ダランベルシアン

中嶋 慧

June 12, 2018

1 Divergence

リーマン接続

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = g^{\lambda\alpha}\Gamma_{\alpha\mu\nu}, \tag{1.1}$$

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \tag{1.2}$$

を仮定する。テンソル $T_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q}$ の共変微分は、

$$\nabla_\alpha T_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q} = \partial_\alpha T_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q} - \sum_{k=1}^{p}\Gamma^\lambda{}_{\mu_k\alpha}T_{\mu_1\cdots\lambda\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q} + \sum_{j=1}^{q}\Gamma^{\nu_j}{}_{\lambda\alpha}T_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\lambda\cdots\nu_q} \tag{1.3}$$

である。よって、

$$\nabla_\alpha T^{\mu_1}{}_{\mu_2\cdots\mu_p} = \partial_\alpha T^{\mu_1}{}_{\mu_2\cdots\mu_p} + \Gamma^{\mu_1}{}_{\lambda\alpha}T^\lambda{}_{\mu_2\cdots\mu_p} - \sum_{k=2}^{p}\Gamma^\lambda{}_{\mu_k\alpha}T^{\mu_1}{}_{\mu_2\cdots\lambda\cdots\mu_p}, \tag{1.4}$$

$$\nabla_\mu T^{\mu}{}_{\mu_2\cdots\mu_p} = \partial_\mu T^{\mu}{}_{\mu_2\cdots\mu_p} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\mu}T^\lambda{}_{\mu_2\cdots\mu_p} - \sum_{k=2}^{p}\Gamma^\lambda{}_{\mu_k}{}^{\mu}T_{\mu\mu_2\cdots\lambda\cdots\mu_p} \tag{1.5}$$

である。ここで、

$$\Gamma^\mu{}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu} \tag{1.6}$$

である。また、

$$\partial_\lambda g = g g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu} \tag{1.7}$$

より、σ は g の符号として、

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\sqrt{\sigma g} &= \frac{1}{2\sqrt{\sigma g}}(\sigma\partial_\mu g) \\ &= \frac{\sqrt{\sigma g}}{2}g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{1.8}$$

であり、

$$\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{\sigma g}}\partial_\lambda\sqrt{\sigma g} \tag{1.9}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T^{\mu}{}_{\mu_2\cdots\mu_p} &= \partial_\mu T^{\mu}{}_{\mu_2\cdots\mu_p} + \frac{1}{\sqrt{\sigma g}}\partial_\lambda\sqrt{\sigma g}T^{\lambda}{}_{\mu_2\cdots\mu_p} - \sum_{k=2}^{p}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu_k}{}^{\mu}T_{\mu\mu_2\cdots\lambda\cdots\mu_p} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma g}}\partial_\mu(\sqrt{\sigma g}T^{\mu}{}_{\mu_2\cdots\mu_p}) - \sum_{k=2}^{p}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu_k}{}^{\mu}T_{\mu\mu_2\cdots\lambda\cdots\mu_p}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

また、

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T^{\mu\mu_2\cdots\mu_p} &= \partial_\mu T^{\mu\mu_2\cdots\mu_p} + \frac{1}{\sqrt{\sigma g}}\partial_\lambda\sqrt{\sigma g}T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_p} + \sum_{k=2}^{p}\Gamma^{\mu_k}{}_{\lambda\mu}T^{\mu\mu_2\cdots\lambda\cdots\mu_p} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma g}}\partial_\mu(\sqrt{\sigma g}T^{\mu\mu_2\cdots\mu_p}) + \sum_{k=2}^{p}\Gamma^{\mu_k}{}_{\lambda\mu}T^{\mu\mu_2\cdots\lambda\cdots\mu_p}\end{aligned} \tag{1.11}$$

であり、T が完全反対称なら、

$$\nabla_\mu T^{\mu\mu_2\cdots\mu_p} = \frac{1}{\sqrt{\sigma g}}\partial_\mu(\sqrt{\sigma g}T^{\mu\mu_2\cdots\mu_p}) \tag{1.12}$$

となる。この時、

$$\nabla_\mu T^{\mu}{}_{\mu_2\cdots\mu_p} = g_{\mu_2\nu_2}\cdots g_{\mu_p\nu_p}\frac{1}{\sqrt{\sigma g}}\partial_\mu(\sqrt{\sigma g}T^{\mu\nu_2\cdots\nu_p}) \tag{1.13}$$

である。

ところで、ホッジ双対 $*$ は、任意の p 形式 $\omega = \omega_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}$ $(p = 0, 1, \cdots, D)$ を $D - p = r$ 形式

$$*\omega = \frac{1}{r!}E_{\mu_1\cdots\mu_p\nu_1\cdots\nu_r}\omega^{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_r}. \tag{1.14}$$

に移す。ここで、$E_{\mu_1\cdots\mu_D}$ は完全反対称で、$E_{01\cdots D-1} = \sqrt{\sigma g}$ である。よって、

$$\begin{aligned}d*\omega &= \frac{1}{r!}\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_p\nu_1\cdots\nu_r}\partial_\lambda(\sqrt{\sigma g}\omega^{\mu_1\cdots\mu_p})dx^\lambda\wedge dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_r} \\ &= \frac{1}{r!}E_{\mu_1\cdots\mu_p\nu_1\cdots\nu_r}\frac{1}{\sqrt{\sigma g}}\partial_\lambda(\sqrt{\sigma g}\omega^{\mu_1\cdots\mu_p})dx^\lambda\wedge dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_r} \\ &\equiv \frac{1}{r!}E_{\mu_1\cdots\mu_p\nu_1\cdots\nu_r}\omega_{;\lambda}{}^{\mu_1\cdots\mu_p}dx^\lambda\wedge dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_r}\end{aligned} \tag{1.15}$$

となる。ここで、$\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_D}$ は完全反対称で、$\varepsilon_{01\cdots D-1} = 1$ である。よって、

$$\begin{aligned}*d*\omega &= \frac{1}{(p-1)!r!}E_{\mu_1\cdots\mu_p\nu_1\cdots\nu_r}\omega_{;\lambda}{}^{\mu_1\cdots\mu_p}E^{\lambda\nu_1\cdots\nu_r\alpha_1\cdots\alpha_{p-1}}dx_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\alpha_{p-1}} \\ &= \frac{(-1)^{r(p-1)}}{(p-1)!r!}E_{\mu_1\cdots\mu_p\nu_1\cdots\nu_r}E^{\lambda\alpha_1\cdots\alpha_{p-1}\nu_1\cdots\nu_r}\omega_{;\lambda}{}^{\mu_1\cdots\mu_p}dx_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\alpha_{p-1}} \\ &= p(-1)^{r(p-1)}\sigma\delta^{\lambda}_{\mu_1}\delta^{[\alpha_1}_{\mu_2}\cdots\delta^{\alpha_{p-1}]}_{\mu_p}\omega_{;\lambda}{}^{\mu_1\cdots\mu_p}dx_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\alpha_{p-1}} \\ &= p(-1)^{r(p-1)}\sigma\omega_{;\mu_1}{}^{\mu_1\cdots\mu_p}dx_{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p}\end{aligned} \tag{1.16}$$

となる。今、任意の p 形式 ω を

$$\omega = \frac{1}{p!}(\omega)_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_1}\cdots\mu^{\mu_p} \tag{1.17}$$

と書くと、

$$\begin{aligned}(*d*\omega)_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}} &= (-1)^{(D-p)(p-1)}\sigma\nabla_\mu(\omega)^\mu{}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}} \\ &= (-1)^{Dp+D}\sigma\nabla_\mu(\omega)^\mu{}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}} \end{aligned}\tag{1.18}$$

となる。

2　ダランベルシアン

$$\delta := \sigma(-1)^{Dp+D+1}*d* \tag{2.1}$$

とすると、

$$(\delta\omega)_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}} = -\nabla_\mu(\omega)^\mu{}_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}} \tag{2.2}$$

である。ダランベルシアンは、

$$\Box := d\delta + \delta d \tag{2.3}$$

で定義される。これは、

$$\Box := \sigma(-1)^{Dp+D+1}[d*d*+(-1)^D*d*d] \tag{2.4}$$

と書ける。
　さて、

$$\begin{aligned}d\delta\omega &= -p\partial_{\mu_1}\omega_{;\mu}{}^\mu{}_{\mu_2\cdots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p} \\ &= -p\partial_{\mu_1}\Big[\frac{1}{\sqrt{\sigma g}}\partial_\mu(\sqrt{\sigma g}\omega^{\mu\nu_2\cdots\nu_p})g_{\nu_2\mu_2}\cdots g_{\nu_p\mu_p}\Big]dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}\end{aligned}\tag{2.5}$$

であり、

$$\delta d\omega = -(p+1)\frac{1}{\sqrt{\sigma g}}\partial_\mu(\sqrt{\sigma g}\tilde\omega^{\mu\mu_1\mu_2\cdots\mu_p})dx_{\mu_1}\wedge dx_{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p}, \tag{2.6}$$

$$\tilde\omega^{\mu\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} := g^{\mu\nu}g^{\mu_1\nu_1}\cdots g^{\mu_p\nu_p}\partial_{[\nu}\omega_{\nu_1\cdots\nu_p]} \tag{2.7}$$

である。

2.1 ミンコフスキー時空

ミンコフスキー時空では、

$$\Box\omega = \Omega_{\mu_1\cdots\mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{\mu_1\cdots\mu_p} &= -p\partial_{[\mu_1}\partial^{\mu}\omega_{|\mu|\mu_2\cdots\mu_p]} - (p+1)\partial^{\mu}\partial_{[\mu}\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p]} \\ &= -p\partial_{[\mu_1}\partial^{\mu}\omega_{|\mu|\mu_2\cdots\mu_p]} - (p+1)\partial_{[\mu}\partial^{\mu}\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p]}\end{aligned} \tag{2.9}$$

である。$p = 0$ とすると、

$$\Omega = -\partial_{\mu}\partial^{\mu}\omega. \tag{2.10}$$

$p = 1$ とすると、

$$\begin{aligned}\Omega_{\nu} &= -\partial_{\nu}\partial^{\mu}\omega_{\mu} - 2\partial_{[\mu}\partial^{\mu}\omega_{\nu]} \\ &= -\partial_{\nu}\partial^{\mu}\omega_{\mu} - \partial_{\mu}\partial^{\mu}\omega_{\nu} + \partial_{\nu}\partial^{\mu}\omega_{\mu} \\ &= -\partial_{\mu}\partial^{\mu}\omega_{\nu}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

一般に、

$$\Omega_{\mu_1\cdots\mu_p} = -\partial_{\mu}\partial^{\mu}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p} \tag{2.12}$$

である。

2.2 一般の時空

一般の時空では、

$$\Box\omega = \Omega_{\mu_1\cdots\mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}, \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{\mu_1\cdots\mu_p} &= -p\partial_{[\mu_1|}\Big[\frac{1}{\sqrt{\sigma g}}\partial_{\mu}(\sqrt{\sigma g}\,\omega^{\mu\nu_2\cdots\nu_p})g_{|\mu_2\cdots\mu_p],\nu_2\cdots\nu_p}\Big] \\ &\quad -(p+1)\frac{1}{\sqrt{\sigma g}}\partial_{\mu}(\sqrt{\sigma g}\,\tilde{\omega}^{\mu\nu_1\mu_2\cdots\nu_p})g_{\mu_1\cdots\mu_p,\nu_1\cdots\nu_p}\end{aligned} \tag{2.14}$$

である。ここで、

$$g_{\mu_1\cdots\mu_p,\nu_1\cdots\nu_p} := g_{\mu_1\nu_1}\cdots g_{\mu_p\nu_p} \tag{2.15}$$

である。(1.12) より、

$$\begin{aligned}\Omega_{\mu_1\cdots\mu_p} &= -p\partial_{[\mu_1|}\Big[\nabla_{\mu}\omega^{\mu\nu_2\cdots\nu_p}g_{|\mu_2\cdots\mu_p],\nu_2\cdots\nu_p}\Big] - (p+1)\nabla_{\mu}\tilde{\omega}^{\mu\nu_1\mu_2\cdots\nu_p}g_{\mu_1\cdots\mu_p,\nu_1\cdots\nu_p} \\ &= -p\partial_{[\mu_1|}\nabla_{\mu}\omega^{\mu}{}_{|\mu_2\cdots\mu_p]} - (p+1)\nabla_{\mu}\tilde{\omega}^{\mu\nu_1\mu_2\cdots\nu_p}g_{\mu_1\cdots\mu_p,\nu_1\cdots\nu_p}\end{aligned} \tag{2.16}$$

となる。ところで、

$$\nabla_\alpha \omega_{\mu_1\cdots\mu_q} = \partial_\alpha \omega_{\mu_1\cdots\mu_q} - \sum_{j=1}^{q} \Gamma^\lambda{}_{\mu_j\alpha} \omega_{\mu_1\cdots\lambda\cdots\mu_q}, \tag{2.17}$$

$$\nabla_{[\alpha} \omega_{\mu_1\cdots\mu_q]} = \partial_{[\alpha} \omega_{\mu_1\cdots\mu_q]} \tag{2.18}$$

なので、

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mu_1\cdots\mu_p} &= -p\nabla_{[\mu_1|}\nabla_\mu \omega^\mu{}_{|\mu_2\cdots\mu_p]} - (p+1)\nabla_\mu \tilde{\omega}^{\mu\nu_1\mu_2\cdots\nu_p} g_{\mu_1\cdots\mu_p,\nu_1\cdots\nu_p} \\
&= -p\nabla_{[\mu_1|}\nabla_\mu \omega^\mu{}_{|\mu_2\cdots\mu_p]} - (p+1)\nabla^\mu \partial_{[\mu} \omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p]} \\
&= -p\nabla_{[\mu_1|}\nabla_\mu \omega^\mu{}_{|\mu_2\cdots\mu_p]} - (p+1)\nabla^\mu \nabla_{[\mu} \omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p]}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

となる。

$p = 0$ で、

$$\Omega = -\nabla^\mu \nabla_\mu \omega. \tag{2.20}$$

$p = 1$ で、

$$\begin{aligned}
\Omega_\nu &= -\nabla_\nu \nabla_\mu \omega^\mu - 2\nabla^\mu \nabla_{[\mu} \omega_{\nu]} \\
&= -\nabla_\nu \nabla_\mu \omega^\mu - \nabla^\mu \nabla_\mu \omega_\nu + \nabla^\mu \nabla_\nu \omega_\mu \\
&= \nabla_\mu \nabla_\nu \omega^\mu - \nabla_\nu \nabla_\mu \omega^\mu - \nabla^\mu \nabla_\mu \omega_\nu
\end{aligned} \tag{2.21}$$

である。ここで、

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \omega^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu \omega^\lambda = R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} \omega^\rho \tag{2.22}$$

なので、

$$\Omega_\nu = -\nabla^\mu \nabla_\mu \omega_\nu + R_{\rho\nu} \omega^\rho. \tag{2.23}$$

内山『相対性理論』p.162 を見よ。ローレンス条件の下で、

$$\Box A = \mu_0 J \ (A = A_\mu dx^\mu,\ J = J_\mu dx^\mu) \tag{2.24}$$

である。

3　曲率テンソル

場の組 ψ^A が微小変換

$$dx'^\mu = dx^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu(x) dx^\nu \tag{3.1}$$

に対して、

$$\delta\psi^A = \varepsilon^\mu{}_\nu(x) (\boldsymbol{G}^\nu{}_\mu)^A{}_B \psi^B \tag{3.2}$$

と変換すると仮定する。$\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\mu}$ は、アフィン変換

$$x^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu},\ a^{\mu}{}_{\nu} \in \mathrm{GL}(D) \tag{3.3}$$

の D^2 個の生成子である。これは、

$$[\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\mu}, \boldsymbol{G}^{\beta}{}_{\alpha}] = \delta^{\nu}_{\alpha} \boldsymbol{G}^{\beta}{}_{\mu} - \delta^{\beta}_{\mu} \boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\alpha} \tag{3.4}$$

を満たす。このとき、共変微分は、

$$\nabla_{\mu} \psi^{A} = \partial_{\mu} \psi^{A} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} (\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\lambda})^{A}{}_{B} \psi^{B} \tag{3.5}$$

である。今、

$$x' \mu = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu} \tag{3.6}$$

とすると、

$$\varepsilon^{\mu}{}_{\nu} = \partial_{\nu} \varepsilon^{\mu} \tag{3.7}$$

である。また、

$$\delta A^{\mu} = \partial_{\nu} \varepsilon^{\mu} A^{\nu}, \tag{3.8}$$

$$\delta A_{\nu} = -\partial_{\nu} \varepsilon^{\mu} A_{\mu} \tag{3.9}$$

より、

$$\nabla_{\rho} A^{\mu} = \partial_{\rho} A^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} A^{\nu}, \tag{3.10}$$

$$\nabla_{\rho} A_{\nu} = \partial_{\rho} A_{\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} A_{\mu} \tag{3.11}$$

となる。また、

$$([\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] \psi)^{A} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} (\boldsymbol{G}^{\beta}{}_{\alpha})^{A}{}_{B} \psi^{B} \tag{3.12}$$

である。よって、

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] A^{\lambda} = R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} A^{\rho} \tag{3.13}$$

および、

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] A_{\lambda} = -R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu} A_{\rho} \tag{3.14}$$

となる。また、

$$\delta \omega^{\lambda}{}_{\mu_2 \cdots \mu_p} = \varepsilon^{\lambda}{}_{\alpha} \omega^{\alpha}{}_{\mu_2 \cdots \mu_p} - \sum_{j=2}^{p} \varepsilon^{\beta}{}_{\mu_j} \omega^{\lambda}{}_{\mu_2 \cdots \beta \cdots \mu_p} \tag{3.15}$$

より、

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] \omega^{\lambda}{}_{\mu_2 \cdots \mu_p} = R^{\lambda}{}_{\alpha\mu\nu} \omega^{\alpha}{}_{\mu_2 \cdots \mu_p} - \sum_{j=2}^{p} R^{\beta}{}_{\mu_j \mu\nu} \omega^{\lambda}{}_{\mu_2 \cdots \beta \cdots \mu_p} \tag{3.16}$$

である。

さて、

$$\begin{aligned}\Omega_{\mu_1\cdots\mu_p} &= -p\nabla_{[\mu_1|}\nabla_\mu\omega^\mu{}_{|\mu_2\cdots\mu_p]} - (p+1)\nabla^\mu\nabla_{[\mu}\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p]} \\ &= -p\nabla_{[\mu_1|}\nabla_\mu\omega^\mu{}_{|\mu_2\cdots\mu_p]} - \nabla^\mu\nabla_\mu\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} + p\nabla^\mu\nabla_{[\mu_1}\omega_{|\mu|\mu_2\cdots\mu_p]}\end{aligned} \tag{3.17}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\nabla^\mu\nabla_{\mu_1}\omega_{\mu\mu_2\cdots\mu_p} - \nabla_{\mu_1}\nabla_\mu\omega^\mu{}_{\mu_2\cdots\mu_p} &= [\nabla_\mu, \nabla_{\mu_1}]\omega^\mu{}_{\mu_2\cdots\mu_p} \\ &= R^\mu{}_{\alpha\mu\mu_1}\omega^\alpha{}_{\mu_2\cdots\mu_p} - \sum_{j=2}^{p} R^\beta{}_{\mu_j\mu\mu_1}\omega^\mu{}_{\mu_2\cdots\beta\cdots\mu_p} \\ &= R_{\alpha\mu_1}\omega^\alpha{}_{\mu_2\cdots\mu_p} - \sum_{j=2}^{p} R^\beta{}_{\mu_j\mu\mu_1}\omega^\mu{}_{\mu_2\cdots\beta\cdots\mu_p}\end{aligned} \tag{3.18}$$

なので、

$$\Omega_{\mu_1\cdots\mu_p} = -\nabla^\mu\nabla_\mu\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} + pR_{\alpha[\mu_1}\omega^\alpha{}_{\mu_2\cdots\mu_p]} - p\sum_{j=2}^{p} R^\beta{}_{\mu_j\mu\mu_1}\omega^\mu{}_{\mu_2\cdots\beta\cdots\mu_p} \tag{3.19}$$

である。最後の項は、$\mu_1, \cdots, \mu_p$ について反対称化する。$p=2$ で最後の項は、

$$-2R^\beta{}_{[\mu_2|\mu|\mu_1]}\omega^\mu{}_\beta \tag{3.20}$$

となる。