円周率のある近似分数系列について

中嶋 慧

2018 年 8 月 12 日

Contents

1　本論

n, m を自然数とし、

$$I_{n,m} \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 dx \, \frac{x^n(1-x)^m}{1+x^2} \tag{1.1}$$

とする。これは正であり、n, m の増加とともに 0 に近づく。$I_{n,m}$ の計算を通して、円周率のある近似分数の系列が得られることを以下に示す。

$x = \tan\theta$ と変換して、

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \int_0^{\pi/4} d\theta \ \tan^n \theta (1 - \tan\theta)^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} J_{n+k}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$J_k \overset{\text{def}}{=} \int_0^{\pi/4} d\theta \ \tan^k \theta \tag{1.3}$$

を得る。ここで、J_k は以下のように求まる：

$$J_0 = \frac{\pi}{4}, \tag{1.4}$$

$$J_1 = \frac{\ln 2}{2}, \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} J_k &= \int_0^{\pi/4} d\theta\ \tan^{k-2}\theta\Big(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\Big) \\ &= \frac{1}{k-1} - J_{k-2} \quad (k \geq 2) \end{aligned} \tag{1.6}$$

より、

$$J_{2l} \ = \ j_l + (-1)^l \frac{\pi}{4}, \tag{1.7}$$

$$j_l \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 \quad \text{for} \quad l = 0 \\ \frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2l-3} + \cdots - (-1)^l \quad \text{for} \ \ l \geq 1 \end{cases} \tag{1.8}$$

および、

$$J_{2l+1} \ = \ k_l + (-1)^l \frac{\ln 2}{2}, \tag{1.9}$$

$$k_l \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 \quad \text{for} \quad l = 0 \\ \frac{1}{2l} - \frac{1}{2l-2} + \cdots - (-1)^l \frac{1}{2} \quad \text{for} \ \ l \geq 1 \end{cases} . \tag{1.10}$$

これらを (1.2) に代入して、次を得る。

1.1 $n = 2n'$

まず、$n = 2n'$ のとき、

$$\begin{aligned} I_{2n',m} &= \sum_{k=0}^{[m/2]} \binom{m}{2k} J_{2(n'+k)} - \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} \binom{m}{2k+1} J_{2(n'+k)+1} \\ &= \sum_{k=0}^{[m/2]} \binom{m}{2k} j_{n'+k} - \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} \binom{m}{2k+1} k_{n'+k} \\ &\quad + (-1)^{n'} \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \binom{m}{2k} - (-1)^{n'} \frac{\ln 2}{2} \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} (-1)^k \binom{m}{2k+1} \end{aligned} \tag{1.11}$$

となる。§ 2 で示すように、

$$\sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \binom{m}{2k} = 2^{m/2} \cos \frac{m\pi}{4}, \tag{1.12}$$

$$\sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} (-1)^k \binom{m}{2k+1} = 2^{m/2} \sin \frac{m\pi}{4} \tag{1.13}$$

なので、

$$I_{2n',m} = \sum_{k=0}^{[m/2]} \binom{m}{2k} j_{n'+k} - \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} \binom{m}{2k+1} k_{n'+k}$$
$$+(-1)^{n'} \frac{\pi}{4} 2^{m/2} \cos\frac{m\pi}{4} - (-1)^{n'} \frac{\ln 2}{2} 2^{m/2} \sin\frac{m\pi}{4} \tag{1.14}$$

となる。よって、m が 4 の倍数の時 $(m = 4m')$、この式から $\ln 2$ が消える：

$$0 < I_{2n',4m'} = \sum_{k=0}^{2m'} \binom{4m'}{2k} j_{n'+k} - \sum_{k=0}^{2m'-1} \binom{4m'}{2k+1} k_{n'+k} + (-1)^{n'+m'} 2^{2m'-2}\pi. \tag{1.15}$$

よって、

$$\pi_{2n',4m'} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{n'+m'} 2^{-2m'+2} \Big[\sum_{k=0}^{2m'-1} \binom{4m'}{2k+1} k_{n'+k} - \sum_{k=0}^{2m'} \binom{4m'}{2k} j_{n'+k} \Big] \tag{1.16}$$

は π の近似分数であり、$n' + m' = n/2 + m/4$ が偶数なら下からの近似で、$n' + m'$ が奇数なら上からの近似である。

例えば、

$$\pi_{2,0} = 4 > \pi, \tag{1.17}$$
$$\pi_{2,4} = \frac{47}{15} = 3.1\dot{3} < \pi, \tag{1.18}$$
$$\pi_{4,4} = \frac{22}{7} = 3.1428571428571 \cdots > \pi, \tag{1.19}$$
$$\pi_{8,8} = \frac{47171}{15015} = 3.141591741591741 \cdots < \pi, \tag{1.20}$$
$$\pi_{12,12} = \frac{431302721}{137287920} = 3.141592654328217 > \pi \tag{1.21}$$

である。

1.2 $n = 2n' + 1$

$n = 2n' + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} I_{2n'+1,m} &= \sum_{k=0}^{[m/2]} \binom{m}{2k} J_{2(n'+k)+1} - \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} \binom{m}{2k+1} J_{2(n'+k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{[m/2]} \binom{m}{2k} k_{n'+k} - \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} \binom{m}{2k+1} j_{n'+k+1} \\ &\quad +(-1)^{n'} \frac{\ln 2}{2} \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \binom{m}{2k} + (-1)^{n'} \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} (-1)^k \binom{m}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{[m/2]} \binom{m}{2k} k_{n'+k} - \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} \binom{m}{2k+1} j_{n'+k+1} \\ &\quad +(-1)^{n'} \frac{\ln 2}{2} 2^{m/2} \cos\frac{m\pi}{4} + (-1)^{n'} \frac{\pi}{4} 2^{m/2} \sin\frac{m\pi}{4} \end{aligned} \tag{1.22}$$

である。よって、$m = 4m' + 2 = 2, 6, 10., \cdots$ のとき、この式から $\ln 2$ が消える：

$$0 < I_{2n'+1,4m'+2} = \sum_{k=0}^{2m'+1} \binom{4m'+2}{2k} k_{n'+k} - \sum_{k=0}^{2m'} \binom{4m'+2}{2k+1} j_{n'+k+1} + (-1)^{n'+m'} 2^{2m'-1}\pi. \tag{1.23}$$

よって、

$$\pi_{2n'+1,4m'+2} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (-1)^{n'+m'} 2^{-2m'+1} \Big[\sum_{k=0}^{2m'} \binom{4m'+2}{2k+1} j_{n'+k+1} - \sum_{k=0}^{2m'+1} \binom{4m'+2}{2k} k_{n'+k} \Big] \tag{1.24}$$

π の近似分数であり、$n' + m' = n/2 + m/4 + 1$ が偶数なら下からの近似で、$n' + m'$ が奇数なら上からの近似である。

n の偶奇によらず、得られる近似分数は、$n' - m' = n/2 - m/4$ が偶数なら下から、奇数なら上からの近似である。

例えば、

$$\pi_{1,2} = 3, \tag{1.25}$$

$$\pi_{3,2} = \frac{19}{6} = 3.1\dot{6} > \pi, \tag{1.26}$$

$$\pi_{5,6} = \frac{377}{120} = 3.141\dot{6} > \pi, \tag{1.27}$$

$$\pi_{7,6} = \frac{174169}{55440} = 3.14157647907647 < \pi, \tag{1.28}$$

$$\pi_{9,10} = \frac{777607}{247520} = 3.141592598577892 < \pi \tag{1.29}$$

である。

2　付録 : (1.12), (1.13) の証明

2.1　(1.12) の証明

$$\sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \binom{m}{2k} = -\sum_{k=0}^{[m/2]} \binom{m}{2k} + 2\sum_{k=0}^{[m/4]} \binom{m}{4k} \tag{2.1}$$

であるから、$r = 2, 4$ として、

$$S_r \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{[m/r]} \binom{m}{rk} \tag{2.2}$$

を求めれば良い。

2 項定理は、

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m \tag{2.3}$$

である。今、

$$\zeta_r \stackrel{\text{def}}{=} e^{i2\pi/r} \tag{2.4}$$

とすると、

$$1 + \zeta_r^k + \zeta_r^{2k} + \cdots + \zeta_r^{k(r-1)} = \begin{cases} 0 & \text{for } (k \text{ が } r \text{ の倍数でない}) \\ r & \text{for } (k \text{ が } r \text{ の倍数}) \end{cases} \tag{2.5}$$

なので、

$$S_r = \frac{1}{r}[(1+1)^m + (1+\zeta_r)^m + \cdots + (1+\zeta_r^{r-1})^m] \tag{2.6}$$

となる (これは、$r = 1, 2, 3, \cdots$ について成り立つ)。よって、

$$S_2 = 2^{m-1} \tag{2.7}$$

であり、

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{4}[2^m + (1+i)^m + (1-i)^m] \\ &= \frac{1}{2}[2^{m-1} + 2^{m/2}\cos\frac{m\pi}{4}] \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。よって、

$$\sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \binom{m}{2k} = -S_2 + 2S_4 = 2^{m/2}\cos\frac{m\pi}{4}. \tag{2.9}$$

これは (1.12) である。

2.2 (1.13) の証明

$$\sum_{k=0}^{[(m-1)/2]}(-1)^k\binom{m}{2k+1} = -\sum_{k=0}^{[(m-1)/2]}\binom{m}{2k+1} + 2\sum_{k=0}^{[(m-1)/4]}\binom{m}{4k+1} \tag{2.10}$$

であり、

$$-\sum_{k=0}^{[(m-1)/2]}\binom{m}{2k+1} = -\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} + S_2 = -2^{m-1} \tag{2.11}$$

なので、

$$\sum_{k=0}^{[(m-1)/2]}(-1)^k\binom{m}{2k+1} = -2^{m-1} + 2\sum_{k=0}^{[(m-1)/4]}\binom{m}{4k+1}. \tag{2.12}$$

(2.3) より、

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{k-1} = \frac{1}{x}(1+x)^m \tag{2.13}$$

である。これと、(2.5) より、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{[(m-1)/4]}\binom{m}{4k+1} &= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{1}(1+1)^m + \frac{1}{\zeta_4}(1+\zeta_4)^m + +\frac{1}{\zeta_4^2}(1+\zeta_4^2)^m + +\frac{1}{\zeta_4^3}(1+\zeta_4^3)^m\Big] \\ &= \frac{1}{4}\Big[2^m + \frac{1}{i}(1+i)^m - \frac{1}{i}(1-i)^m\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[2^{m-1} + 2^{m/2}\sin\frac{m\pi}{4}\Big] \end{aligned} \tag{2.14}$$

なので、

$$\sum_{k=0}^{[(m-1)/2]}(-1)^k\binom{m}{2k+1} = 2^{m/2}\sin\frac{m\pi}{4}. \tag{2.15}$$

これは (1.13) である。