$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^r}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^r}$ $(r = 0, 1, 2, \cdots)$

中嶋 慧

September 13, 2021

Abstract

この記事では、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^r}$ および $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^r} (r = 0, 1, 2, \cdots)$ の $x = 0$ の周りでの展開式を求める。

Contents

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$

$\alpha \geq 0$ とし、

$$S_r(\alpha, x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^r} e^{-\alpha n}, \tag{1.1}$$

$$C_r(\alpha, x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^r} e^{-\alpha n} \tag{1.2}$$

と置く。また、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \to +0} S_0(\alpha, x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \to +0} C_0(\alpha, x), \tag{1.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \to +0} S_1(\alpha, x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \to +0} C_1(\alpha, x) \tag{1.4}$$

とする。$r \geq 2$ のとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^r} = S_r(0,x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^r} = C_r(0,x) \tag{1.5}$$

である。

まず S_0 を求める。$R \overset{\text{def}}{=} e^{ix-\alpha}$ とすると、

$$\begin{aligned} S_0(\alpha,x) &= \frac{1}{2i}\Big(\frac{R}{1-R} - \frac{R^*}{1-R^*}\Big) \\ &= \frac{1}{2i}\frac{R-R^*}{1+|R|^2-(R+R^*)} \\ &= \frac{e^{-\alpha}\sin x}{1+e^{-2\alpha}-2e^{-\alpha}\cos x} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cosh\alpha - \cos x} \end{aligned} \tag{1.6}$$

である。

よって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) = \lim_{\alpha\to+0} S_0(\alpha,x) = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{1-\cos x} \tag{1.7}$$

である。

2 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)$

$C_0(\alpha,x)$ を求める。$R \overset{\text{def}}{=} e^{ix-\alpha}$ とすると、

$$\begin{aligned} C_0(\alpha,x) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{R}{1-R} + \frac{R^*}{1-R^*}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\frac{R+R^*-2|R|^2}{1+|R|^2-(R+R^*)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2e^{-\alpha}\cos x - 2e^{-2\alpha}}{1+e^{-2\alpha}-2e^{-\alpha}\cos x} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{e^{-\alpha}-\cos x}{\cosh\alpha - \cos x} \end{aligned} \tag{2.1}$$

となる。よって、$\cos x \neq 1$ なら、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) = \lim_{\alpha\to+0} C_0(\alpha,x) = -\frac{1}{2} \quad (\cos x \neq 1) \tag{2.2}$$

である。ところで、

$$2\pi\delta_{2\pi}(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x+2\pi k) \tag{2.3}$$

であるから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) = \pi\delta_{2\pi}(x) - \frac{1}{2} \tag{2.4}$$

となる。

3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$

$$\frac{\partial C_1(\alpha, x)}{\partial \alpha} = -C_0(\alpha, x) \tag{3.1}$$

であり、

$$\lim_{\alpha\to\infty} C_1(\alpha, x) = 0 \tag{3.2}$$

より、

$$\begin{aligned} C_1(\alpha, x) &= \int_{\infty}^{\alpha} d\theta\ [-C_0(\theta, x)] \\ &= \int_{\infty}^{\alpha} d\theta\ \frac{1}{2}\frac{e^{-\theta} - \cos x}{\cosh\theta - \cos x} \end{aligned} \tag{3.3}$$

である。$t \overset{\text{def}}{=} e^{\theta}$ とし、

$$\begin{aligned} C_1(\alpha, x) &= \int_{\infty}^{e^{\alpha}} dt\ \frac{1}{t}\frac{t^{-1} - \cos x}{t + t^{-1} - 2\cos x} \\ &= \int_{\infty}^{e^{\alpha}} dt\ \left(-\frac{\cos x}{(t - \cos x)^2 + \sin^2 x} + \frac{1}{t}\frac{1}{(t - \cos x)^2 + \sin^2 x} \right) \\ &= \int_{\infty}^{e^{\alpha}} dt\ \left(\frac{1}{t} - \frac{t - \cos x}{(t - \cos x)^2 + \sin^2 x} \right) \\ &= \alpha - \frac{1}{2}\ln\left[(e^{\alpha} - \cos x)^2 + \sin^2 x \right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

を得る。

よって、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} &= C_1(0, x) \\ &= -\frac{1}{2}\ln\Big[2(1 - \cos x) \Big] \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left[4\sin^2\frac{x}{2} \right] \\ &= -\ln|\sin\frac{x}{2}| - \ln 2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

となる。これを x で展開する。まず、

$$\begin{aligned}\sin\frac{x}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} \\ &= \frac{x}{2}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(2n+1)!}\Big] \\ &= \frac{x}{2}\Big[1-\frac{x^2}{24}+\frac{x^4}{1920}-\mathcal{O}(x^6)\Big] \end{aligned} \tag{3.6}$$

なので、

$$\begin{aligned}C_1(0,x) &= -\ln|x| - \ln\Big[1-\frac{x^2}{24}+\frac{x^4}{1920}-\mathcal{O}(x^6)\Big] \\ &= -\ln|x| + \frac{x^2}{24} - \frac{x^4}{1920} + \frac{1}{2}\Big(-\frac{x^2}{24}\Big)^2 + \mathcal{O}(x^6) \\ &= -\ln|x| + \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{2880} + \mathcal{O}(x^6) \end{aligned} \tag{3.7}$$

を得る：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n} = -\ln|x| + \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{2880} + \mathcal{O}(x^6). \tag{3.8}$$

4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{2a+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^{2a}}$

今、

$$\mathcal{C}_2(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^x dx'\ C_1(0,x'), \tag{4.1}$$

$$\mathcal{C}_{r+1}(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^x dx'\ \mathcal{C}_r(x') \tag{4.2}$$

と置く。

$$\lim_{\alpha\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}e^{-\alpha n} = C_1(0,x) \tag{4.3}$$

を $x=0$ から x まで積分して、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2} = \mathcal{C}_2(x) \tag{4.4}$$

を得る。これは、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2} = -x\ln|x| + x + \frac{x^3}{72} + \frac{x^5}{14400} + \mathcal{O}(x^7) \tag{4.5}$$

を意味する。

(4.4) を $x=0$ から x まで積分して、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(nx)}{n^3}=\mathcal{C}_3(x), \tag{4.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}-\mathcal{C}_3(x) \tag{4.7}$$

を得る。これは、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}+\frac{x^2}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}x^2-\frac{x^4}{288}-\frac{x^6}{86400}+\mathcal{O}(x^8) \tag{4.8}$$

を意味する。

(4.7) を $x=0$ から x まで積分して、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^4}=\zeta(3)x-\mathcal{C}_4(x) \tag{4.9}$$

を得る。これを $x=0$ から x まで積分して、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(nx)}{n^5}=\frac{\zeta(3)}{2}x^2-\mathcal{C}_5(x), \tag{4.10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^5}=\zeta(5)-\frac{\zeta(3)}{2}x^2+\mathcal{C}_5(x) \tag{4.11}$$

を得る。以下同様である。

実は $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^r}$ $(r=2a+1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^r}$ $(r=2a)$ は、Milnor 型の多重 sine 関数 $S_r^M(x)$ の対数 $\ln S_r^M(x)$ と関係する [1]。

5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{2a}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^{2a+1}}$

(2.4) は、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)=\pi\delta_{2\pi}(x)-\frac{1}{2} \tag{5.1}$$

であった。これを $x=0$ から x まで積分して、

$$\lim_{\alpha\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}e^{-\alpha n}=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x)-\frac{1}{2}x \tag{5.2}$$

を得る。これを更に $x=0$ から x まで積分して、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(nx)}{n^2}=\frac{\pi}{2}|x|-\frac{1}{4}x^2, \tag{5.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}=\zeta(2)-\frac{\pi}{2}|x|+\frac{1}{4}x^2 \tag{5.4}$$

を得る。これを更に $x=0$ から x まで積分して、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}=\zeta(2)x-\frac{\pi}{4}|x|x+\frac{1}{12}x^3 \tag{5.5}$$

これを更に $x=0$ から x まで積分して、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(nx)}{n^4}=\frac{\zeta(2)}{2}x^2-\frac{\pi}{12}|x|^3+\frac{1}{48}x^4, \tag{5.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^4}=\zeta(4)-\frac{\zeta(2)}{2}x^2+\frac{\pi}{12}|x|^3-\frac{1}{48}x^4 \tag{5.7}$$

を得る。以下同様である。

実は $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^r}$ $(r=2a)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^r}$ $(r=2a+1)$ は、ベルヌーイ多項式 $B_r(x)$ と関係する [1]。

6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^r}$ $(r=2,3,4,5,6)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}=\zeta(2)-\frac{\pi}{2}|x|+\frac{1}{4}x^2, \tag{6.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^3}=\zeta(3)+\frac{x^2}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}x^2-\frac{x^4}{288}-\frac{x^6}{86400}+\mathcal{O}(x^8), \tag{6.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^4}=\zeta(4)-\frac{\zeta(2)}{2}x^2+\frac{\pi}{12}|x|^3-\frac{1}{48}x^4, \tag{6.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^5}=\zeta(5)-\frac{\zeta(3)}{2}x^2+\frac{25-12\ln|x|}{288}x^4+\frac{x^6}{8640}+\mathcal{O}(x^8), \tag{6.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^6}=\zeta(6)-\frac{\zeta(4)}{2}x^2+\frac{\zeta(2)}{24}x^4-\frac{\pi}{240}|x|^5+\frac{x^6}{1440} \tag{6.5}$$

References

[1] https://nbviewer.jupyter.org/github/genkuroki/Calculus/blob/master/A02%20Hurwitz%20zeta%20function.ipynb?%20ush%20cache=true