ガンマ行列とWickの定理

中嶋 慧

May 9, 2023

1 Wickの定理

$A_i(i=1,2,\cdots,n)$ は、

$$A_i = A_i^+ + A_i^- \tag{1.1}$$

と書け、A_i^+ は生成演算子の線形結合, A_i^- は消滅演算子の線形結合とする。このとき、正規積を、

$$N[A_1A_2\cdots A_n] := \sum_{B\in B_n} \varepsilon_{B,n} \prod_{i\in B} A_i^- \prod_{j\in N_n-B} A_j^+ \tag{1.2}$$

で定義する。ここで、$N_n=\{1,2,\cdots,n\}$ であり、B_n は N_n のべき集合であり、

$$B=\{i_1,\cdots,i_k\}, \quad i_\alpha < i_\beta(\alpha<\beta), \tag{1.3}$$

$$N_n - B=\{j_1,\cdots,j_{n-k}\}, \quad j_\alpha < j_\beta(\alpha<\beta) \tag{1.4}$$

と書くと、

$$\prod_{i\in B} A_i^- = A_{i_1}^- \cdots A_{i_k}^-, \tag{1.5}$$

$$\prod_{j\in N_n-B} A_j^+ = A_{j_1}^+ \cdots A_{j_{n-k}}^+ \tag{1.6}$$

であり、A_i がボソンなら $\varepsilon_{B,n}=1$ で、A_i がフェルミオンなら、

$$\varepsilon_{B,n} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1\cdots i_k j_1 & \cdots & j_{n-k}\end{pmatrix} \tag{1.7}$$

である。このとき、

$$A_1\cdots A_n = N[A_1\cdots A_n] + \sum_{p=1}^{[n/2]} \sum_{P\in p-\mathrm{pair}} N_P[A_1\cdots A_n] \tag{1.8}$$

である [1]。ここで、$N_P[A_1\cdots A_n]$ は、

$$N_P[A_1\cdots A_n] = N[(A_1\cdots A_n)\text{ からペア }P\text{ を除いたもの}] \times \prod C_{\text{ペア}} \tag{1.9}$$

である[1)] 。ここで、ペアを (i,j) $(i<j)$ とすると、

$$C_{(i,j)} = \begin{cases} [A_i^+, A_j^-] & \text{for ボソン} \\ \{A_i^+, A_j^-\} & \text{for フェルミオン} \end{cases} \tag{1.10}$$

である。

2　クリフォード代数への応用

今、

$$\{e_\mu, e_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}\,, \quad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\eta_1, \cdots, \eta_D)\,, \quad \eta_\mu = \pm 1 \tag{2.1}$$

を満たす量 $\{e_\mu\}_{\mu=1}^{D}$ を考える。さらに、

$$\{e_A, e_B\} = 2\eta_{AB}\,, \quad \eta_{AB} = \mathrm{diag}(\eta_1, \cdots, \eta_{2D})\,, \quad \eta_{D+\mu} = \eta_\mu \tag{2.2}$$

を満たす量 $\{e_A\}_{\mu=1}^{2D}$ を考え、

$$e_\mu^\pm := \frac{1}{2}(e_\mu \pm i e_{D+\mu}) \tag{2.3}$$

とすると、

$$\{e_\mu^+, e_\nu^+\} = \{e_\mu^-, e_\nu^-\} = 0, \tag{2.4}$$

$$\{e_\mu^+, e_\nu^-\} = \eta_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

となり、

$$e_\mu = e_\mu^+ + e_\mu^- \tag{2.6}$$

である。これで Wick の定理 (1.8) が使える。

ここで、

$$A(X_{\mu_1\cdots\mu_n}) := X_{[\mu_1\cdots\mu_n]} := \sum_{\sigma\in S_n} \frac{\mathrm{sgn}(\sigma)}{n!} X_{\mu_{\sigma(1)}\cdots\mu_{\sigma(n)}} \tag{2.7}$$

とすると、Wick の定理 (1.8) より、

$$A(e_{\mu_1}\ldots e_{\mu_n}) = N[A(e_{\mu_1}\ldots e_{\mu_n})] = A(N[e_{\mu_1}\ldots e_{\mu_n}]) \tag{2.8}$$

を得る。一方、

$$N[e_{\mu_1}\ldots e_{\mu_n}] = A(N[e_{\mu_1}\ldots e_{\mu_n}]) \tag{2.9}$$

[1)] フェルミオンの場合、“$(A_1\cdots A_n)$ からペア P を除いたもの” には符号が付くとする。符号は、ペアを作るときに飛び越えなければならない因子の数から決まる。例えば、$A_1A_2A_3$ からペア $(1,2)$ を除いたものは $+A_3$ であり、ペア $(1,3)$ を除いたものは $-A_2$ である。

が示せる。よって、

$$N[e_{\mu_1}\dots e_{\mu_n}] = A(e_{\mu_1}\dots e_{\mu_n}) =: e_{\mu_1\cdots\mu_n} \tag{2.10}$$

となる。
　これより、例えば、

$$e_\nu e_{\mu_1\cdots\mu_n} = e_{\nu\mu_1\cdots\mu_n} + n\eta_{\nu[\mu_1}e_{\mu_2\cdots\mu_n]}, \tag{2.11}$$

$$e_{\mu_1\cdots\mu_n}e_\nu = e_{\mu_1\cdots\mu_n\nu} + ne_{[\mu_1\cdots\mu_{n-1}}\eta_{\mu_n]\nu} \tag{2.12}$$

が得られる。
　また、

$$e_{\alpha\beta}e_{\mu\nu} = e_{\alpha\beta\mu\nu} - \eta_{\alpha\mu}e_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu}e_{\beta\mu} + \eta_{\beta\mu}e_{\alpha\nu} - \eta_{\beta\nu}e_{\alpha\mu} - \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu} \tag{2.13}$$

も得られる。よって、$G_{\alpha\beta} := e_{\alpha\beta}/2$ に対して、

$$[G_{\alpha\beta}, G_{\mu\nu}] = \eta_{\alpha\nu}G_{\beta\mu} - \eta_{\alpha\mu}G_{\beta\nu} - \eta_{\beta\nu}G_{\alpha\mu} + \eta_{\beta\mu}G_{\alpha\nu} \tag{2.14}$$

を得る。従って、$G_{\alpha\beta}$ は $\mathrm{SO}(p,q)$ の生成子の表現である。ここで、p, q はそれぞれ、$\eta_1,\cdots,\eta_D$ の中の $+1$, -1 の個数である。

References

[1] http://physicalpaprika.sakura.ne.jp/physics/Wick_theorem.pdf