平坦時空での重力2

中嶋 慧

May 7, 2023

Abstract

まずファインマンの重力理論 [1] を解説する。§5 ではラグランジアン密度を見付ける別の方法を解説する。§6 では Deser の議論を紹介する。

Contents

1　質点の運動方程式

1.1　設定

ミンコフスキー時空について考える。つまり、計量テンソルは、

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \tag{1.1}$$

であるとする。重力場は 2 階対称テンソル $h_{\mu\nu}$ であると考える [1]。
質点系と重力場の合成系の作用は以下であると仮定する:

$$S = S_{\text{particle}} + S_{\text{int}} + S_{\text{Gravity}}, \tag{1.2}$$

$$S_{\text{particle}} = \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\lambda_a \left[e_a(\lambda_a)\eta_{\mu\nu}\frac{dz_a^\mu}{d\lambda_a}\frac{dz_a^\nu}{d\lambda_a} - \frac{c^2}{e(\lambda_a)} \right], \tag{1.3}$$

$$S_{\text{int}} = \sum_a \frac{g_a}{2} \int d\lambda_a \ e_a(\lambda_a)h_{\mu\nu}(z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\lambda_a}\frac{dz_a^\nu}{d\lambda_a}. \tag{1.4}$$

m_a は質量で、g_a は結合定数である。e_a は補助場で、λ_a はパラメーターである[1)] 。重力場の作用 S_{Gravity} は後で決定する。パラメーターの変換で e_a は 1 とできる。e_a が 1 となるパラメーターを τ_a とすると、

$$S_{\text{particle}} = \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\tau_a \left[\eta_{\mu\nu}\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} - c^2 \right], \tag{1.5}$$

$$S_{\text{int}} = \sum_a \frac{g_a}{2} \int d\tau_a \ h_{\mu\nu}(z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\tau}{d\tau_a}. \tag{1.6}$$

を得る。S_{particle} の第 2 項は変分に効かないので、以下では落とし、それを $\tilde{S}_{\text{particle}}$ とする。

1.2　作用原理

質点についての作用は、

$$S_p := \tilde{S}_{\text{particle}} + S_{\text{int}} = \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\tau_a \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{g_a}{m_a}h_{\mu\nu}(z_a) \right)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \tag{1.7}$$

である。今、

$$g_{\mu\nu}^{(a)} := \eta_{\mu\nu} + \frac{g_a}{m_a}h_{\mu\nu} \tag{1.8}$$

とすると、

$$S_p = \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\tau_a \ g_{\mu\nu}^{(a)}(z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \tag{1.9}$$

---

1) $\lambda_a \to \lambda'_a$ で、$e_a \to e'_a = \frac{d\lambda'_a}{d\lambda_a}e_a$ である。

であり、

$$
\begin{aligned}
\delta S_p &= \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\tau_a \ \Big(\delta g^{(a)}_{\mu\nu}(z_a) \frac{dz^\mu_a}{d\tau_a} \frac{dz^\nu_a}{d\tau_a} + 2 g^{(a)}_{\mu\nu}(z_a) \frac{d\delta z^\mu_a}{d\tau_a} \frac{dz^\nu_a}{d\tau_a} \Big) \\
&= \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\tau_a \ \delta z^\lambda_a \Big(\partial_\lambda g^{(a)}_{\mu\nu}(z_a) \frac{dz^\mu_a}{d\tau_a} \frac{dz^\nu_a}{d\tau_a} - \frac{d}{d\tau_a} \big[2 g^{(a)}_{\lambda\nu}(z_a) \frac{dz^\nu_a}{d\tau_a} \big] \Big) \\
&= \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\tau_a \ \delta z^\lambda_a \Big(\partial_\lambda g^{(a)}_{\mu\nu}(z_a) \frac{dz^\mu_a}{d\tau_a} \frac{dz^\nu_a}{d\tau_a} - 2 \partial_\mu g^{(a)}_{\lambda\nu}(z_a) \frac{dz^\mu_a}{d\tau_a} \frac{dz^\nu_a}{d\tau_a} - 2 g^{(a)}_{\lambda\nu}(z_a) \frac{d^2 z^\nu_a}{d\tau_a^2} \Big) \\
&= \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\tau_a \ \delta z^\lambda_a \cdot (-2) \Big(\frac{1}{2} \big[- \partial_\lambda g^{(a)}_{\mu\nu} + \partial_\mu g^{(a)}_{\lambda\nu} + \partial_\nu g^{(a)}_{\lambda\mu} \big] \frac{dz^\mu_a}{d\tau_a} \frac{dz^\nu_a}{d\tau_a} + g^{(a)}_{\lambda\nu}(z_a) \frac{d^2 z^\nu_a}{d\tau_a^2} \Big)
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

となる。よって、

$$
g^{(a)}_{\lambda\nu}(z_a) \frac{d^2 z^\nu_a}{d\tau_a^2} + \frac{1}{2} \big[- \partial_\lambda g^{(a)}_{\mu\nu} + \partial_\mu g^{(a)}_{\lambda\nu} + \partial_\nu g^{(a)}_{\lambda\mu} \big] \frac{dz^\mu_a}{d\tau_a} \frac{dz^\nu_a}{d\tau_a} = 0 \tag{1.11}
$$

を得る。これは、

$$
\Big(\eta_{\lambda\nu} + \frac{g_a}{m_a} h_{\lambda\nu}(z_a) \Big) \frac{d^2 z^\nu_a}{d\tau_a^2} + \frac{1}{2} \frac{g_a}{m_a} \big[- \partial_\lambda h_{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} \big] \frac{dz^\mu_a}{d\tau_a} \frac{dz^\nu_a}{d\tau_a} = 0 \tag{1.12}
$$

である。

ところで、等価原理より、

$$
\frac{g_a}{m_a} = 1 \tag{1.13}
$$

である [3]。よって、

$$
g_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.14}
$$

とすると、

$$
g_{\lambda\nu}(z_a) \frac{d^2 z^\nu_a}{d\tau_a^2} + \frac{1}{2} \big[- \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} \big] \frac{dz^\mu_a}{d\tau_a} \frac{dz^\nu_a}{d\tau_a} = 0 \tag{1.15}
$$

である。今、

$$
\Gamma_{\lambda\mu\nu} := \frac{1}{2} \big[- \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} \big] \tag{1.16}
$$

と置くと、

$$
g_{\lambda\nu}(z_a) \frac{d^2 z^\nu_a}{d\tau_a^2} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}(z_a) \frac{dz^\mu_a}{d\tau_a} \frac{dz^\nu_a}{d\tau_a} = 0 \tag{1.17}
$$

である。

1.3 パラメーターの同定

ところで、

$$C(\tau) := g_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} \tag{1.18}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\frac{dC}{d\tau} &= \partial_\lambda g_{\mu\nu}\frac{dz^\lambda}{d\tau}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} + 2g_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{d^2z^\nu}{d\tau^2} \\ &= \partial_\lambda g_{\mu\nu}\frac{dz^\lambda}{d\tau}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} - 2\Gamma_{\mu\lambda\nu}(z_a)\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\lambda}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} \\ &= 0\end{aligned} \tag{1.19}$$

である。よって、C は定数である。τ は、

$$g_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} = -c^2 \tag{1.20}$$

を満たす。これは、$e(\tau)$ についてのオイラー・ラグランジュ方程式とも一致する。このとき、

$$S_{\text{particle}} + S_{\text{int}} = -\sum_a m_a c^2 \int d\tau_a \tag{1.21}$$

となる。

2 エネルギー・運動量テンソル

今、

$$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}(x) := \sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x - z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \tag{2.1}$$

とすると、

$$S_{\text{int}} = \int d^4x\ \frac{1}{2}h_{\mu\nu}(x)\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}(x) \tag{2.2}$$

となる。$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}$ は質点系のエネルギー・運動量テンソルである。
ところで、

$$\begin{aligned}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} &= \sum_a m_a \int d\tau_a\ \partial_\nu \delta^4(x - z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \\ &= \sum_a m_a \int d\tau_a\ (-1)\frac{d\delta^4(x - z_a)}{d\tau_a}\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a} \\ &= \sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x - z_a)\frac{d^2 z_a^\mu}{d\tau_a^2}\end{aligned} \tag{2.3}$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} &= \sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x-z_a) g_{\lambda\mu}(z_a)\frac{d^2 z_a^\mu}{d\tau_a^2} \\
&= \sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x-z_a)\Big[-\Gamma_{\lambda\mu\nu}(z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a}\Big] \\
&= -\Gamma_{\lambda\mu\nu}(x)\sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x-z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \\
&= -\Gamma_{\lambda\mu\nu}(x)\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}(x)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

となる。質点の運動方程式 (1.17) を用いた。整理すると、

$$
g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} \tag{2.5}
$$

である。

質点と重力場と、ゲージ場などのその他の場との合成系のラグランジアン密度を、

$$
S_{\mathrm{tot}} = S_{\mathrm{particle}} + \int d^4x\ \frac{1}{2}h_{\mu\nu}(x)\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}(x) + S_{\mathrm{Gravity}} + S_{\mathrm{matter}} \tag{2.6}
$$

とする。S_{matter} の $h_{\mu\nu}$ についての変分を、

$$
\delta S_{\mathrm{matter}} = \int d^4x\ \delta h_{\mu\nu}(x)\frac{1}{2}\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{m})} \tag{2.7}
$$

で定義し、

$$
\boldsymbol{T}^{\mu\nu} := \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} + \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{m})} \tag{2.8}
$$

と置く。$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}$ も (2.5) を満たすと仮定する：

$$
g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{T}^{\mu\nu}. \tag{2.9}
$$

3　重力場の作用：低次からの構成

3.1　一般論

重力場の作用を

$$
S_{\mathrm{Gravity}} = \sum_{n=2}^{\infty} S^{(n)}, \quad S^{(n)} = \int d^4x\ \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(n)} \tag{3.1}
$$

と展開する。ここで、$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(n)}$ は $h_{\mu\nu}$ の n 次の項からなる。$h_{\mu\nu}$ による変分を、

$$
\delta S^{(n+1)} = -\frac{1}{2}\int d^4x\ \delta h_{\mu\nu}\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} \tag{3.2}
$$

と置く。ただし、

$$\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)} = 0 \tag{3.3}$$

を要請する。運動方程式は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} = \boldsymbol{T}^{\mu\nu} \tag{3.4}$$

である。よって、

$$\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)} = \partial_\nu(\boldsymbol{T}^{\mu\nu} - \sum_{n=2}^{\infty} \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)}) = 0 \tag{3.5}$$

となる。(2.9) は、

$$g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{T}^{\mu\nu} \tag{3.6}$$

であった。よって、

$$g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} \tag{3.7}$$

である。これと (3.5) より、

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} + (\eta_{\lambda\mu} + h_{\lambda\mu})\sum_{n=2}^{\infty} \partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} = 0 \tag{3.8}$$

を得る。よって、

$$\eta_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(2)} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)}, \tag{3.9}$$

$$\eta_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n+1)} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} - h_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} \quad (n = 2, 3, \cdots) \tag{3.10}$$

を得る。

(3.3) と (3.4) とから $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}$ が決まる。次に (3.9) から $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ が決まる。そして、(3.10) から $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(4)}$, $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(5)}, \cdots$ が決まる。

$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}$ の候補は、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)} = \frac{1}{2}\Big[a_1\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\mu\nu}\partial_\beta h^{\mu\nu} + a_2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^\sigma{}_\nu + a_3\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h + a_4\eta^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h\Big] \tag{3.11}$$

である。ここで、

$$h := h^\mu{}_\mu \tag{3.12}$$

である。$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ は§3.3 で考察する。$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ には素朴には 4!=24 項からなるが、8 組同じものがある。更に部分積分により、16 種類の項の間に 2 つの関係式が存在する。よって独立なのは 14 項である。明らかに $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ ぐらいまでが限界で、$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(4)}$ より高次の項を求めるのは困難である。

3.2 最低次のラグランジアン密度

(3.11) の a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ を決定する。
まず、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)} &= 2a_1\Box h^{\mu\nu} + a_2(\partial^\mu\partial_\sigma h^{\sigma\nu} + \partial^\nu\partial_\sigma h^{\sigma\mu}) \\ &\quad + a_3(\partial^\mu\partial^\nu h + \eta^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}) + 2a_4\eta^{\mu\nu}\Box h \end{aligned} \tag{3.13}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\partial_\nu\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)} &= 2a_1\Box(\partial h)^\mu + a_2(\partial^\mu(\partial\partial h) + \Box(\partial h)^\mu) \\ &\quad + a_3(\partial^\mu\Box h + \partial^\mu(\partial\partial h)) + 2a_4\partial^\mu\Box h, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$(\partial h)^\mu := \partial_\nu h^{\mu\nu}\,, \quad (\partial\partial h) := \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} \tag{3.15}$$

となる。これより、

$$2a_1 + a_2 = 0, \tag{3.16}$$

$$a_2 + a_3 = 0, \tag{3.17}$$

$$a_1 + a_4 = 0 \tag{3.18}$$

を得る。これより、

$$a_2 = -2a_1\,, \quad a_3 = 2a_1\,, \quad a_4 = -a_1 \tag{3.19}$$

と分かる：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)} &= 2a_1\Big[\Box h^{\mu\nu} - (\partial^\mu\partial_\sigma h^{\sigma\nu} + \partial^\nu\partial_\sigma h^{\sigma\mu}) \\ &\quad + (\partial^\mu\partial^\nu h + \eta^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}) - \eta^{\mu\nu}\Box h\Big], \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)} = a_1\Big[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\mu\nu}\partial_\beta h^{\mu\nu} - \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^\sigma{}_\nu + \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h\Big]. \tag{3.21}$$

なお、

$$a_1 = -\frac{1}{4\kappa} \tag{3.22}$$

である。

3.3 $h_{\mu\nu}$ の 3 次のラグランジアン密度

$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ を考える。今、

$$(i_1 i_2 i_3 i_4) := h^{\mu_{i_1}}{}_{\mu_1}\partial_{\mu_2} h^{\mu_{i_2}}{}_{\mu_3}\partial^{\mu_{i_3}} h^{\mu_{i_4}}{}_{\mu_4} \tag{3.23}$$

とする。ここで、$i_k = 1, 2, 3, 4$ であり、$i_k \neq i_l (k \neq l)$ である。$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ は、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)} = \sum_{(i_1, i_2, i_3, i_4)\in S_4} g_{(i_1 i_2 i_3 i_4)}(i_1 i_2 i_3 i_4) \tag{3.24}$$

と 24 項で書ける。S_4 は 4 次の置換群である。ただし、

$$(1342) = (1234)\,, \quad (3214) = (2341)\,, \quad (3412) = (2431)\,, \quad (4213) = (2143), \tag{3.25}$$

$$(4123) = (3421)\,, \quad (4231) = (3142)\,, \quad (4312) = (2134)\,, \quad (4321) = (3124) \tag{3.26}$$

の関係があるので、16 項に減らせる。よって、一般の形は、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)} &= g_1 h\partial_\alpha h\partial^\alpha h + g_2 h\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial^\gamma h_{\alpha\beta} + g_3 h\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\gamma{}_\alpha + g_4 h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h\partial^\beta h \\
&\quad + g_5 h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^\delta{}_\gamma\partial^\beta h^\gamma{}_\delta + g_6 h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\beta{}_\delta + g_7 h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\alpha\delta}\partial^\gamma h^\beta{}_\delta + g_8 h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\alpha\delta}\partial_\delta h^{\beta\gamma} \\
&\quad + g_9 h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h\partial^\alpha h^{\beta\gamma} + g_{10} h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h\partial^\gamma h^{\alpha\beta} + g_{11} h(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h + g_{12} h_{\alpha\beta}\partial^\beta h^{\alpha\gamma}(\partial h)_\gamma \\
&\quad + g_{13} h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h(\partial h)^\beta + g_{14} h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}(\partial h)^\gamma + g_{15} h(\partial h)_\alpha(\partial h)^\alpha + g_{16} h_{\alpha\beta}(\partial h)^\alpha(\partial h)^\beta \\
&\equiv \sum_{i=1}^{16} g_i[i]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

である。ここで、

$$(\partial h)^\alpha := \partial_\beta h^{\beta\alpha} \tag{3.28}$$

である。また、

$$(\partial\partial h) := \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} \tag{3.29}$$

とする。以下、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(2)} &:= -2\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}}{\partial h_{\mu\nu}} - \partial_\lambda\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}}{\partial(\partial_\lambda h_{\mu\nu})}\Big) \\
&\equiv \sum_{i=1}^{16} g_i\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[i]}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

を求め、次に

$$(\partial\boldsymbol{\chi}_{[i]})_\mu := \eta_{\lambda\mu}\partial_\nu\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[i]} \tag{3.31}$$

を求める。(3.9) は、

$$\sum_{i=1}^{16} g_i(\partial\boldsymbol{\chi}_{[i]})_\mu = -\Gamma_{\mu\alpha\beta}\boldsymbol{\chi}^{\alpha\beta}_{(1)} \equiv V_\mu \tag{3.32}$$

であり、

$$\boldsymbol{\chi}^{\alpha\beta}_{(1)} = 4\mathfrak{g}\big[-\Box h^{\alpha\beta} + \partial^\alpha(\partial h)^\beta + \partial^\beta(\partial h)^\alpha - \partial^\beta\partial^\alpha h + \eta^{\alpha\beta}\Box h - \eta^{\alpha\beta}(\partial\partial h)\big], \tag{3.33}$$

$$\mathfrak{g} := \frac{1}{8\kappa} \tag{3.34}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
V_\mu/\mathfrak{g} &= -2\partial_\mu h_{\alpha\beta}\Box h^{\alpha\beta} + 4\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\alpha(\partial h)^\beta - 2\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\beta\partial^\alpha h \\
&\quad + 2\partial_\mu h\Box h - 2\partial_\mu h(\partial\partial h) \\
&\quad + 4\partial_\alpha h_{\mu\beta}\Box h^{\alpha\beta} - 4\partial_\alpha h_{\mu\beta}\partial^\alpha(\partial h)^\beta - 4\partial_\alpha h_{\mu\beta}\partial^\beta(\partial h)^\alpha + 4\partial_\alpha h_{\mu\beta}\partial^\beta\partial^\alpha h \\
&\quad - 4(\partial h)_\mu\Box h + 4(\partial h)_\mu(\partial\partial h)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

となる。この式から $\{g_i\}_{i=1}^{16}$ が決まる。

$\{[i]\}_{i=1}^{16}$ は独立ではない。今、$a\partial_\mu b\partial_\nu c$ という量を考える。a, b, c のうちに上付き添え字 μ, ν も含まれ、$a\partial_\mu b\partial_\nu c$ はスカラーとする。このとき、

$$\begin{aligned} a\partial_\mu b\partial_\nu c &\overset{\mathrm{w}}{=} -\partial_\nu(a\partial_\mu b)c \\ &= -\partial_\nu a\partial_\mu bc - a\partial_\nu\partial_\mu bc \\ &\overset{\mathrm{w}}{=} -\partial_\nu a\partial_\mu bc + \partial_\mu(ac)\partial_\nu b \\ &= -c\partial_\nu a\partial_\mu b + c\partial_\mu a\partial_\nu b + a\partial_\mu c\partial_\nu b \end{aligned} \tag{3.36}$$

より、$\{[i]\}_{i=1}^{16}$ の間に関係が付く。ただし、$a^{\mu\nu}$ が対称テンソルの時、

$$\begin{aligned} a^{\mu\nu}\partial_\mu b\partial_\nu c &\overset{\mathrm{w}}{=} -c\partial_\nu a^{\mu\nu}\partial_\mu b + c\partial_\mu a^{\mu\nu}\partial_\nu b + a^{\mu\nu}\partial_\mu c\partial_\nu b \\ &= a^{\mu\nu}\partial_\nu c\partial_\mu b \end{aligned} \tag{3.37}$$

なので、$a\partial_\mu b\partial^\mu c$ や $h^{\mu\nu}\partial_\mu b\partial_\nu c$ のタイプの項は考えなくてよい。まず、

$$\begin{aligned} [3] &= h\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\gamma{}_\alpha \\ &\overset{\mathrm{w}}{=} -h^\gamma{}_\alpha\partial_\beta h\partial_\gamma h^{\alpha\beta} + h^\gamma{}_\alpha\partial_\gamma h\partial_\beta h^{\alpha\beta} + h\partial_\beta h^{\alpha\beta}\partial_\gamma h^\gamma{}_\alpha \\ &= -[9] + [13] + [15] \end{aligned} \tag{3.38}$$

である。また、

$$\begin{aligned} [6] &= h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\beta{}_\delta \\ &\overset{\mathrm{w}}{=} -h^\beta{}_\delta\partial^\alpha h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h_{\alpha\beta} + h^\beta{}_\delta\partial_\gamma h^{\gamma\delta}\partial^\alpha h_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\gamma\delta}\partial^\alpha h^\beta{}_\delta \\ &= -[8] + [16] + [12] \end{aligned} \tag{3.39}$$

である。なお、

$$\begin{aligned} [11] &= h\partial_\beta h^{\beta\alpha}\partial_\alpha h \\ &\overset{\mathrm{w}}{=} -h\partial_\beta h^{\beta\alpha}\partial_\alpha h + h\partial_\alpha h^{\beta\alpha}\partial_\beta h + h\partial_\alpha h^{\beta\alpha}\partial_\beta h = [11] \end{aligned} \tag{3.40}$$

および、

$$\begin{aligned} [14] &= h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\delta h^{\delta\gamma} \\ &\overset{\mathrm{w}}{=} -h^{\delta\gamma}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\delta h_{\alpha\beta} + h^{\delta\gamma}\partial_\delta h^{\alpha\beta}\partial_\gamma h_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\partial_\delta h^{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\delta\gamma} = [14] \end{aligned} \tag{3.41}$$

である。よって、

$$[3] + [9] - [13] - [15] \overset{\mathrm{w}}{=} 0, \quad [6] + [8] - [12] - [16] \overset{\mathrm{w}}{=} 0 \tag{3.42}$$

である。これより、[15], [16] を消すこともできる。

$\{(\partial\boldsymbol{\chi}_{[i]})_\mu\}_{i=1}^{16}$ を計算し、$\{g_i\}$ に課される条件式たちを求めと、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}/\mathfrak{g} &\overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{2}[1] - \frac{1}{2}[2] + [3] - [4] + [5] - 4[6] + 2[7] - 2[8] + 2[9] - 2[10] \\ &\quad -[11] + 2[13] + 2[14] \end{aligned} \tag{3.43}$$

を得る (文献 [4–6])。

4 アインシュタインの重力理論

(3.21) は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)} &= -\mathfrak{g}\Big[\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\mu\nu}\partial_\beta h^{\mu\nu} - 2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^\sigma{}_\nu + 2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h - \eta^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h\Big] \\ &\stackrel{\mathrm{w}}{=} \mathfrak{g}(-\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\sigma} + 2\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\beta} - 2\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\mu\nu}\eta^{\beta\lambda} + \eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\sigma})\partial_\alpha h_{\mu\nu}\partial_\beta h_{\lambda\sigma}\end{aligned} \tag{4.1}$$

となる。ここで、

$$\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^\sigma{}_\nu \stackrel{\mathrm{w}}{=} \partial_\alpha h_{\mu\nu}\partial^\nu h^{\mu\alpha} \tag{4.2}$$

を用いた。

アインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン密度

$$\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}R = \frac{1}{2\kappa}(\boldsymbol{G} + \partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu) \tag{4.3}$$

のうち $\boldsymbol{G}$ の部分は、

$$\frac{1}{2\kappa}\boldsymbol{G} = \mathfrak{g}\sqrt{-g}(-g^{\alpha\beta}g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + 2g^{\alpha\sigma}g^{\mu\lambda}g^{\nu\beta} - 2g^{\alpha\sigma}g^{\mu\nu}\eta^{\beta\lambda} + g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma})\partial_\alpha g_{\mu\nu}\partial_\beta g_{\lambda\sigma} \tag{4.4}$$

である [7]。ここで、$g = \det(g_{\mu\nu})$ および、

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \tag{4.5}$$

である。なお、

$$\frac{1}{2\kappa}\boldsymbol{G} \stackrel{\mathrm{w}}{=} \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)} + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)} + O(h^4) \tag{4.6}$$

である。

一般に、

$$\sqrt{-g}\partial_{\mu_1}g_{\mu_2\mu_3}\partial_{\mu_4}g_{\mu_5\mu_6}g^{\mu_{i_1}\mu_{i_2}}g^{\mu_{i_3}\mu_{i_4}}g^{\mu_{i_5}\mu_{i_6}} \quad \{i_k\}_{k=1}^6 = \{1,2,3,4,5,6\} \tag{4.7}$$

のタイプの項は以下の 5 つである：

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 = \sqrt{-g}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\partial_\beta g_{\lambda\sigma}\cdot g^{\alpha\mu}g^{\nu\sigma}g^{\beta\lambda}, \tag{4.8}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_1 = \sqrt{-g}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\partial_\beta g_{\lambda\sigma}\cdot g^{\alpha\sigma}g^{\mu\lambda}g^{\nu\beta}, \tag{4.9}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_2 = \sqrt{-g}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\partial_\beta g_{\lambda\sigma}\cdot g^{\alpha\beta}g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}, \tag{4.10}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_3 = \sqrt{-g}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\partial_\beta g_{\lambda\sigma}\cdot g^{\alpha\sigma}g^{\mu\nu}g^{\beta\lambda}, \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_4 = \sqrt{-g}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\partial_\beta g_{\lambda\sigma}\cdot g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}. \tag{4.12}$$

ただし、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \stackrel{\mathrm{w}}{=} \boldsymbol{\mathcal{L}}_1 \tag{4.13}$$

であるから、

$$\sum_{k=1}^4 a_k\boldsymbol{\mathcal{L}}_k \tag{4.14}$$

が一般系である。特に $h_{\mu\nu}$ の 2 次までで (4.1) と一致するのは (4.4) である。

5 Noether procedure

この節では $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}$, $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ の別の探し方を見る。
ゲージ変換

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu \tag{5.1}$$

で全微分項しか変化しない、2 次にラグランジアン密度として $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}$ を得る。
次に、変換

$$\begin{aligned} \delta h_{\mu\nu} &= \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu + \Sigma^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu}, & (5.2)\\ \delta\psi^A &= \Sigma^\lambda \partial_\lambda \psi^A, & (5.3)\\ \delta x^\lambda &= -\Sigma^\lambda & (5.4) \end{aligned}$$

を考える。ψ^A は物質場である。Σ^λ が時空点には依らないとき、ラグランジアン密度

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 = \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\rm mat} \tag{5.5}$$

は Σ^λ の変換で変化しないとすると、Σ^λ が時空点に依るときは、

$$\delta_\Sigma \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 = -\partial_\mu \Sigma^\nu (T^\mu{}_\nu + t^\mu{}_\nu) \tag{5.6}$$

と変化する ([8] の (16.3.15) 式)。ここで、$T^\mu{}_\nu$ は物質場 (スカラー場とする) の正準エネルギー運動量テンソルで、$t^\mu{}_\nu$ は重力場のそれである。特に、

$$\begin{aligned} \partial_\mu t^\mu{}_\nu &\equiv -\frac{1}{2}\partial_\nu h_{\alpha\beta}\mathcal{H}^{\alpha\beta}, & (5.7)\\ \mathcal{H}^{\alpha\beta} &:= -2\frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}}{\delta h_{\alpha\beta}}, \quad \frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}}{\delta h_{\alpha\beta}} := \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}}{\partial h_{\alpha\beta}} - \partial_\mu \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}}{\partial(\partial_\mu h_{\alpha\beta})} & (5.8) \end{aligned}$$

である ([8] の (16.4.8) 式)。$\equiv$ はオイラー・ラグランジュ方程式を使わずに成り立つ。
変換

$$\begin{aligned} \delta h_{\mu\nu} &= \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu + \chi \mathcal{L}_\varepsilon h_{\mu\nu}, & (5.9)\\ \delta\psi^A &= \chi \mathcal{L}_\varepsilon \psi^A & (5.10) \end{aligned}$$

を考える。χ は実パラメーラーである。$\mathcal{L}_\varepsilon$ はリー微分で、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon h_{\mu\nu} &:= \varepsilon^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} + \partial_\mu \varepsilon^\lambda h_{\nu\lambda} + \partial_\nu \varepsilon^\lambda h_{\mu\lambda}, & (5.11)\\ \mathcal{L}_\varepsilon \psi^A &= \varepsilon^\lambda \partial_\lambda \psi^A \quad (\text{スカラー場の場合}) & (5.12) \end{aligned}$$

である[2)] 。このとき、

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}/\chi &\overset{\mathrm{w}}{=} -\partial_\mu\varepsilon^\nu t^\mu{}_\nu + \frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}}{\delta h_{\mu\nu}}(\partial_\mu\varepsilon^\lambda h_{\nu\lambda} + \partial_\nu\varepsilon^\lambda h_{\mu\lambda}) \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} \varepsilon^\nu\partial_\mu(t^\mu{}_\nu + \mathcal{H}^{\mu\lambda}h_{\lambda\nu}) \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

である。右辺は、$\partial_\alpha\mathcal{H}^{\alpha\beta} = 0$ と合わせて、

$$
\partial_\mu(t^\mu{}_\nu + \mathcal{H}^\mu{}_\lambda h^\lambda{}_\nu) \ = \ \gamma_{\alpha\beta\nu}\mathcal{H}^{\alpha\beta}, \qquad (5.14)
$$

$$
\gamma_{\alpha\beta\nu} := \frac{1}{2}(\partial_\alpha h_{\beta\nu} + \partial_\beta h_{\alpha\nu} - \partial_\nu h_{\alpha\beta}) \qquad (5.15)
$$

である。

　今、

$$
\boldsymbol{\mathcal{L}}_1 := \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}} + \frac{1}{2}\chi h^{\mu\nu}T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\chi h^{\mu\nu}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mu\nu} \qquad (5.16)
$$

を考える。ここで、$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mu\nu}$ は $\partial_\lambda h_{\alpha\beta}$ の 2 次式で、

$$
\mathcal{T}^{\mu\nu} := \boldsymbol{\mathcal{L}}^{\mu\nu} - \partial_\sigma\Big(h^{\rho\lambda}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\rho\lambda}}{\partial(\partial_\sigma h_{\mu\nu})}\Big) \qquad (5.17)
$$

が、

$$
\partial_\mu\mathcal{T}^{\mu\nu} = \gamma_{\alpha\beta}{}^\nu\mathcal{H}^{\alpha\beta} \qquad (5.18)
$$

を満たすように決める。このとき、

$$
\frac{1}{2}h^{\mu\nu}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mu\nu} \overset{\mathrm{w}}{=} \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)} \qquad (5.19)
$$

となる [5]。また、

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}_1 &= \delta\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)} + \delta\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}} + \frac{1}{2}\chi\delta h^{\mu\nu}T_{\mu\nu} + \delta\Big(\frac{1}{2}\chi h^{\mu\nu}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mu\nu}\Big) + \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\delta T_{\mu\nu}, \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} \chi\varepsilon^\nu\partial_\mu(t^\mu{}_\nu + T^\mu{}_\nu + \mathcal{H}^{\mu\lambda}h_{\lambda\nu}) + \frac{1}{2}\chi(\partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu + \chi\mathcal{L}_\varepsilon h_{\mu\nu})T_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2}\chi\mathcal{T}^{\mu\nu}(\partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu + \chi\mathcal{L}_\varepsilon h_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\chi h^{\mu\nu}\delta T_{\mu\nu} \\
&= \chi\varepsilon^\nu\partial_\mu(t^\mu{}_\nu + T^\mu{}_\nu + \mathcal{H}^{\mu\lambda}h_{\lambda\nu}) + \frac{1}{2}\chi(\partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu)T^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2}\chi\mathcal{T}^{\mu\nu}(\partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu) + O(\chi^2) \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} O(\chi^2) \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

となる。

[2)] この変換を δ_ε と書くと、$[\delta_\varepsilon, \delta_\xi] = \delta_{[\varepsilon,\xi]}$ である [5]。また、

$$
\chi h_{\mu\nu} \ := \ g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu},
$$

$$
g'_{\mu\nu}(x') \ := \ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta}(x)
$$

とし、$x'^\mu = x^\mu - \chi\varepsilon^\mu$ (ε^μ は微小) とすると、

$$
h'_{\mu\nu}(x) - h_{\mu\nu}(x) = \delta_\varepsilon h_{\mu\nu}
$$

となる。

6 Deserの議論

Deserの議論 [9] を紹介する。この節は主に [5] と [10] に基づく。

d 次元時空で考える。$h_{\mu\nu}$ と

$$h_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{d-2}\eta_{\mu\nu}\varphi, \quad \varphi := \varphi^{\mu}{}_{\mu} \tag{6.1}$$

の関係にある $\varphi_{\mu\nu}$ を考える。Fierz-Pauliのラグランジアン密度 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}$ を考えることは、以下のラグランジアン密度を考えることと等価である：

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 := \frac{1}{\chi^2}\Big[-\chi\varphi^{\mu\nu}(\partial_\rho\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho}) + \eta^{\mu\nu}(\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda})\Big]. \tag{6.2}$$

ただし、$\varphi^{\mu\nu}$ と $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(=\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu})$ が変分を取る変数である。運動方程式は、

$$\frac{1}{\chi}R^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}(\varphi) := -\Box\varphi_{\mu\nu} + \partial_\rho\partial_\nu\varphi^{\rho}{}_{\mu} + \partial_\rho\partial_\mu\varphi^{\rho}{}_{\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box\varphi = 0 \tag{6.3}$$

である。

重力場の自己相互作用を考えると、場の方程式は、

$$\frac{1}{\chi}R^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}(\varphi) \;=\; \frac{1}{2}\chi\bar{\tau}_{\mu\nu}, \tag{6.4}$$

$$\bar{\tau}_{\mu\nu} \;:=\; \tau_{\mu\nu} - \frac{1}{d-2}\eta_{\mu\nu}\tau^{\rho}{}_{\rho} \tag{6.5}$$

となると考える。ここで、

$$\tau_{\mu\nu} \;:=\; \frac{2}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}_0(\gamma)}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\Big|_{\gamma^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}}, \tag{6.6}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_0(\gamma) \;:=\; \frac{1}{\chi^2}\sqrt{-\gamma}\Big[-\chi\varphi^{\mu\nu}(D_\rho\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - D_\nu\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho}) + \gamma^{\mu\nu}(\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda})\Big] \tag{6.7}$$

である。$\gamma := \det(\gamma_{\mu\nu})$ で、$\gamma_{\mu\nu}$ は計量 ($\gamma^{\mu\nu}$ の逆行列) である。D_μ は計量 $\gamma_{\mu\nu}$ についての共変微分である。いま $\boldsymbol{\varphi}^{\mu\nu}$ をテンソル密度と考え、

$$\tau'_{\mu\nu} \;:=\; \frac{2}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}'_0(\gamma)}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\Big|_{\gamma^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}}, \tag{6.8}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}'_0(\gamma) \;:=\; \frac{1}{\chi^2}\Big[-\chi\boldsymbol{\varphi}^{\mu\nu}(D_\rho\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - D_\nu\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho}) + \sqrt{-\gamma}\gamma^{\mu\nu}(\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda})\Big] \tag{6.9}$$

とすると、

$$\tau'_{\mu\nu} \;=\; \tau_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta}\frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}_0(\gamma)}{\delta\varphi^{\alpha\beta}}\Big|_{\gamma=\eta} \tag{6.10}$$

なので、オイラー・ラグランジュ方程式 $\frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}_0(\gamma)}{\delta\varphi^{\alpha\beta}}\Big|_{\gamma=\eta} = 0$ のもとでは $\tau'_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu}$ である。よって、

$$\frac{1}{\chi}R^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}(\varphi) \;=\; \frac{1}{2}\chi\bar{\tau}'_{\mu\nu}, \tag{6.11}$$

$$\bar{\tau}'_{\mu\nu} \;:=\; \tau'_{\mu\nu} - \frac{1}{d-2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\tau'_{\alpha\beta} \tag{6.12}$$

と考える。ここで、

$$\bar{\tau}'_{\mu\nu} = \frac{1}{\chi^2}(\Gamma^\rho{}_{\lambda\rho}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} + \chi\partial_\lambda V^\lambda{}_{\mu\nu}) \tag{6.13}$$

である。ここで、$V^\lambda_{\mu\nu}$ は $\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta}$ と $\varphi_{\alpha\beta}$ についてそれぞれ線形である。
　そこで、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_1 := \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_0 - \frac{1}{\chi^2}\chi\boldsymbol{\varphi}^{\mu\nu}(\Gamma^\rho{}_{\lambda\rho}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}), \tag{6.14}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_0 := \frac{1}{\chi^2}\Big[-\chi\boldsymbol{\varphi}^{\mu\nu}(D_\rho\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - D_\nu\Gamma^\rho{}_{\mu\rho}) + \boldsymbol{\eta}^{\mu\nu}(\Gamma^\rho{}_{\lambda\rho}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda})\Big] \tag{6.15}$$

を考える。$\boldsymbol{\eta}^{\mu\nu}$ はテンソル密度である。このとき、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{L}}_1 &= \frac{1}{\chi^2}\Big[-\chi\boldsymbol{\varphi}^{\mu\nu}(D_\rho\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - D_\nu\Gamma^\rho{}_{\mu\rho}) + (\boldsymbol{\eta}^{\mu\nu} - \chi\boldsymbol{\varphi}^{\mu\nu})(\Gamma^\rho{}_{\lambda\rho}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda})\Big] \\ &= \boldsymbol{\mathcal{L}}_2 + \frac{1}{\chi}\boldsymbol{\eta}^{\mu\nu}(D_\rho\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - D_\nu\Gamma^\rho{}_{\mu\rho}) \\ &= \boldsymbol{\mathcal{L}}_2 + \frac{1}{\chi}\partial_\rho(\boldsymbol{\eta}^{\mu\nu}\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \boldsymbol{\eta}^{\mu\rho}\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda}) \overset{\mathrm{w}}{=} \boldsymbol{\mathcal{L}}_2, \end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_2 := \frac{1}{\chi^2}(\boldsymbol{\eta}^{\mu\nu} - \chi\boldsymbol{\varphi}^{\mu\nu})(D_\rho\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - D_\nu\Gamma^\rho{}_{\mu\rho} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\rho}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}) \tag{6.17}$$

とする。ミンコフスキー空間で考えると、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_2 = \frac{1}{\chi^2}\boldsymbol{g}^{\mu\nu}(\partial_\rho\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\rho{}_{\mu\rho} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\rho}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}), \tag{6.18}$$

$$\boldsymbol{g}^{\mu\nu} := \eta^{\mu\nu} - \chi\boldsymbol{\varphi}^{\mu\nu} \tag{6.19}$$

である。$\boldsymbol{g}_{\mu\nu}$ を $\boldsymbol{g}^{\mu\nu}$ の逆行列とし、

$$g_{\mu\nu} := (-\boldsymbol{g})^{\frac{1}{d-2}}\boldsymbol{g}_{\mu\nu}, \quad \boldsymbol{g} := \det(\boldsymbol{g}^{\mu\nu}) \tag{6.20}$$

とすると、

$$\boldsymbol{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}, \quad g := \det(g_{\mu\nu}) \tag{6.21}$$

となる。$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列である。$\boldsymbol{\mathcal{L}}_2$ はアインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン密度である。また、$\boldsymbol{\mathcal{L}}_1$ または $\boldsymbol{\mathcal{L}}_2$ は (6.11) が得られる。

References

[1] ファインマン, モリニーゴ, ワーグナー (著), 和田純夫 (訳)『ファインマン講義重力の理論』(岩波書店, 1999 年).

[2] 和田純夫『今度こそわかる重力理論』(講談社, 2018 年).

[3] 高橋康, 表實『古典場から量子場への道 増補第 2 版』(講談社, 2006 年).

[4] Bert Janssen, “From Fierz-Pauli to Einstein-Hilbert:Gravity as a special relativistic field theory”, `http://www.ugr.es/~bjanssen/text/fierz-pauli.pdf`

[5] Tomas Ortin, “Gravity and Strings”, Cambridge University Press (第 2 版, 2015 年).

[6] Antonio Lopez-Pinto, “Nonstandard spin 2 field theory”, arXiv:gr-qc/0410069.

[7] T. Padmanabhan, “Gravitation : Foundations and Frontiers”, Cambridge University Press (2010).

[8] 中嶋 慧, 松尾 衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』(現代数学社, 2020 年).

[9] S. Deser, “Self-Interaction and Gauge Invariance”, General Relativity and gravitation **1**, 9 (1970).

[10] M. Blagojevic, “Gravitation and Gauge Symmetries”, Routledge, 2001.