・運動量保存則を表す。また、(B.6), (B.7) は、

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\Theta^\mu{}_\nu + \sqrt{-g}T^\mu{}_\nu) = 0, \tag{B.15}$$

$$\sqrt{-g}\Theta^\mu{}_\nu + \sqrt{-g}T^\mu{}_\nu + \partial_\alpha\left[\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}}{\partial(\partial_{[\alpha}A^r_{\mu]})}A^r_\nu\right] = 0 \tag{B.16}$$

となる。ただし、(B.8) も用いた。この第 2 式より、

$$T^\mu{}_\nu = -\Theta^\mu{}_\nu - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha\left[\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}}{\partial(\partial_{[\alpha}A^r_{\mu]})}A^r_\nu\right] \tag{B.17}$$

を得る[12)] 。

ここで、平坦な時空を考えよう。このとき、

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0 = -\partial_\mu\Theta^\mu{}_\nu \tag{B.18}$$

である。よって、

$$E^\mu{}_\nu := \Theta^\mu{}_\nu + \partial_\alpha F^{[\alpha\mu]}{}_\nu \tag{B.19}$$

も

$$\partial_\mu E^\mu{}_\nu = 0 \tag{B.20}$$

を満たす。ただし、$F^{[\alpha\mu]}{}_\nu$ は α, μ に対して反対称な任意の量である。(B.17) の右辺第 2 項は、この $F^{[\alpha\mu]}{}_\nu$ に対応する。

---

11) この共変微分は、リーマン接続に対するものである。共変微分の定義と、$\begin{Bmatrix}\mu \\ \lambda\mu\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ より、

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T^\mu{}_\nu &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}T^\mu{}_\nu) - \begin{Bmatrix}\alpha \\ \nu\mu\end{Bmatrix}T^\mu{}_\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}T^\mu{}_\nu) - \frac{1}{2}\partial_\nu g_{\alpha\mu}T^{\mu\alpha}\end{aligned}$$

を得る。

12) $T^{\mu\nu}$ は対称だが、$\Theta^{\mu\nu}$ は一般には対称ではない。

B.2　全系のエネルギー・運動量保存則

重力場と「物質場」(物質場 (ディラック場とスカラー場) とゲージ場) からなる系を考える。全系のラグランジアン密度は、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}} \tag{B.21}$$

である。$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}}$ は重力場のラグランジアン密度[13)]で、$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}$ は「物質場」のそれである。「物質場」の組を $\{\psi^A\}$ と書き、これに多脚場 $\theta^a{}_\mu$ を加えたものを $\{\phi^A\}$ とかく。大域的な微小座標変換

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \tag{B.22}$$

で $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}}$ および $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}$ が不変だとする。この変換で場は変化しない。この時、運動方程式が成り立つところで、

$$\partial_\mu \boldsymbol{\Xi}^\mu{}_\nu = 0 \tag{B.23}$$

となる。これは Noether の第 1 定理 (1.24) である。ここで、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Xi}^\mu{}_\nu &= \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu \phi^A)}\partial_\nu \phi^A - \delta^\mu_\nu \boldsymbol{\mathcal{L}} \\ &= -\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu + \boldsymbol{\Theta}^\mu{}_\nu \end{aligned}\tag{B.24}$$

である。ここで、

$$\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu := -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}}}{\partial \partial_\mu \theta^a{}_\alpha}\partial_\nu \theta^a{}_\alpha + \delta^\mu_\nu \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}} \tag{B.25}$$

は、重力場のエネルギー擬テンソル密度と呼ばれ、

$$\boldsymbol{\Theta}^\mu{}_\nu := \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}}{\partial(\partial_\mu \psi^A)}\partial_\nu \psi^A + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}}{\partial(\partial_\mu \theta^a{}_\alpha)}\partial_\nu \theta^a{}_\alpha - \delta^\mu_\alpha \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}} \tag{B.26}$$

は正準エネルギー・運動量テンソル密度と呼ばれる。ここで、よって、(B.23) は、

$$\partial_\mu(-\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu + \boldsymbol{\Theta}^\mu{}_\nu) = 0 \tag{B.27}$$

である。よって、(1.4) の仮定の下で、

$$P_\mu := \int d^{D-1}x \ (\boldsymbol{t}^0{}_\mu - \boldsymbol{\Theta}^0{}_\mu) \tag{B.28}$$

は保存する。$(-P_0)$ はこの系の全エネルギーを表し、P_k は全運動量の直交積分を表す。

ここで、ディラック場はないとする。すると、(B.15) より、

$$\partial_\mu \boldsymbol{\Theta}^\mu{}_\nu = -\partial_\mu(\sqrt{-g}T^\mu{}_\nu) \tag{B.29}$$

である。よって、

$$\partial_\mu(\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu + \sqrt{-g}T^\mu{}_\nu) = 0 \tag{B.30}$$

13) $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}}$ は多脚場とその微分のみからなる (2 階微分を含まない) スカラーである。

が従う。また、ディラック場がないので、重力場のラグランジアン密度は、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2\kappa}\boldsymbol{G} := \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}G \tag{B.31}$$

と出来る。ただし、G は、

$$G = g^{\mu\nu}\Big[\begin{Bmatrix} \rho \\ \gamma\nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma \\ \mu\rho \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \rho \\ \gamma\rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \Big] \tag{B.32}$$

である。(B.22) に対して、場およびその微分が不変な事と、座標変換のヤコビアンが 1 である事から、上式の $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}}$ は不変である。また、エネルギー擬テンソル密度は、

$$\boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2\kappa}\Big[-\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial\partial_{\mu}g_{\alpha\beta}}\partial_{\nu}g_{\alpha\beta} + \boldsymbol{G}\delta^{\mu}_{\nu} \Big] \tag{B.33}$$

となる。この量は、1916 年にアインシュタインによって見付けられたので、アインシュタインのエネルギー擬テンソル密度 (または、energy complex) と呼ばれる。

References

[1] 内山龍雄『一般ゲージ場論序説』(岩波書店, 1987 年).

[2] 内山龍雄『一般相対性理論』(裳華房, 1978 年).

[3] Chiang-Mei Chen, J. M. Nester and Roh-Suan Tung, "Gravitational energy for GR and Poincaré gauge theories: a covariant Hamiltonian approach", Int. J. Mod. Phys. D **24**, 1530026 (2015).

[4] Y. Kaminaga, "Covariant Analytic Mechanics with Differential Forms and Its Application to Gravity", EJTP **9**, 199 (2012).