exp と ln に関するいくつかの公式

中嶋 慧

February 20, 2019

Contents

1 exp に関する公式

$U(t,s)$ を、

$$\frac{\partial U(t,s)}{\partial t} = H(t)U(t,s)\,, \quad U(s,s) = 1 \tag{1.1}$$

の解とする。これは、

$$U(t,s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \cdots \int_s^{t_{n-1}} dt_n \; H(t_2)H(t_{n-1}) \cdots H(t_n) \tag{1.2}$$

と書ける。さて、$U_x(t,s)$ を、

$$\frac{\partial U_x(t,s)}{\partial t} = [H_0(t) + xH'(t)]U_x(t,s)\,, \quad U_x(s,s) = 1 \tag{1.3}$$

の解とし、$x=0$ の場合の解を $U_0(t,s)$ とすると、§ 2 で示すように、

$$U_x(t,s) = U_0(t,s) + xU'(t,s) + \mathcal{O}(x^2), \tag{1.4}$$

$$U'(t,s) = \int_s^t du\ U_0(t,u)H'(u)U_0(u,s) \tag{1.5}$$

となる。特に、$H_0(t)$ がパラメーターの組 $\{\alpha_t^n\}_{n=1}^N$ の関数 $(H_0(t) = H(\alpha_t))$ であり、$x=1$, $H'(t) = \delta\alpha_t^n \frac{\partial H}{\partial\alpha^n}\Big|_{\alpha=\alpha_t}$ ($\delta\alpha_t$ は微小) の時、

$$U(t,s) = U_0(t,s) + \int_s^t du\ U_0(t,u)\delta\alpha_t^n \frac{\partial H}{\partial\alpha^n}\Big|_{\alpha=\alpha_t} U_0(u,s) + \mathcal{O}(\delta^2) \tag{1.6}$$

となる。ここで、$U(t,s)$ は $U_{x=1}(t,s)$ を表す。特に、α_t^n, $\delta\alpha_t^n$ の t 依存性がない時、

$$e^{H(\alpha+\delta\alpha)(t-s)} = e^{H(\alpha)(t-s)} + \delta\alpha^n \int_s^t du\ e^{H(\alpha)(t-u)} \frac{\partial H}{\partial\alpha^n} e^{H(\alpha)(u-s)} + \mathcal{O}(\delta^2) \tag{1.7}$$

となる。$s=0$, $t=1$ とすることで、

$$\frac{\partial e^{H(\alpha)}}{\partial\alpha^n} = \int_0^1 du\ e^{(1-u)H(\alpha)} \frac{\partial H}{\partial\alpha^n} e^{uH(\alpha)} \tag{1.8}$$

を得る。

2　(1.5) の証明

(1.5) を示す。
まず、

$$U'(t,s) = \frac{\partial U_x(t,s)}{\partial x}\Big|_{x=0} \tag{2.1}$$

である。(1.3) を x で微分して、$x=0$ と置くと、

$$\frac{\partial U'(t,s)}{\partial t} = H_0(t)U'(t,s) + H'(t)U_0(t,s), \quad U'(s,s) = 0 \tag{2.2}$$

を得る。ところで、

$$u(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^t du\ U_0(t,u)H'(u)U_0(u,s) \tag{2.3}$$

とすると、$u(s,s)=0$ であり、

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t,s)}{\partial t} &= U_0(t,t)H'(t)U_0(t,s) + \int_s^t du\ \frac{U_0(t,u)}{\partial t} H'(u)U_0(u,s) \\ &= H'(t)U_0(t,s) + H_0(t)\int_s^t du\ U_0(t,u)H'(u)U_0(u,s) \\ &= H'(t)U_0(t,s) + H_0(t)u(t,s)\end{aligned} \tag{2.4}$$

であるから、$u(t,s)$ は (2.2) を満たす。よって、(1.5) が成り立つ。

3　ln に関する公式

A, B を演算子, δ を微小な数とすると、

$$\ln(A+\delta B) = \ln A + \int_0^\infty ds\ \left(\delta\frac{1}{A+s}B\frac{1}{A+s} - \delta^2\frac{1}{A+s}B\frac{1}{A+s}B\frac{1}{A+s} + \mathcal{O}(\delta^3)\right) \quad (3.1)$$

が成立する。これより、

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^n}\ln A(\alpha) = \int_0^\infty ds\ \frac{1}{A(\alpha)+s}\frac{\partial A(\alpha)}{\partial\alpha^n}\frac{1}{A(\alpha)+s}, \quad (3.2)$$

が従う。

(3.1) を示す。任意の演算子 X に対し、δ が十分小さいとき、

$$\frac{1}{1+\delta X} = (1+\delta X)^{-1} = 1 - \delta X + \delta^2 X^2 - \delta^3 X^3 + \cdots \quad (3.3)$$

が従う。この式より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{A+\delta B} &= [A(1+\delta A^{-1}B)]^{-1} = (1+\delta A^{-1}B)^{-1}A^{-1} \\ &= \frac{1}{A} - \delta\frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \delta^2\frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} - \delta^3\frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \cdots\end{aligned} \quad (3.4)$$

が従う。ただし、A は逆 $A^{-1} = \frac{1}{A}$ を持つと仮定した。また、演算子 Y が逆 Y^{-1} を持つとき、

$$\int_0^a ds\ \frac{1}{Y+s} = \ln(Y+a) - \ln Y \quad (3.5)$$

が従う。a は実数である。 上式を、$Y = A$ と $Y = A+\delta B$ に使って、

$$\ln(A+\delta B) = \ln A + \ln(A+\delta B+a) - \ln(A+a) + \int_0^a ds\ \left(\frac{1}{A+s} - \frac{1}{A+\delta B+s}\right) \quad (3.6)$$

を得る。これと、(3.4) を使い、

$$\begin{aligned}\ln(A+\delta B) &= \ln A + \ln(A+\delta B+a) - \ln(A+a) \\ &\quad + \int_0^a ds\ \left(\delta\frac{1}{A+s}B\frac{1}{A+s} - \delta^2\frac{1}{A+s}B\frac{1}{A+s}B\frac{1}{A+s} + \cdots\right)\end{aligned} \quad (3.7)$$

を得る。この式の右辺第 2,3 項は、すぐ後で示すように、

$$\ln(A+B+a) - \ln(A+a) = \ln\left(1+\frac{A+B}{a}\right) - \ln\left(1+\frac{A}{a}\right) = \mathcal{O}(\frac{1}{a}) \quad (3.8)$$

なので、$a\to\infty$ で、

$$\ln(A+\delta B) = \ln A + \int_0^\infty ds\ \left(\delta\frac{1}{A+s}B\frac{1}{A+s} - \delta^2\frac{1}{A+s}B\frac{1}{A+s}B\frac{1}{A+s} + \cdots\right) \quad (3.9)$$

を得る。これは (3.1) である。

(3.8) を示す。(3.7) に $A=1$ を代入して、

$$
\begin{aligned}
\ln(1+\delta B) &= \ln(1+\delta B+a)-\ln(1+a) \\
&\quad +\int_0^a ds\ \Big(\delta\frac{1}{(1+s)^2}B-\delta^2\frac{1}{(1+s)^3}B^2+\cdots\Big) \\
&= \ln(1+\delta B+a)-\ln(1+a) \\
&\quad +\int_0^a ds\ \Big(\delta\frac{1}{(1+s)^2}B-\delta^2\frac{1}{(1+s)^3}B^2+\cdots\Big) \\
&= \ln\Big(1+\frac{\delta B}{a+1}\Big)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\delta^n B^n\Big(1-\frac{1}{(1+a)^n}\Big) \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

を得る。$a\to\infty$ として、

$$
\ln(1+\delta B)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\delta^n B^n \tag{3.11}
$$

を得る。これより (3.8) を得る。

(3.2) は、フォン・ノイマン・エントロピー $S(\alpha)=-\mathrm{Tr}[\rho(\alpha)\ln\rho(\alpha)]$ の導関数の計算に必要である：

$$
\frac{\partial S}{\partial\alpha^n} = -\mathrm{Tr}[\frac{\partial\rho(\alpha)}{\partial\alpha^n}\ln\rho(\alpha)]-\mathrm{Tr}[\rho(\alpha)\frac{\partial\ln\rho(\alpha)}{\partial\alpha^n}] \tag{3.12}
$$

であり、第 2 項は、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[\rho(\alpha)\frac{\partial\ln\rho(\alpha)}{\partial\alpha^n}] &= \mathrm{Tr}\Big[\rho(\alpha)\int_0^\infty ds\ \frac{1}{\rho(\alpha)+s}\frac{\partial\rho(\alpha)}{\partial\alpha^n}\frac{1}{\rho(\alpha)+s}\Big] \\
&= \mathrm{Tr}\Big[\int_0^\infty ds\ \frac{\rho(\alpha)}{[\rho(\alpha)+s]^2}\frac{\partial\rho(\alpha)}{\partial\alpha^n}\Big] \\
&= \mathrm{Tr}\Big[\frac{\partial\rho(\alpha)}{\partial\alpha^n}\Big] \\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha^n}\mathrm{Tr}[\rho(\alpha)] \\
&= 0 \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

である。$\rho(\alpha)$ がフルランクでなく、ρ^{-1} の存在しない場合については§ 7 を参照。

4 $[B, e^A]$ に関する公式

有名な公式

$$[B, e^A] = \int_0^1 dx\ e^{(1-x)A}[B, A]e^{xA} \tag{4.1}$$

を導く。まず、

$$C(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-xA}[B, e^{xA}] \tag{4.2}$$

とすると、

$$\frac{dC}{dx} = e^{-xA}[B, A]e^{xA} \tag{4.3}$$

である。これと、$C(0) = 0$ より、

$$C(1) = \int_0^1 dx\ e^{-xA}[B, A]e^{xA} \tag{4.4}$$

であり、右から e^A をかけて (4.1) を得る。

5 $[B, \ln A]$ に関する公式

(1.8) は、

$$\frac{\partial e^{H(\alpha)}}{\partial \alpha^n} = \hat{\varepsilon}(e^H)\frac{\partial H}{\partial \alpha^n}, \tag{5.1}$$

$$\hat{\varepsilon}(A)\bullet \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 du\ A^{(1-u)} \bullet A^u \tag{5.2}$$

と書け、(3.2) は、

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^n}\ln A(\alpha) = \hat{\delta}(A)\frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha^n}, \tag{5.3}$$

$$\hat{\delta}(A)\bullet \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty ds\ \frac{1}{A+s} \bullet \frac{1}{A+s} \tag{5.4}$$

と書ける。このとき、(5.1), (5.3) より、

$$\hat{\delta}(A) = [\hat{\varepsilon}(A)]^{-1}, \quad \hat{\varepsilon}(A) = [\hat{\delta}(A)]^{-1} \tag{5.5}$$

となる (§ 6)。

さて、(4.1) は、

$$[B, e^A] = \hat{\varepsilon}(e^A)[B, A] \tag{5.6}$$

なので、

$$\begin{aligned} [B, A] &= [\hat{\varepsilon}(e^A)]^{-1}[B, e^A], \\ [B, \ln A] &= [\hat{\varepsilon}(A)]^{-1}[B, A] \\ &= \hat{\delta}(A)[B, A] \\ &= \int_0^\infty ds\ \frac{1}{A+s}[B, A]\frac{1}{A+s} \end{aligned} \tag{5.7}$$

となる。

6 $\hat{\delta}(A)\hat{\varepsilon}(A) = \hat{\delta}(A)\hat{\varepsilon}(A) = 1$ の証明

今、演算子 A から超演算子 $A_L,\, A_R$ を、

$$A_L \bullet = A \bullet, \tag{6.1}$$
$$A_R \bullet = \bullet A \tag{6.2}$$

で定義する。A_L と A_R とは可換である。このとき、

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}(e^H) &= \int_0^1 du\ e^{(1-u)H_L} e^{uH_R} \\ &= e^{H_L} \int_0^1 du\ e^{u(H_R - H_L)} \\ &= e^{H_L} \frac{e^{H_R - H_L} - 1}{H_R - H_L} \\ &= \frac{e^{H_R} - e^{H_L}}{H_R - H_L}\end{aligned} \tag{6.3}$$

である。これは、

$$\hat{\varepsilon}(A) = \frac{A_R - A_L}{(\ln A)_R - (\ln A)_L} \tag{6.4}$$

と書ける。また、

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(A) &= \int_0^\infty ds\ \frac{1}{A_L + s} \frac{1}{A_R + s} \\ &= \frac{1}{A_R - A_L} \int_0^\infty ds\ \left[\frac{1}{A_L + s} - \frac{1}{A_R + s}\right] \\ &= \frac{(\ln A)_R - (\ln A)_L}{A_R - A_L}\end{aligned} \tag{6.5}$$

である。よって、

$$\hat{\delta}(A)\hat{\varepsilon}(A) = \hat{\delta}(A)\hat{\varepsilon}(A) = 1 \tag{6.6}$$

である。

7　フォン・ノイマン・エントロピーの微分についての補足

$\rho(\alpha) = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_N, 0, \cdots, 0)$ の場合を考える。最初の N 次元の空間への射影子を $P(\alpha)$ と書く。ところで、$A_{ij} = a_i \delta_{ij}$ の時、

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_i a_i B_{ii} = \sum_{a_i \neq 0} a_i B_{ii} \tag{7.1}$$

なので、

$$\mathrm{Tr}[\rho(\alpha)\bullet] = \mathrm{Tr}[\rho(\alpha)P(\alpha) \bullet P(\alpha)], \tag{7.2}$$

$$\mathrm{Tr}\big[\rho(\alpha)\frac{\partial \ln \rho(\alpha)}{\partial \alpha^n}\big] = \mathrm{Tr}\big[\rho(\alpha)P(\alpha)\frac{\partial \ln \rho(\alpha)}{\partial \alpha^n}P(\alpha)\big] \tag{7.3}$$

である。ここで、

$$P(\alpha)\frac{\partial \ln \rho(\alpha)}{\partial \alpha^n}P(\alpha) = \int_0^\infty ds\ P(\alpha)\frac{1}{\rho(\alpha)+s}\frac{\partial \rho(\alpha)}{\partial \alpha^n}\frac{1}{\rho(\alpha)+s}P(\alpha) \tag{7.4}$$

であり、

$$P(\alpha)\frac{1}{\rho(\alpha)+s} = \mathrm{diag}(\frac{1}{p_1+s}, \cdots, \frac{1}{p_N+s}, 0, \cdots, 0) = \frac{1}{\rho(\alpha)+s}P(\alpha) \tag{7.5}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[\rho(\alpha)\frac{\partial \ln \rho(\alpha)}{\partial \alpha^n}] &= \mathrm{Tr}\Big[\int_0^\infty ds\ P(\alpha)\frac{\rho(\alpha)}{[\rho(\alpha)+s]^2}P(\alpha)\frac{\partial \rho(\alpha)}{\partial \alpha^n}\Big] \\
&= \mathrm{Tr}\Big[P(\alpha)\frac{\partial \rho(\alpha)}{\partial \alpha^n}\Big] \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha^n}\mathrm{Tr}[\rho(\alpha)] - \mathrm{Tr}\Big[\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha^n}\rho(\alpha)\Big] \\
&= -\mathrm{Tr}\Big[\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha^n}\rho(\alpha)\Big]
\end{aligned} \tag{7.6}$$

となる。ところで、$P(\alpha) = P(\alpha)P(\alpha)$ であり、これより、

$$\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha^n} = \frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha^n}P(\alpha) + P(\alpha)\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha^n} \tag{7.7}$$

である。また、$\rho(\alpha) = P(\alpha)\rho(\alpha) = \rho(\alpha)P(\alpha)$ より、

$$\mathrm{Tr}\Big[\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha^n}\rho(\alpha)\Big] = \mathrm{Tr}\Big[\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha^n}P(\alpha)\rho(\alpha)\Big] = \mathrm{Tr}\Big[P(\alpha)\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha^n}\rho(\alpha)\Big] \tag{7.8}$$

である。上 2 式より、

$$\mathrm{Tr}\Big[\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha^n}\rho(\alpha)\Big] = 0 \tag{7.9}$$

であり、

$$\mathrm{Tr}\big[\rho(\alpha)\frac{\partial \ln \rho(\alpha)}{\partial \alpha^n}\big] = 0 \tag{7.10}$$

を得る。

8　(1.8) の応用例：ゲージ理論

n 個の実数パラメーター $\varepsilon^r (r = 1, 2, \cdots, n)$ に依存する大域的変換

$$\psi'^A(x) = [\boldsymbol{T}(\varepsilon)]^A{}_B \psi^B(x) \tag{8.1}$$

で、場の組 ψ^A に対する作用が不変とする。ただし、$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ は線形リー群 G の表現になっているとする。$\varepsilon = 0$ が恒等変換になるものとする。この時、局所的変換

$$\psi'^A(x) = [\boldsymbol{T}(\varepsilon(x))]^A{}_B \psi^B(x) \tag{8.2}$$

で作用が不変となるように、ψ のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0(\psi, \partial_\mu \psi)$ を修正することを考える。そのためには、

$$\partial_\mu \psi^A \to (\nabla_\mu \psi)^A \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \psi^A + (\boldsymbol{A}_\mu)^A{}_B \psi^B \tag{8.3}$$

という置き換えをすれば良い。ただし、$\boldsymbol{A}_\mu$ は以下の変換則が成り立つように決める：

$$(\nabla'_\mu \psi')^A \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \psi'^A + (\boldsymbol{A}'_\mu)^A{}_B \psi'^B = \boldsymbol{T}^A_B(\varepsilon(x))(\nabla_\mu \psi)^B. \tag{8.4}$$

ここで、$\psi'^A = \boldsymbol{T}^A_B(\varepsilon(x))\psi^B$ である。これより、

$$\boldsymbol{A}'_\mu = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu \boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^{-1} \tag{8.5}$$

を得る。

ところで、$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ は単位元の近くで、

$$\boldsymbol{T}(\varepsilon) = \exp[\varepsilon^r \boldsymbol{G}_r] \tag{8.6}$$

と書ける[1)]。$\boldsymbol{G}_r$ は G のリー代数の基底であり、それらの交換関係は、

$$[\boldsymbol{G}_r, \boldsymbol{G}_s] \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{G}_r \boldsymbol{G}_s - \boldsymbol{G}_s \boldsymbol{G}_r = f^t{}_{rs} \boldsymbol{G}_t \tag{8.7}$$

となる。$f^t{}_{rs} (= -f^t{}_{sr})$ は構造定数と呼ばれる実定数である。(8.6) に対して、

$$\partial_\mu \boldsymbol{T} = \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}} \partial_\mu \boldsymbol{E} e^{(1-s)\boldsymbol{E}} \quad (\boldsymbol{E} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^r \boldsymbol{G}_r) \tag{8.8}$$

である。ここで (1.8) を用いた。(8.8) より、

$$\begin{aligned} \partial_\mu \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^{-1} &= \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}} \partial_\mu \boldsymbol{E} e^{-s\boldsymbol{E}} \\ &= \partial_\mu \varepsilon^r \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}} \boldsymbol{G}_r e^{-s\boldsymbol{E}} \end{aligned} \tag{8.9}$$

となる。ところで、

$$e^{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{G}_r e^{-\boldsymbol{E}} = \alpha^s{}_r(\varepsilon) \boldsymbol{G}_s \tag{8.10}$$

[1)] U(n), SU(n), SO(n), Sp(n) の任意の元はこの形で書ける。

である[2)]。よって、

$$\partial_\mu \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} = \partial_\mu \varepsilon^r \boldsymbol{G}_s \int_0^1 ds\ \alpha^s{}_r(s\varepsilon) =: \partial_\mu \varepsilon^r \boldsymbol{G}_s l^s{}_r(\varepsilon) \tag{8.11}$$

となる。

よって、(8.5) の第 2 項は、$\boldsymbol{G}_r$ の線形結合で書ける[3)]。今、

$$\boldsymbol{A}_\mu^{(0)} \overset{\text{def}}{=} A^r{}_\mu \boldsymbol{G}_r, \tag{8.12}$$

$$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{A}_\mu - \boldsymbol{A}_\mu^{(0)} \tag{8.13}$$

と置く。$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)}$ は $\boldsymbol{G}_r$ の線形結合では書けない部分である。これらはそれぞれ、

$$\boldsymbol{A}_\mu^{(0)\prime} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu^{(0)}\boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}, \tag{8.14}$$

$$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)\prime} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu^{(1)}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{8.15}$$

と変換する。$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)}$ は、(8.4) を満たすためには不要であり、0 であっても困ることはない。よって、$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)} = 0$ と置く。このとき、

$$(\nabla_\mu \psi)^A = \partial_\mu \psi^A + A^r{}_\mu (\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \psi^B \tag{8.16}$$

となる。$A^r{}_\mu$ が一般のゲージ場である (線形リー群 G のゲージ場とも呼ばれる)。

ゲージ場の変換則は、

$$A'^r{}_\mu = \alpha^r{}_s(\varepsilon) A^s{}_\mu - l^r{}_s(\varepsilon)\partial_\mu \varepsilon^s \tag{8.17}$$

となる。実は、

$$\alpha^r{}_s(\varepsilon) = [\exp(\boldsymbol{e})]^r{}_s, \quad [\boldsymbol{e}]^a{}_b \overset{\text{def}}{=} \varepsilon^r f^a{}_{rb} \tag{8.18}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} l^s{}_r(\varepsilon) &= \int_0^1 ds\ [\exp(s\boldsymbol{e})]^s{}_r \\ &= \int_0^1 ds\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n [\boldsymbol{e}^n]^s{}_r \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} [\boldsymbol{e}^n]^s{}_r \end{aligned} \tag{8.19}$$

である。

[2)] G を線形リー群とする。そのリー代数 $\mathfrak{g}$ は、

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathrm{M}(N,\mathbb{C}) | {}^\forall a \in \mathbb{R},\ \exp(aX) \in G\}$$

で定義される。$\mathfrak{g}$ の任意の元は $\varepsilon^r \boldsymbol{G}_r$ と書ける。ε^r は実数である。$X \in G$, $A \in \mathfrak{g}$ とすると、

$$Xe^A X^{-1} = e^{XAX^{-1}} \in G$$

なので、$XAX^{-1} \in \mathfrak{g}$ である。特に、$X\boldsymbol{G}_r X^{-1} \in \mathfrak{g}$ なので、

$$X\boldsymbol{G}_r X^{-1} = \alpha^s{}_r \boldsymbol{G}_s$$

と書ける。

[3)] $\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ が (8.6) の形で書けない場合は、この節の最後に議論する。

$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ が (8.6) の形で書けない場合を考える。まず、線形リー群の連結成分について復習する。集合 A の 2 元 a, b が結ばれているとは、a を始点, b を終点とする、A に含まれる連続曲線が存在することである。A の元 a と A 内で結ばれている元の集合を $C(a)$ と書き、a を含む連結成分という。線形リー群 G の単位元を含む連結成分を G_0 とする。このとき、G の元 g を含む連結成分 $C(g)$ は、$C(g) = gG_0 = G_0 g$ と書ける [1]。また、G_0 の任意の元 $\boldsymbol{T}_0$ は、G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の有限個の元 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_n$ を用いて、

$$\boldsymbol{T}_0 = \exp(\boldsymbol{E}_1)\exp(\boldsymbol{E}_2)\cdots\exp(\boldsymbol{E}_n) \tag{8.20}$$

と書ける [1]。上の 2 つの定理より、$\boldsymbol{T}(x)$ が G のある連結成分 G_i の元の時、G_i の x に依らない元 $\boldsymbol{T}_i$ と、G_0 の元 $\boldsymbol{T}_0(x)$ が存在し、

$$\boldsymbol{T}(x) = \boldsymbol{T}_i\boldsymbol{T}_0(x), \quad \boldsymbol{T}_0(x) = \exp(\boldsymbol{E}_1(x))\exp(\boldsymbol{E}_2(x))\cdots\exp(\boldsymbol{E}_n(x)) \tag{8.21}$$

と書ける。特に、$G_i = G_0$ の時、$\boldsymbol{T}_i = 1$(単位元) である。さて、$\boldsymbol{E}_k(x) = \varepsilon^r_{(k)}(x)\boldsymbol{G}_r$ と書くと、(8.11) より、

$$\partial_\mu e^{\boldsymbol{E}_k(x)} \cdot e^{-\boldsymbol{E}_k(x)} = (\alpha^{(k)}(x))^r{}_s \boldsymbol{G}_r \partial_\mu \varepsilon^s_{(k)} \tag{8.22}$$

と書ける。$(\alpha^{(k)}(x))^r{}_s$ は実数である。また、$X \in G$, $A \in \mathfrak{g}$ とすると、$XAX^{-1} \in \mathfrak{g}$ であるから、(8.21) より、

$$\partial_\mu \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^{-1} = \sum_{k=1}^{n} (\beta^{(k)}(x))^r{}_s \boldsymbol{G}_r \partial_\mu \varepsilon^s_{(k)} \tag{8.23}$$

の形となる。$(\beta^{(k)}(x))^r{}_s$ は実数である。よって、$\partial_\mu \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^{-1}$ はリー代数に値を取る。

References

[1] 山内 恭彦, 杉浦 光夫『連続群論入門』(培風館, 1960 年).