共変微分：ゲージ理論からのアプローチ

中嶋 慧

February 27, 2019

Abstract

このノートでは、第 1 章でゲージ理論の考え方を解説する。第 2 章では、ゲージ理論の考え方に従って、一般相対論の共変微分を導入, 解説する。

Contents

1　ゲージ理論

n 個の実数パラメーター $\varepsilon^r (r = 1, 2, \cdots, n)$ に依存する大域的変換

$$\psi'^A(x) = [\boldsymbol{T}(\varepsilon)]^A{}_B \psi^B(x) \tag{1.1}$$

で、場の組 ψ^A に対する作用が不変とする。ただし、$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ は線形リー群 G の表現になっているとする。$\varepsilon = 0$ が恒等変換になるものとする。この時、局所的変換

$$\psi'^A(x) = [\boldsymbol{T}(\varepsilon(x))]^A{}_B \psi^B(x) \tag{1.2}$$

で作用が不変となるように、ψ のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0(\psi, \partial_\mu \psi)$ を修正することを考える。そのためには、

$$\partial_\mu \psi^A \to (\nabla_\mu \psi)^A \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \psi^A + (\boldsymbol{A}_\mu)^A{}_B \psi^B \tag{1.3}$$

という置き換えをすれば良い。ただし、$\boldsymbol{A}_\mu$ は以下の変換則が成り立つように決める：

$$(\nabla'_\mu \psi')^A \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \psi'^A + (\boldsymbol{A}'_\mu)^A{}_B \psi'^B = \boldsymbol{T}^A_B(\varepsilon(x))(\nabla_\mu \psi)^B. \tag{1.4}$$

ここで、$\psi'^A = \boldsymbol{T}^A_B(\varepsilon(x))\psi^B$ である。これより、

$$\boldsymbol{A}'_\mu = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu\boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} \tag{1.5}$$

を得る。

ところで、$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ は単位元の近くで、

$$\boldsymbol{T}(\varepsilon) = \exp[\varepsilon^r\boldsymbol{G}_r] \tag{1.6}$$

と書ける[1)]。$\boldsymbol{G}_r$ は G のリー代数の基底であり、それらの交換関係は、

$$[\boldsymbol{G}_r, \boldsymbol{G}_s] \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{G}_r\boldsymbol{G}_s - \boldsymbol{G}_s\boldsymbol{G}_r = f^t{}_{rs}\boldsymbol{G}_t \tag{1.7}$$

となる。$f^t{}_{rs}(= -f^t{}_{sr})$ は構造定数と呼ばれる実定数である。(1.6) に対して、

$$\partial_\mu\boldsymbol{T} = \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}}\partial_\mu\boldsymbol{E}e^{(1-s)\boldsymbol{E}} \quad (\boldsymbol{E} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^r\boldsymbol{G}_r) \tag{1.8}$$

である。ここで、公式

$$\frac{\partial e^{H(\alpha)}}{\partial\alpha^n} = \int_0^1 ds\ e^{sH(\alpha)}\frac{\partial H(\alpha)}{\partial\alpha^n}e^{(1-s)H(\alpha)} \tag{1.9}$$

を用いた。$\alpha = \{\alpha^n\}$ はパラメーター α^n の組である。証明は、この節の最後に行う。(1.8) より、

$$\begin{aligned}\partial_\mu\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} &= \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}}\partial_\mu\boldsymbol{E}e^{-s\boldsymbol{E}} \\ &= \partial_\mu\varepsilon^r\int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}}\boldsymbol{G}_re^{-s\boldsymbol{E}}\end{aligned} \tag{1.10}$$

となる。ところで、

$$e^{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{G}_re^{-\boldsymbol{E}} = \alpha^s{}_r(\varepsilon)\boldsymbol{G}_s \tag{1.11}$$

である[2)]。よって、

$$\partial_\mu\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} = \partial_\mu\varepsilon^r\boldsymbol{G}_s\int_0^1 ds\ \alpha^s{}_r(s\varepsilon) =: \partial_\mu\varepsilon^r\boldsymbol{G}_sl^s{}_r(\varepsilon) \tag{1.12}$$

[1)] U(n), SU(n), SO(n), Sp(n) の任意の元はこの形で書ける。

[2)] G を線形リー群とする。そのリー代数 $\mathfrak{g}$ は、

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathrm{M}(N, \mathbb{C})|{}^\forall a \in \mathbb{R},\ \exp(aX) \in G\}$$

で定義される。$\mathfrak{g}$ の任意の元は $\varepsilon^r\boldsymbol{G}_r$ と書ける。ε^r は実数である。$X \in G$, $A \in \mathfrak{g}$ とすると、

$$Xe^AX^{-1} = e^{XAX^{-1}} \in G$$

なので、$XAX^{-1} \in \mathfrak{g}$ である。特に、$X\boldsymbol{G}_rX^{-1} \in \mathfrak{g}$ なので、

$$X\boldsymbol{G}_rX^{-1} = \alpha^s{}_r\boldsymbol{G}_s$$

と書ける。

となる。

よって、(1.5) の第 2 項は、$\boldsymbol{G}_r$ の線形結合で書ける[3)]。今、

$$\boldsymbol{A}_\mu^{(0)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} A^r{}_\mu \boldsymbol{G}_r, \tag{1.13}$$
$$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{A}_\mu - \boldsymbol{A}_\mu^{(0)} \tag{1.14}$$

と置く。$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)}$ は $\boldsymbol{G}_r$ の線形結合では書けない部分である。これらはそれぞれ、

$$\boldsymbol{A}_\mu^{(0)\prime} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu^{(0)}\boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}, \tag{1.15}$$
$$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)\prime} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu^{(1)}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{1.16}$$

と変換する。$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)}$ は、(1.4) を満たすためには不要であり、0 であっても困ることはない。よって、$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)} = 0$ と置く。このとき、

$$(\nabla_\mu \psi)^A = \partial_\mu \psi^A + A^r{}_\mu (\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \psi^B \tag{1.17}$$

となる。$A^r{}_\mu$ が一般のゲージ場である (線形リー群 G のゲージ場とも呼ばれる)。

ゲージ場の変換則は、

$$A'^r{}_\mu = \alpha^r{}_s(\varepsilon) A^s{}_\mu - l^r{}_s(\varepsilon)\partial_\mu \varepsilon^s \tag{1.18}$$

となる。実は、

$$\alpha^r{}_s(\varepsilon) = [\exp(\boldsymbol{e})]^r{}_s, \quad [\boldsymbol{e}]^a{}_b \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon^r f^a{}_{rb} \tag{1.19}$$

である [2]。よって、

$$\begin{aligned} l^s{}_r(\varepsilon) &= \int_0^1 ds\ [\exp(s\boldsymbol{e})]^s{}_r \\ &= \int_0^1 ds\ \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} s^n [\boldsymbol{e}^n]^s{}_r \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)!} [\boldsymbol{e}^n]^s{}_r \end{aligned} \tag{1.20}$$

である。

$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ が (1.6) の形で書けない場合を考える。まず、線形リー群の連結成分について復習する。集合 A の 2 元 a, b が結ばれているとは、a を始点, b を終点とする、A に含まれる連続曲線が存在することである。A の元 a と A 内で結ばれている元の集合を $C(a)$ と書き、a を含む連結成分という。線形リー群 G の単位元を含む連結成分を G_0 とする。このとき、G の元 g を含む連結成分 $C(g)$ は、$C(g) = gG_0 = G_0 g$ と書ける [1]。また、G_0 の任意の元 $\boldsymbol{T}_0$ は、G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の有限個の元 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_n$ を用いて、

$$\boldsymbol{T}_0 = \exp(\boldsymbol{E}_1)\exp(\boldsymbol{E}_2)\cdots\exp(\boldsymbol{E}_n) \tag{1.21}$$

[3)] $\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ が (1.6) の形で書けない場合は、(1.24) を参照。

と書ける [1]。上の 2 つの定理より、$\boldsymbol{T}(x)$ が G のある連結成分 G_i の元の時、G_i の x に依らない元 $\boldsymbol{T}_i$ と、G_0 の元 $\boldsymbol{T}_0(x)$ が存在し、

$$\boldsymbol{T}(x) = \boldsymbol{T}_i\boldsymbol{T}_0(x), \quad \boldsymbol{T}_0(x) = \exp(\boldsymbol{E}_1(x))\exp(\boldsymbol{E}_2(x))\cdots\exp(\boldsymbol{E}_n(x)) \tag{1.22}$$

と書ける。特に、$G_i = G_0$ の時、$\boldsymbol{T}_i = 1$(単位元) である。さて、$\boldsymbol{E}_k(x) = \varepsilon^r_{(k)}(x)\boldsymbol{G}_r$ と書くと、(1.12) より、

$$\partial_\mu e^{\boldsymbol{E}_k(x)} \cdot e^{-\boldsymbol{E}_k(x)} = (\alpha^{(k)}(x))^r{}_s\boldsymbol{G}_r\partial_\mu\varepsilon^s_{(k)} \tag{1.23}$$

と書ける。$(\alpha^{(k)}(x))^r{}_s$ は実数である。また、$X \in G$, $A \in \mathfrak{g}$ とすると、$XAX^{-1} \in \mathfrak{g}$ であるから、(1.22) より、

$$\partial_\mu\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} = \sum_{k=1}^{n}(\beta^{(k)}(x))^r{}_s\boldsymbol{G}_r\partial_\mu\varepsilon^s_{(k)} \tag{1.24}$$

の形となる。$(\beta^{(k)}(x))^r{}_s$ は実数である。よって、$\partial_\mu\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}$ はリー代数に値を取る。

(1.9) は次のように示される。今、

$$C(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-xH(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\alpha^n}e^{xH(\alpha)}$$

と置くと、$C(0) = 0$ であり、

$$\frac{dC(x)}{dx} = e^{-xH(\alpha)}\frac{\partial H(\alpha)}{\partial\alpha^n}e^{xH(\alpha)}$$

を得る。これを $x = 0$ から $x = 1$ まで積分して、

$$C(1) = e^{-H(\alpha)}\frac{\partial e^{H(\alpha)}}{\partial\alpha^n} = \int_0^1 dx\ e^{-xH(\alpha)}\frac{\partial H(\alpha)}{\partial\alpha^n}e^{xH(\alpha)}$$

を得る。これに左から $e^{H(\alpha)}$ をかけて (1.9) を得る。

2　一般相対論での共変微分

この章は [2] を参考にした。

2.1　共変微分

スカラー ϕ の微分 $\partial_\mu \phi$ は 1 形式の成分である。つまり、

$$\partial'_\mu \phi' = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \phi \tag{2.1}$$

であり、1 形式の成分の変換則を満たす。$T_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_r}{}^{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_s}$ をテンソルの成分とする。ただし、$s + r \geq 1$ とする。この時、$\partial_\mu T_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_r}{}^{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_s}$ は、テンソルの成分でない。この量を修正して、$(r+1, s)$ 型のテンソルの成分を得ることを考える。

テンソルの成分を ψ^A と書く。アフィン変換

$$dx'^\mu = a^\mu{}_\nu dx^\nu,\ a^\mu{}_\nu \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \tag{2.2}$$

によって、ψ^A は、

$$\psi'^A = \boldsymbol{T}^A_B(a) \psi^B \tag{2.3}$$

と変換する[4)]。このとき、

$$\nabla_\mu \psi^A = \partial_\mu \psi^A + (\boldsymbol{\Gamma}_\mu)^A{}_B \psi^B \tag{2.8}$$

という量 (これを共変微分と呼ぶ) が $(r+1, s)$ 型のテンソルの成分になるようにしたい。そのためには、

$$\partial'_\mu \psi'^A + (\boldsymbol{\Gamma}'_\mu)^A{}_B \psi'^B = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \boldsymbol{T}^A_B \nabla_\alpha \psi^B \tag{2.9}$$

であれば良い。左辺は、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \partial_\alpha (\boldsymbol{T}^A_B \psi^B) + (\boldsymbol{\Gamma}'_\mu)^A{}_B \boldsymbol{T}^B_C \psi^C \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \partial_\alpha \boldsymbol{T}^A_B \psi^B + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \boldsymbol{T}^A_B \partial_\alpha \psi^B + (\boldsymbol{\Gamma}'_\mu)^A{}_B \boldsymbol{T}^B_C \psi^C \end{aligned} \tag{2.10}$$

[4)] 例えば、$\psi^A = T_\lambda{}^{\mu\nu}$ の時、$\psi^B = T_\gamma{}^{\alpha\beta}$ と書くと、

$$\boldsymbol{T}^A_B = (a^{-1})^\gamma{}_\lambda a^\mu{}_\alpha a^\nu{}_\beta \tag{2.4}$$

である。続けて変換

$$dx''^\mu = b^\mu{}_\nu dx'^\nu \tag{2.5}$$

を行うと、

$$\psi''^A = \boldsymbol{T}^A_C(b) \boldsymbol{T}^C_B(a) \psi^B = \boldsymbol{T}^A_B(b \cdot a) \psi^B \tag{2.6}$$

である。これより、

$$\boldsymbol{T}^A_B(b \cdot a) = \boldsymbol{T}^A_C(b) \boldsymbol{T}^C_B(a) \tag{2.7}$$

であり、$\boldsymbol{T}$ はアフィン変換の表現行列である

であり、右辺は、

$$(\text{右辺}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\boldsymbol{T}^A_{\ B}\partial_\alpha\psi^B + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\boldsymbol{T}^A_{\ B}(\boldsymbol{\Gamma}_\alpha)^B_{\ C}\psi^C \tag{2.11}$$

である。よって、

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\partial_\alpha\boldsymbol{T}^A_{\ C} + (\boldsymbol{\Gamma}'_\mu)^A_{\ B}\boldsymbol{T}^B_{\ C} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\boldsymbol{T}^A_{\ B}(\boldsymbol{\Gamma}_\alpha)^B_{\ C}, \tag{2.12}$$

$$(\boldsymbol{\Gamma}'_\mu)^A_{\ B} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\Big[-\partial_\alpha\boldsymbol{T}^A_{\ C}\cdot(\boldsymbol{T}^{-1})^C_{\ B} + \boldsymbol{T}^A_{\ D}(\boldsymbol{\Gamma}_\alpha)^D_{\ C}(\boldsymbol{T}^{-1})^C_{\ B}\Big] \tag{2.13}$$

を得る。

(1.24) より、(2.13) の右辺第 1 項の $\partial_\alpha\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}$ の項は、リー代数の基底の線形結合となる。微小アフィン変換は、

$$dx'^\mu = dx^\mu + \varepsilon^\mu_{\ \nu}(x)dx^\nu \tag{2.14}$$

であり[5)] 、これに対してテンソル ψ^A は、

$$\delta\psi^A = \varepsilon^\lambda_{\ \nu}(x)(\boldsymbol{G}^\nu_{\ \lambda})^A_{\ B}\psi^B \tag{2.15}$$

と変換する。$\boldsymbol{G}^\nu_{\ \mu}$ は、アフィン変換群の n^2 個の生成子である。これは、

$$[\boldsymbol{G}^\nu_{\ \mu}, \boldsymbol{G}^\beta_{\ \alpha}] = \delta^\nu_\alpha\boldsymbol{G}^\beta_{\ \mu} - \delta^\beta_\mu\boldsymbol{G}^\nu_{\ \alpha} \tag{2.16}$$

を満たす[6)]。$(\boldsymbol{\Gamma}_\mu)^A_{\ B}$ は、$(\boldsymbol{G}^\nu_{\ \lambda})^A_{\ B}$ の線形結合の項

$$(\boldsymbol{\Gamma}^{(0)}_\mu)^A_{\ B} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^\lambda_{\ \nu\mu}(\boldsymbol{G}^\nu_{\ \lambda})^A_{\ B} \tag{2.18}$$

を含むべきである。それ以外の項を $(\boldsymbol{\Gamma}^{(1)}_\mu)^A_{\ B}$ と書くと、$(\boldsymbol{\Gamma}^{(0)}_\mu)^A_{\ B}$, $(\boldsymbol{\Gamma}^{(1)}_\mu)^A_{\ B}$ はそれぞれ、

$$(\boldsymbol{\Gamma}^{(0)\prime}_\mu)^A_{\ B} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\Big[-(\partial_\alpha\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1})^A_{\ B} + (\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Gamma}^{(0)}_\alpha\boldsymbol{T}^{-1})^A_{\ B}\Big], \tag{2.19}$$

$$(\boldsymbol{\Gamma}^{(1)\prime}_\mu)^A_{\ B} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Gamma}^{(1)}_\alpha\boldsymbol{T}^{-1})^A_{\ B} \tag{2.20}$$

という変換則を満たす。従って、$\partial_\mu\psi^A + (\boldsymbol{\Gamma}^{(0)}_\mu)^A_{\ B}\psi^B$ および $(\boldsymbol{\Gamma}^{(1)}_\mu)^A_{\ B}\psi^B$ は、それぞれが $(r+1,s)$ 型のテンソルの成分になってる。よって、$\boldsymbol{\Gamma}^{(1)}_\mu$ の部分は、共変微分 $\partial_\mu\psi^A + (\boldsymbol{\Gamma}_\mu)^A_{\ B}\psi^B$ を $(r+1,s)$ 型のテンソルの成分にする目的のためには不要である。そのため、ここでは、$\boldsymbol{\Gamma}^{(1)}_\mu = 0$ とする。即ち、

$$(\boldsymbol{\Gamma}_\mu)^A_{\ B} = \Gamma^\lambda_{\ \nu\mu}(\boldsymbol{G}^\nu_{\ \lambda})^A_{\ B} \tag{2.21}$$

[5)] この $\varepsilon^\mu_{\ \nu}(x)$ は、ある微小量 $\varepsilon^\mu(x)$ を用いて、$\varepsilon^\mu_{\ \nu} = \partial_\nu\varepsilon^\mu$ と書ける。(2.14) は座標変換 $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ に対応する。

[6)] 上式は、例えば $\psi^A = T^\alpha$ の時、$\psi^B = T^\beta$ と書くと、

$$(\boldsymbol{G}^\nu_{\ \mu})^\alpha_{\ \beta} = \delta^\alpha_\mu\delta^\nu_\beta \tag{2.17}$$

であることを用いると分かる。

である。このとき、$(\mathbf{\Gamma}'_\mu)^A{}_B = \Gamma'^\lambda{}_{\nu\mu}(\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B$ となる。
$\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$ を接続と呼ぶ。
特に、$\psi^A = T^\lambda$ とし、$\psi^B = T^\nu$ とすると、(2.17), (2.13), (2.21) と、

$$\boldsymbol{T}^\lambda_\nu = a^\lambda{}_\nu = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} \tag{2.22}$$

より、

$$\Gamma'^\lambda{}_{\nu\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\Big[-\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\Gamma^\delta_{\gamma\alpha}\Big] \tag{2.23}$$

を得る。これの第 1 項は、

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} &= -\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Big[\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\Big] + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Big[\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\Big] \\
&= -\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Big[\delta^\lambda_\mu \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\Big] + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x'^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x^\gamma \partial x'^\nu} \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x'^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

なので、

$$\Gamma'^\lambda{}_{\nu\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\Gamma^\delta_{\gamma\alpha} \tag{2.25}$$

とも書ける。
ここで、

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathbf{\Gamma}}'_\mu)^A{}_B &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \Gamma'^\lambda{}_{\nu\mu}(\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B \\
&= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\Big[-\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}(\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\Gamma^\delta_{\gamma\alpha}(\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B\Big]
\end{aligned} \tag{2.26}$$

とする。$\mathbf{\Gamma}'_\mu = \tilde{\mathbf{\Gamma}}'_\mu$ と同値な

$$-\partial_\alpha \boldsymbol{T}^A_C \cdot (\boldsymbol{T}^{-1})^C{}_B + \boldsymbol{T}^A_D(\mathbf{\Gamma}_\alpha)^D{}_C(\boldsymbol{T}^{-1})^C{}_B = -\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}(\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\Gamma^\delta_{\gamma\alpha}(\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B \tag{2.27}$$

を示す。そのためには、微小変換

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu, \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\nu} \tag{2.29}$$

に対して示せば良い。この時、

$$\boldsymbol{T}^A_B = \delta^A_B + \frac{\partial \varepsilon^\lambda}{\partial x^\nu}(\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B, \tag{2.30}$$

$$(\boldsymbol{T}^{-1})^C{}_B = \delta^C_B - \frac{\partial \varepsilon^\lambda}{\partial x^\nu}(\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^C{}_B \tag{2.31}$$

および、

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \delta^\mu_\nu - \frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\nu}, \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} = \frac{\partial^2 \varepsilon^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \tag{2.33}$$

である。まず、ε の 1 次までで、

$$\partial_\alpha \boldsymbol{T}^A_{\ C} \cdot (\boldsymbol{T}^{-1})^C_{\ B} = \frac{\partial^2 \varepsilon^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} ({\boldsymbol{G}^\nu}_\lambda)^A_{\ B}, \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} ({\boldsymbol{G}^\nu}_\lambda)^A_{\ B} = \frac{\partial^2 \varepsilon^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} ({\boldsymbol{G}^\nu}_\lambda)^A_{\ B} \tag{2.35}$$

なので、

$$\partial_\alpha \boldsymbol{T}^A_{\ C} \cdot (\boldsymbol{T}^{-1})^C_{\ B} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} ({\boldsymbol{G}^\nu}_\lambda)^A_{\ B} \tag{2.36}$$

である。次に、ε の 1 次までで、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}^A_{\ D} (\boldsymbol{\Gamma}_\alpha)^D_{\ C} (\boldsymbol{T}^{-1})^C_{\ B} &= (\boldsymbol{\Gamma}_\alpha)^A_{\ B} + \frac{\partial \varepsilon^\lambda}{\partial x^\nu} \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} ([{\boldsymbol{G}^\nu}_\lambda, {\boldsymbol{G}^\gamma}_\beta])^A_{\ B} \\
&= (\boldsymbol{\Gamma}_\alpha)^A_{\ B} + \frac{\partial \varepsilon^\lambda}{\partial x^\nu} \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} (\delta^\nu_\beta {\boldsymbol{G}^\gamma}_\lambda - \delta^\gamma_\lambda {\boldsymbol{G}^\nu}_\beta)^A_{\ B} \\
&= (\boldsymbol{\Gamma}_\alpha)^A_{\ B} + \frac{\partial \varepsilon^\lambda}{\partial x^\beta} \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} ({\boldsymbol{G}^\gamma}_\lambda)^A_{\ B} - \frac{\partial \varepsilon^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} ({\boldsymbol{G}^\nu}_\beta)^A_{\ B}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

であり、

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\delta_{\gamma\alpha} ({\boldsymbol{G}^\nu}_\lambda)^A_{\ B} = (\boldsymbol{\Gamma}_\alpha)^A_{\ B} + \frac{\partial \varepsilon^\lambda}{\partial x^\delta} \Gamma^\delta_{\nu\alpha} ({\boldsymbol{G}^\nu}_\lambda)^A_{\ B} - \frac{\partial \varepsilon^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma^\lambda_{\gamma\alpha} ({\boldsymbol{G}^\nu}_\lambda)^A_{\ B} \tag{2.38}$$

なので、

$$\boldsymbol{T}^A_{\ D} (\boldsymbol{\Gamma}_\alpha)^D_{\ C} (\boldsymbol{T}^{-1})^C_{\ B} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\delta_{\gamma\alpha} ({\boldsymbol{G}^\nu}_\lambda)^A_{\ B} \tag{2.39}$$

である。以上より、$\boldsymbol{\Gamma}'_\mu = \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}'_\mu$ が示された。

よって、(2.23) の変換則を持つ量 ${\Gamma^\lambda}_{\nu\mu}$ を用いて、共変微分

$$\nabla_\mu \psi^A = \partial_\mu \psi^A + {\Gamma^\lambda}_{\nu\mu} ({\boldsymbol{G}^\nu}_\lambda)^A_{\ B} \psi^B \tag{2.40}$$

を定義すると、それは $(r+1, s)$ 型テンソルの成分である。

なお、スカラー ϕ の共変微分は

$$\nabla_\mu \phi \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \phi \tag{2.41}$$

とすれば良い。この節の最初に述べたように、この量は 1 形式の成分の変換則を満たす。また、スカラーに対しては上の議論で $\boldsymbol{T} = 1$ とすればよく、${\boldsymbol{G}^\nu}_\lambda = 0$ となることからも明らかである。

今、

$$C^\lambda_{\ \nu\mu} \stackrel{\text{def}}{=} {\Gamma^\lambda}_{\nu\mu} - {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} \tag{2.42}$$

とすると、(2.25) より、これは (2, 1) 型テンソルの成分の変換則に従う。対応するテンソルを捩率 (torsion) テンソルという。

2.2 共変微分の具体的な式

具体的に共変微分を求める。微小変換 $x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}$ に対して、これに対してテンソル ψ^A は、

$$\delta\psi^A = \frac{\partial\varepsilon^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}(\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\lambda})^A{}_B\psi^B \tag{2.43}$$

と変換する。この時、共変微分は、

$$\nabla_{\mu}\psi^A = \partial_{\mu}\psi^A + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}(\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\lambda})^A{}_B\psi^B$$

であった。例えば、

$$\delta A^{\mu} = \frac{\partial\varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\nu}}A^{\nu}, \tag{2.44}$$

$$\delta A_{\nu} = -\frac{\partial\varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\nu}}A_{\mu} \tag{2.45}$$

より、

$$\nabla_{\rho}A^{\mu} = \partial_{\rho}A^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}A^{\nu}, \tag{2.46}$$

$$\nabla_{\rho}A_{\nu} = \partial_{\rho}A_{\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}A_{\mu} \tag{2.47}$$

となる。一般に、

$$\begin{aligned}\nabla_{\rho}T_{\mu_1\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_s} &= \partial_{\rho}T_{\mu_1\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_s} - \sum_{i=1}^{r}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu_i\rho}T_{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\alpha\mu_{i+1}\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_s} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{s}\Gamma^{\nu_j}{}_{\alpha\rho}T_{\mu_1\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_{j-1}\alpha\nu_{j+1}\cdots\nu_s}\end{aligned} \tag{2.48}$$

である。

2.3 共変微分の性質

T^A, S^B をテンソルの成分とすると、

$$\begin{aligned}\delta(T^AS^B) &= \delta T^AS^B + T^A\delta S^B \\ &= \left[\frac{\partial\varepsilon^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}(\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\lambda})^A{}_{A'}T^{A'}\right]S^B + T^A\frac{\partial\varepsilon^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}(\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\lambda})^B{}_{A'}S^{B'}\end{aligned} \tag{2.49}$$

であるから、ライプニッツ則

$$\nabla_{\mu}(T^AS^B) = (\nabla_{\mu}T^A)S^B + T^A\nabla_{\mu}S^B \tag{2.50}$$

が成り立つ。T^AS^B において、A と B の添え字の間で縮約をした場合も、ライプニッツ則が成り立つ。例えば、$\psi^{\alpha} \overset{\text{def}}{=} T^{\alpha\beta}S_{\beta}$ に対して、

$$\delta\psi^{\alpha} = \delta T^{\alpha\beta}S_{\beta} + T^{\alpha\beta}\delta S_{\beta} \tag{2.51}$$

であるから、

$$\nabla_\mu(T^{\alpha\beta}S_\beta) = (\nabla_\mu T^{\alpha\beta})S_\beta + T^{\alpha\beta}\nabla_\mu S_\beta \tag{2.52}$$

が成り立つ。

δ^β_α は座標変換によって値を変えない ($\delta\delta^\beta_\alpha = 0$)。また、$\partial_\mu\delta^\beta_\alpha = 0$ であるから、

$$\nabla_\mu\delta^\beta_\alpha = 0 \tag{2.53}$$

である。これより、例えば、

$$\delta^\beta_\alpha\nabla_\mu T^{\alpha\gamma}{}_\delta = \nabla_\mu(\delta^\beta_\alpha T^{\alpha\gamma}{}_\delta) = \nabla_\mu T^{\beta\gamma}{}_\delta \tag{2.54}$$

のように、δ^β_α は共変微分を通り抜けることが出来る。また、$\delta^\beta_\alpha = g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}$ なので、

$$g^{\gamma\beta}\nabla_\mu g_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\gamma}\nabla_\mu g^{\gamma\beta} = 0, \tag{2.55}$$

$$\nabla_\mu g^{\alpha\beta} = -g^{\delta\alpha}g^{\gamma\beta}\nabla_\mu g_{\delta\gamma} \tag{2.56}$$

を得る。

多くの場合、

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0 \tag{2.57}$$

を要請する[7)]。このとき (2.56) より、

$$\nabla_\mu g^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.58}$$

が従う。$g_{\alpha\beta}$ や $g^{\alpha\beta}$ は共変微分を通り抜けることが出来る。例えば、

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\mu A_\beta = \nabla_\mu(g^{\alpha\beta}A_\beta) \equiv \nabla_\mu A^\alpha \tag{2.59}$$

である。

2.4 共変微分の交換関係

ところで、ψ^A をテンソルの成分として、

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi^A \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_\mu\nabla_\nu\psi^A - \nabla_\nu\nabla_\mu\psi^A \tag{2.60}$$

という量を考えると、曲率テンソルが現れる。まず、

$$\delta\nabla_\nu\psi^A = \frac{\partial\varepsilon^\lambda}{\partial x^\rho}(\boldsymbol{G}^\rho{}_\lambda)^A{}_B\nabla_\nu\psi^B - \frac{\partial\varepsilon^\rho}{\partial x^\nu}\nabla_\rho\psi^A \tag{2.61}$$

より、

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi^A &= \partial_\mu\nabla_\nu\psi^A + \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}(\boldsymbol{G}^\rho{}_\lambda)^A{}_B\nabla_\nu\psi^B - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}\nabla_\rho\psi^A \\ &= \partial_\mu\partial_\nu\psi^A + \partial_\mu\Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}(\boldsymbol{G}^\rho{}_\lambda)^A{}_B\psi^B + \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}(\boldsymbol{G}^\rho{}_\lambda)^A{}_B\partial_\mu\psi^B + \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}(\boldsymbol{G}^\rho{}_\lambda)^A{}_B\partial_\nu\psi^B \\ &\quad + \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}(\boldsymbol{G}^\rho{}_\lambda)^A{}_C(\boldsymbol{G}^\beta{}_\alpha)^C{}_B\psi^B - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}\nabla_\rho\psi^A\end{aligned} \tag{2.62}$$

[7)] Weyl のゲージ理論では、この式は成り立たない。

である。よって、

$$
\begin{aligned}
[\nabla_\mu,\nabla_\nu]\psi^A = &\partial_\mu\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}(\boldsymbol{G}^\rho{}_\lambda)^A{}_B\psi^B - \partial_\nu\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}(\boldsymbol{G}^\rho{}_\lambda)^A{}_B\psi^B + C^\rho{}_{\mu\nu}\nabla_\rho\psi^A \\
&+\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}(\boldsymbol{G}^\rho{}_\lambda)^A{}_C(\boldsymbol{G}^\beta{}_\alpha)^C{}_B\psi^B - \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(\boldsymbol{G}^\rho{}_\lambda)^A{}_C(\boldsymbol{G}^\beta{}_\alpha)^C{}_B\psi^B
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

である。右辺第 2 行目は、

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}(\boldsymbol{G}^\rho{}_\lambda)^A{}_C(\boldsymbol{G}^\beta{}_\alpha)^C{}_B\psi^B - \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}(\boldsymbol{G}^\beta{}_\alpha)^A{}_C(\boldsymbol{G}^\rho{}_\lambda)^C{}_B\psi^B \\
&= \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}([\boldsymbol{G}^\rho{}_\lambda,\boldsymbol{G}^\beta{}_\alpha])^A{}_B\psi^B \\
&= \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}(\delta^\rho_\alpha\boldsymbol{G}^\beta{}_\lambda - \delta^\beta_\lambda\boldsymbol{G}^\rho{}_\alpha)^A{}_B\psi^B \\
&= (\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu})(\boldsymbol{G}^\rho{}_\lambda)^A{}_B\psi^B
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

なので、

$$
[\nabla_\mu,\nabla_\nu]\psi^A = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(\boldsymbol{G}^\beta{}_\alpha)^A{}_B\psi^B + C^\rho{}_{\mu\nu}\nabla_\rho\psi^A \tag{2.65}
$$

を得る。ここで、

$$
R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\rho\alpha}\Gamma^\rho{}_{\lambda\beta} - \Gamma^\mu{}_{\rho\beta}\Gamma^\rho{}_{\lambda\alpha} \tag{2.66}
$$

は曲率テンソルである。例えば、

$$
[\nabla_\mu,\nabla_\nu]A^\lambda = R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}A^\rho + C^\rho{}_{\mu\nu}\nabla_\rho A^\lambda \tag{2.67}
$$

および、

$$
[\nabla_\mu,\nabla_\nu]A_\lambda = -R^\rho{}_{\lambda\mu\nu}A_\rho + C^\rho{}_{\mu\nu}\nabla_\rho A_\lambda \tag{2.68}
$$

である。

2.5 テンソル密度の共変微分

ウエイト n のテンソル密度を、

$$
T'_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_s} = \left[\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right]^n \frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\lambda_1}}\cdots\frac{\partial x^{\lambda_r}}{\partial x'^{\mu_r}}\frac{\partial x'^{\nu_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\nu_s}}{\partial x^{\sigma_s}}T_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}{}^{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_s} \tag{2.69}
$$

と変換する量として導入する。例えば、$\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}$ を完全反対称で $\varepsilon_{012\cdots n-1} = 1$ いう量とする。これはウエイト -1 のテンソル密度である。また、ウエイト n の擬テンソル密度を

$$
T'_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_s} = \left|\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right|^n \frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\lambda_1}}\cdots\frac{\partial x^{\lambda_r}}{\partial x'^{\mu_r}}\frac{\partial x'^{\nu_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\nu_s}}{\partial x^{\sigma_s}}T_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}{}^{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_s} \tag{2.70}
$$

と変換する量として導入する。ψ^A をテンソルとし、$g = \det(g_{\mu\nu})$ とするとき、$(\sqrt{-g})^n\psi^A$ はウエイト n の擬テンソル密度である。テンソル密度や擬テンソル密度の共変微分を考える。

テンソルの時の同様に、微小変換 $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$ に対して、量 ψ^A が、

$$
\delta\psi^A = \frac{\partial\varepsilon^\lambda}{\partial x^\nu}(\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B\psi^B \tag{2.71}
$$

と変換する時、その共変微分は、

$$\nabla_\mu \psi^A = \partial_\mu \psi^A + \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} (\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B \psi^B \tag{2.72}$$

である。

$$\frac{\partial(x)}{\partial(x')} = 1 - \partial_\alpha \varepsilon^\alpha \tag{2.73}$$

なので、

$$\left[\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right]^n = \left|\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right|^n = 1 - n\partial_\alpha \varepsilon^\alpha \tag{2.74}$$

である。よって、ウエイト n のテンソル密度や擬テンソル密度の共変微分は、

$$\begin{aligned}\nabla_\rho T_{\mu_1\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_s} = \partial_\rho T_{\mu_1\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_s} - n\Gamma^\alpha{}_{\alpha\rho} T_{\mu_1\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_s} \\ - \sum_{i=1}^{r} \Gamma^\alpha{}_{\mu_i\rho} T_{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\alpha\mu_{i+1}\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_s} \\ + \sum_{j=1}^{s} \Gamma^{\nu_j}{}_{\alpha\rho} T_{\mu_1\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_{j-1}\alpha\nu_{j+1}\cdots\nu_s}\end{aligned} \tag{2.75}$$

である。特にリーマン接続では、

$$\Gamma^\alpha{}_{\alpha\rho} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho \sqrt{-g} \tag{2.76}$$

である。よって、リーマン接続では、

$$\nabla_\rho (\sqrt{-g})^n = 0 \tag{2.77}$$

であり、ψ^A がテンソル (またはテンソル密度, 擬テンソル密度) の時、

$$\nabla_\rho [(\sqrt{-g})^n \psi^A] = (\sqrt{-g})^n \nabla_\rho \psi^A \tag{2.78}$$

となる。

　T^μ をテンソル, $F^{\mu\nu}$ を反対称テンソルとし、$\boldsymbol{T}^\mu = \sqrt{-g} T^\mu$, $\boldsymbol{F}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} F^{\mu\nu}$ とすると、リーマン接続では、

$$\nabla_\mu \boldsymbol{T}^\mu = \partial_\mu \boldsymbol{T}^\mu, \tag{2.79}$$

$$\nabla_\mu \boldsymbol{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{F}^{\mu\nu} \tag{2.80}$$

となる ([3] の p.80)。

References

[1] 山内 恭彦, 杉浦 光夫『連続群論入門』(培風館, 1960 年).

[2] 内山龍雄『一般ゲージ場論序説』(岩波書店, 1987 年).

[3] 内山龍雄『一般相対性理論』(裳華房, 1978 年).