ハウスドルフ公式と $su(1,1)$, $su(2)$ の公式

中嶋 慧

2020 年 2 月 7 日

目 次

1　ハウスドルフ公式の導出

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^Ae^B \qquad \text{for} \quad \big[A,[A,B]\big] = \big[B,[A,B]\big] = 0 \tag{1.1}$$

を示す。

$U(x)$ を

$$e^{x(A+B)} = U(x)e^{xB} \tag{1.2}$$

で定義する。ただし、x は実数パラメーターである。これを x で微分すると、

$$e^{x(A+B)}(A+B) = U'(x)e^{xB} + U(x)e^{xB}B \tag{1.3}$$

となる。ここで、$' \equiv \frac{d}{dx}$ である。(1.3) に (1.2) を代入して、

$$\begin{aligned} U(x)e^{xB}(A+B) &= U'(x)e^{xB} + U(x)e^{xB}B, \\ U(x)e^{xB}A &= U'(x)e^{xB}, \\ U'(x) &= U(x)e^{xB}Ae^{-xB} \\ &\equiv U(x)f(x) \end{aligned} \tag{1.4}$$

を得る。ただし、

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{xB}Ae^{-xB} \tag{1.5}$$

である。(1.4) を積分して

$$U(x) = U(0) + \int_0^x dy_1\, U(y_1)f(y_1) \tag{1.6}$$

を得る。(1.2) より

$$U(0) = 1 \tag{1.7}$$

である。(1.6) の右辺の $U(y_1)$ に (1.6) の右辺全体を代入し、この操作を繰り返して、

$$\begin{aligned} U(x) &= 1 + \int_0^x dy_1\, U(y_1) f(y_1) \\ &= 1 + \int_0^x dy_1\, f(y_1) + \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2\, U(y_2) f(y_2) f(y_1) \\ &= 1 + \int_0^x dy_1\, f(y_1) + \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2\, f(y_2) f(y_1) + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \cdots \int_0^{y_{n-1}} dy_n\, f(y_n) f(y_{n-1}) \cdots f(y_1) \end{aligned} \tag{1.8}$$

を得る。

$f(x)$ を求める。(1.5) を x で微分して、

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{xB} B A e^{-xB} - e^{xB} A B e^{-xB} \\ &= e^{xB} [B, A] e^{-xB} \end{aligned} \tag{1.9}$$

を得る。さらに、x で微分して、

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{xB} B [B, A] e^{-xB} - e^{xB} [B, A] B e^{-xB} \\ &= e^{xB} \big[B, [B, A]\big] e^{-xB} \end{aligned} \tag{1.10}$$

となる。もし、

$$\big[B, [B, A]\big] = 0 \tag{1.11}$$

であるなら、

$$f''(x) = 0 \tag{1.12}$$

となる。また、(1.5), (1.9) より、

$$f(0) = A, \tag{1.13}$$

$$f'(0) = [B, A] \tag{1.14}$$

である。この初期条件の下で (1.12) を解いて、

$$f(x) = A - [A, B] x \qquad \text{for} \quad \big[B, [B, A]\big] = 0 \tag{1.15}$$

を得る。

さて、もし、

$$\big[A, [A, B]\big] = 0 \tag{1.16}$$

であれば、$f(x)$ と $f(x')$ とは可換である。よって、(1.8) の和の中身は、

$$\int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \cdots \int_0^{y_{n-1}} dy_n\, f(y_n) f(y_{n-1}) \cdots f(y_1) = \frac{1}{n!} \Big[\int_0^x dy\ f(y) \Big]^n \tag{1.17}$$

となり、

$$\begin{aligned} U(x) &= \exp\Big(\int_0^x dy\ f(y)\Big) \\ &= \exp\Big(Ax - \frac{1}{2}[A,B]x^2\Big) \end{aligned} \tag{1.18}$$

を得る。これを (1.2) に代入して、

$$\begin{aligned} e^{x(A+B)} &= \exp\Big(Ax - \frac{1}{2}[A,B]x^2\Big)e^{xB} \\ &= \exp\Big(-\frac{1}{2}[A,B]x^2\Big)e^{xA}e^{xB} \end{aligned} \tag{1.19}$$

を得る。ただし、第 2 等号で A と $[A,B]$ とが可換であることを用いた。この式で $x=1$ として、

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^Ae^B \qquad \text{for} \quad \big[A,[A,B]\big] = \big[B,[A,B]\big] = 0 \tag{1.20}$$

を得る。

2　$su(1,1)$, $su(2)$ の公式の導出

$su(1,1)$, $su(2)$ の生成子は、

$$
\begin{aligned}
[S_-, S_+] &= 2\sigma S_z, &(2.1)\\
[S_-, S_z] &= S_-, &(2.2)\\
[S_+, S_z] &= -S_+ &(2.3)
\end{aligned}
$$

を満たす。$\sigma = 1$ が $su(1,1)$, $\sigma = -1$ が $su(2)$ に対応する。今、

$$
\begin{aligned}
e^{x(A_z S_z + A_- S_- + A_+ S_+)} &\equiv e^{f_+(x) S_+} F(x), &(2.4)\\
F(0) &= 1\,, \quad f_+(0) = 0 &(2.5)
\end{aligned}
$$

とおく。これを微分して、

$$
(A_z S_z + A_- S_- + A_+ S_+) e^{f_+(x) S_+} F(x) \;=\; f'_+(x) S_+ F(x) + e^{f_+(x) S_+} F'(x)
$$

$F'(x)$ について解いて、

$$
F'(x) \;=\; [A_+ - f'_+(x)] S_+ F(x) + e^{-f_+(x) S_+} (A_z S_z + A_- S_-) e^{f_+(x) S_+} F(x) \tag{2.6}
$$

を得る。今、

$$
t_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-f_+(x) S_+} S_i e^{f_+(x) S_+} \tag{2.7}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
t'_-(x) &= -e^{-f_+(x) S_+} f'_+(x) S_+ S_- e^{f_+(x) S_+} + e^{-f_+(x) S_+} S_- f'_+(x) S_+ e^{f_+(x) S_+}\\
&= f'_+(x) e^{-f_+(x) S_+} [S_-, S_+] e^{f_+(x) S_+}\\
&= f'_+(x) e^{-f_+(x) S_+} 2\sigma S_z e^{f_+(x) S_+}\\
&\equiv 2\sigma f'_+(x) t_z(x) &(2.8)
\end{aligned}
$$

である。ただし、第 3 等号で (2.1) を用いた。また、

$$
\begin{aligned}
t'_z(x) &= f'_+(x) e^{-f_+(x) S_+} [S_z, S_+] e^{f_+(x) S_+}\\
&= f'_+(x) e^{-f_+(x) S_+} S_+ e^{f_+(x) S_+}\\
&= f'_+(x) S_+ &(2.9)
\end{aligned}
$$

である。第 2 等号で (2.3) を用いた。ところで、

$$
t_-(0) = S_-\,, \quad t_z(0) = S_z \tag{2.10}
$$

である。(2.9) をこの初期条件の下で解くと、

$$
t_z(x) = S_z + f_+(x) S_+ \tag{2.11}
$$

となる。これを (2.8) に代入して

$$
\begin{aligned}
t'_-(x) &= 2\sigma f'(x) [S_z + f_+(x) S_+]\\
&= \sigma \frac{d}{dx} [2 f_+(x) S_z + f_+^2(x) S_+] &(2.12)
\end{aligned}
$$

を得る。これを初期条件 (2.10) の下で解いて、

$$t_-(x) = S_- + 2\sigma f_+(x) S_z + \sigma f_+^2(x) S_+ \tag{2.13}$$

を得る。(2.6) は、

$$\begin{aligned} F'(x) &= [A_+ - f'_+(x)] S_+ F(x) + [A_z S_z + A_z f_+(x) S_+ + A_- S_- + 2\sigma A_- f_+(x) S_z + \sigma A_- f_+^2(x) S_+] F(x) \\ &= [A_+ - f'_+(x) + A_z f_+(x) + \sigma A_- f_+^2(x)] S_+ F(x) + [A_z S_z + A_- S_- + 2\sigma A_- f_+(x) S_z] F(x) \end{aligned} \tag{2.14}$$

となる。今、

$$A_+ - f'_+(x) + A_z f_+(x) + \sigma A_- f_+^2(x) = 0 \tag{2.15}$$

とすると、(2.14) は、

$$F'(x) = [A_z S_z + A_- S_- + 2\sigma A_- f_+(x) S_z] F(x) \tag{2.16}$$

となる。(2.15) を (2.5) の初期条件の下に解く。

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'_+(x)} = \frac{dx}{df_+} &= \frac{1}{A_+ + A_z f_+(x) + \sigma A_- f_+^2(x)}, \\ x &= \int_0^{f_+(x)} \frac{df}{A_+ + A_z f + \sigma A_- f^2}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

今、

$$A_+ + A_z f + \sigma A_- f^2 = A_-(f-\alpha)(f-\beta) \quad , \tag{2.18}$$

$$\alpha, \beta = \frac{-A_z \pm \sqrt{A_z^2 - 4\sigma A_- A_+}}{2A_-} \tag{2.19}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \int_0^{f_+(x)} \frac{df}{A_+ + \sigma A_z f + A_- f^2} &= \frac{1}{A_-(\alpha-\beta)} \int_0^{f_+(x)} df \left(\frac{1}{f-\alpha} - \frac{1}{f-\beta} \right) \\ &= \frac{1}{A_-(\alpha-\beta)} \left(\ln \frac{f_+(x)-\alpha}{-\alpha} - \ln \frac{f_+(x)-\beta}{-\beta} \right) \\ &= \frac{1}{A_-(\alpha-\beta)} \ln [\frac{f_+(x)-\alpha}{f_+(x)-\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

これと (2.17) より、

$$\begin{aligned} e^{xA_-(\alpha-\beta)} &= \frac{f_+(x)-\alpha}{f_+(x)-\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}, \\ f_+(x) &= \beta \frac{e^{xA_-(\alpha-\beta)} - 1}{e^{xA_-(\alpha-\beta)} - \beta/\alpha} \end{aligned} \tag{2.21}$$

を得る。これは、次のようにも書ける：

$$
\begin{aligned}
f_+(x) &= \beta \frac{e^{xA_-(\alpha-\beta)/2} - e^{-xA_-(\alpha-\beta)/2}}{e^{xA_-(\alpha-\beta)/2} - \beta/\alpha e^{-xA_-(\alpha-\beta)/2}} \\
&= \frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta} \frac{\sinh \frac{A_-(\alpha-\beta)x}{2}}{\cosh \frac{A_-(\alpha-\beta)x}{2} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \sinh \frac{A_-(\alpha-\beta)x}{2}} \\
&= \frac{A_-\alpha\beta}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) + \frac{A_-(\alpha+\beta)}{2\phi} \sinh(\phi x)} \\
&= \frac{A_+}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi} \sinh(\phi x)}, \qquad (2.22) \\
\phi &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_-(\alpha-\beta)}{2} = \sqrt{A_z^2/4 - \sigma A_- A_+}. \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

今、

$$
\begin{aligned}
F(x) &= e^{f_z(x)S_z} G(x), \qquad (2.24) \\
G(0) &= 1, \quad f_z(0) = 0 \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

とおく。これを微分し、(2.16) を代入すると、

$$
[A_z S_z + A_- S_- + 2\sigma A_- f_+(x) S_z] e^{f_z(x)S_z} G(x) = f_z'(x) S_z e^{f_z(x)S_z} G(x) + e^{f_z(x)S_z} G'(x)
$$

となり、これから、

$$
G'(x) = [A_z + 2\sigma A_- f_+(x) - f_z'(x)] S_z G(x) + A_- e^{-f_z(x)S_z} S_- e^{f_z(x)S_z} G(x) \qquad (2.26)
$$

を得る。ここで、

$$
u_-(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-f_z(x)S_z} S_- e^{f_z(x)S_z} \qquad (2.27)
$$

を導入すると、

$$
\begin{aligned}
u_-'(x) &= f_z'(x) e^{-f_z(x)S_z} [S_-, S_z] e^{f_z(x)S_z} \\
&= f_z'(x) e^{-f_z(x)S_z} S_- e^{f_z(x)S_z} \\
&= f_z'(x) u_-(x) \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

である。ただし、第 2 等号で、(2.2) を用いた。これを初期条件

$$
u_-(0) = S_- \qquad (2.29)
$$

の下で解くと、

$$
u_-(x) = e^{f_z(x)} S_-
$$

すなわち、

$$
e^{-f_z(x)S_z} S_- e^{f_z(x)S_z} = e^{f_z(z)} S_- \qquad (2.30)
$$

を得る。(2.26) は、

$$
G'(x) = [A_z + 2\sigma A_- f_+(x) - f_z'(x)] S_z G(x) + A_- e^{f_z(z)} S_- G(x) \qquad (2.31)
$$

となる。今、

$$A_z + 2\sigma A_- f_+(x) - f_z'(x) = 0 \tag{2.32}$$

とすると、(2.31) は、

$$G'(x) \;=\; A_- e^{f_z(x)} S_- G(x) \tag{2.33}$$

となる。(2.32),(2.25),(2.22) より、

$$\begin{aligned}
f_z(x) \;&=\; A_z x + 2\sigma A_- \int_0^x dy\, f_+(y) \\
&=\; A_z x + \frac{1}{\phi}\int_0^x dy\, \frac{2\sigma A_- A_+ \sinh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)} \\
&=\; \frac{1}{\phi}\int_0^x dy \left[\phi A_z + \frac{2\sigma A_- A_+ \sinh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)}\right] \\
&=\; \frac{1}{\phi}\int_0^x dy\, \frac{2[\sigma A_- A_+ - \sigma A_z^2/4]\sinh(\phi y) + \phi A_z \cosh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)} \\
&=\; \int_0^x dy\, \frac{-2\phi\sinh(\phi y) + A_z\cosh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)} \\
&=\; -2\int_0^x dy\, \frac{1}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)} \frac{d}{dy}[\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)] \\
&=\; -2\ln[\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)] + 2\ln[\cosh(0) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(0)] \\
&=\; -2\ln[\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)]
\end{aligned} \tag{2.34}$$

となる。(2.33),(2.25) より、

$$G(x) \;=\; e^{f_-(x) S_-}, \tag{2.35}$$

$$f_-(x) \;=\; A_- \int_0^x dy\, e^{f_z(y)} \tag{2.36}$$

であり、(2.34) より、

$$f_-(x) \;=\; A_- \int_0^x \frac{dy}{[\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)]^2} \tag{2.37}$$

である。今、

$$u = e^{\phi y} \tag{2.38}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
dy \;&=\; \frac{du}{\phi u}, \\
\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y) \;&=\; \frac{2\phi - A_z}{4\phi}u + \frac{2\phi + A_z}{4\phi}u^{-1}
\end{aligned}$$

なので、

$$
\begin{aligned}
f_-(x) &= A_- \int_1^{u(x)} \frac{du}{\phi u} \frac{u^2}{[\frac{2\phi - A_z}{4\phi} u^2 + \frac{2\phi + A_z}{4\phi}]^2} \\
&= A_- \int_1^{u(x)} du \, \frac{16\phi u}{[(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z]^2} \\
&= A_- \int_1^{u(x)} du \, \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \frac{1}{[(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z]^2} \frac{d}{dy}[(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z] \\
&= -A_- \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \frac{1}{(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z}\Big|_1^{u(x)} \\
&= -A_- \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \Big(\frac{1}{(2\phi - A_z)u^2(x) + 2\phi + A_z} - \frac{1}{4\phi} \Big) \\
&= -A_- \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \frac{4\phi - (2\phi - A_z)u^2(x) - 2\phi - A_z}{[(2\phi - A_z)u^2(x) + 2\phi + A_z] \cdot 4\phi} \\
&= \frac{2A_-}{2\phi - A_z} \frac{(2\phi - A_z)u^2(x) - 2\phi + A_z}{(2\phi - A_z)u^2(x) + 2\phi + A_z} \\
&= \frac{2A_-}{2\phi - A_z} \frac{(2\phi - A_z)e^{\phi x} - (2\phi - A_z)e^{-\phi x}}{(2\phi - A_z)e^{\phi x} + (2\phi + A_z)e^{-\phi x}} \\
&= 2A_- \frac{\sinh(\phi x)}{2\phi \cosh(\phi x) - A_z \sinh(\phi x)} \\
&= \frac{A_-}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi} \sinh(\phi x)} \qquad (2.39)
\end{aligned}
$$

となる。まとめると、

$$
\begin{aligned}
e^{x(A_z S_z + A_- S_- + A_+ S_+)} &= e^{f_+(x) S_+} e^{f_z(x) S_z} e^{f_-(x) S_-}, && (2.40) \\
f_+(x) &= \frac{A_+}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi} \sinh(\phi x)}, && (2.41) \\
f_z(x) &= -2 \ln[\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi} \sinh(\phi x)], && (2.42) \\
f_-(x) &= \frac{A_-}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi} \sinh(\phi x)}, && (2.43) \\
\phi &= \sqrt{A_z^2/4 - \sigma A_- A_+} && (2.44)
\end{aligned}
$$

である。

2.1 応用

正準交換関係

$$
[a, a^\dagger] = 1, \quad [b, b^\dagger] = 1 \qquad (2.45)
$$

を満たす (これ以外の交換関係は 0 である) 生成・消滅演算子に対して、

$$
S_+ \stackrel{\text{def}}{=} b^\dagger a^\dagger, \quad S_- \stackrel{\text{def}}{=} ab, \quad S_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(aa^\dagger + b^\dagger b) \qquad (2.46)
$$

を定義する。これらの交換関係は (2.1) から (2.3) で $\sigma = 1$ としたものを満たす。上の公式から、

$$
e^{\theta(b^\dagger a^\dagger - ab)} = e^{a^\dagger b^\dagger \tanh\theta} e^{-(aa^\dagger + b^\dagger b)\ln\cosh\theta} e^{-ab\tanh\theta} \qquad (2.47)
$$

を得る。