ワイルスピノール

中嶋 慧

June 25, 2020

Contents

1 クリフォード代数とローレンツ変換

$\{e_\mu\}$ をクリフォード代数の基底とする。ただし、

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2\eta_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

$$\eta_{\mu\nu} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1) \tag{1.2}$$

とする。このとき、

$$T \overset{\text{def}}{=} 1 + \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu} e_{\mu\nu}\,, \quad e_{\mu\nu} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(e_\mu e_\nu - e_\nu e_\mu)\,, \quad \varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu} \tag{1.3}$$

に対して、

$$T e_\mu T^{-1} = \Lambda^\nu{}_\mu e_\nu\,, \quad \Lambda^\nu{}_\mu = \delta^\mu_\nu + \varepsilon^\nu{}_\mu \tag{1.4}$$

となることを示す。上式より、

$$T e_\mu T^{-1} = e_\mu + \frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta}[e_{\alpha\beta}, e_\mu] \tag{1.5}$$

である。ところで、公式

$$[AB, C] = A[B, C]_+ - [A, C]_+ B \tag{1.6}$$

が成り立つ。ここで、$[A,B] \stackrel{\mathrm{def}}{=} AB-BA$, $[A,B]_+ \stackrel{\mathrm{def}}{=} AB+BA$ である。よって、$[e_{\alpha\beta}, e_\mu]$ は、

$$
\begin{aligned}
[e_{\alpha\beta}, e_\mu] &= \frac{1}{2}[e_\alpha e_\beta - e_\beta e_\alpha, e_\mu] \\
&= \frac{1}{2}(e_\alpha[e_\beta, e_\mu]_+ - [e_\alpha, e_\mu]_+ e_\beta - e_\beta[e_\alpha, e_\mu]_+ + [e_\beta, e_\mu]_+ e_\alpha) \\
&= e_\alpha \eta_{\beta\mu} - \eta_{\alpha\mu} e_\beta - e_\beta \eta_{\alpha\mu} + \eta_{\beta\mu}\gamma^a \\
&= 2(e_\alpha \eta_{\beta\mu} - \eta_{\alpha\mu} e_\beta) \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

となる。これより、

$$
\begin{aligned}
T e_\mu T^{-1} &= e_\mu + \varepsilon^\alpha{}_\mu e_\alpha \\
&= (\delta^\nu_\mu + \varepsilon^\nu{}_\mu) e_\nu \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

となり、(1.4) が示される。

有限変換では、

$$
T \stackrel{\mathrm{def}}{=} \exp\left(\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu} e_{\mu\nu}\right) \qquad (1.9)
$$

に対して、

$$
T e_\mu T^{-1} = \Lambda^\nu{}_\mu e_\nu\,, \quad \Lambda^\nu{}_\mu = \left[\exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\right)\right]^\nu{}_\mu, \qquad (1.10)
$$

$$
(M_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\mu \eta_{\nu\beta} - \delta^\alpha_\nu \eta_{\mu\beta} \qquad (1.11)
$$

となる。

2　4 次元の場合

以下では 4 次元時空を考える。この時、

$$
\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu} M_{\mu\nu} = \varepsilon^{0k} M_{0k} + \varepsilon^{23} M_{23} + \varepsilon^{31} M_{31} + \varepsilon^{12} M_{12} \qquad (2.1)
$$

である。また。

$$
(M_{0k})^0{}_i = \delta_{ik} = (M_{0k})^i{}_0\,, \quad (M_{0k})^l{}_m = 0 \qquad (2.2)
$$

および、

$$
(M_{ik})^l{}_m = \delta^l_i \delta_{km} - \delta^l_k \delta_{im}\,, \quad (M_{ik})^0{}_\mu = 0 = (M_{ik})^\mu{}_0 \qquad (2.3)
$$

である。今、

$$
\varphi^k \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\varepsilon^{0k}, \qquad (2.4)
$$

$$
\varepsilon^{ik} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon^{ik}{}_l \theta^l \qquad (2.5)
$$

とすると、

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}M_{\mu\nu} \;=\; i\varphi^k K_k + i\theta^k J_k, \tag{2.6}$$

$$K_k \overset{\text{def}}{=} iM_{0k}, \tag{2.7}$$

$$J_k \overset{\text{def}}{=} -\frac{i}{2}\varepsilon^{il}{}_k M_{il} \tag{2.8}$$

となる。なお、

$$(K_k)^0{}_l = i\delta_{lk} = (K_k)^l{}_0\,, \quad (K_k)^l{}_m = 0, \tag{2.9}$$

$$(J_k)^l{}_m = -i\varepsilon^l{}_{mk}\,, \quad (J_k)^0{}_\mu = 0 = (J_k)^\mu{}_0 \tag{2.10}$$

である。

　よって、

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \Big[\exp\Big(i\varphi^k K_k + i\theta^k J_k\Big)\Big]^\nu{}_\mu \tag{2.11}$$

3　四元数とローレンツ変換

　今、

$$e_0 T = T^* e_0\,, \quad T = e^X\,, \quad T^* = e^{X^*} \tag{3.1}$$

と置くと、

$$T^*(-e_0 e_\mu)T^{-1} = \Lambda^\nu{}_\mu(-e_0 e_\nu) \tag{3.2}$$

となる。ここで、

$$X \;=\; \frac{1}{2}(-\varphi^k e_0 e_k + \theta^1 e_2 e_3 + \theta^2 e_3 e_1 + \theta^3 e_1 e_2), \tag{3.3}$$

$$X^* \;=\; \frac{1}{2}(\varphi^k e_0 e_k + \theta^1 e_2 e_3 + \theta^2 e_3 e_1 + \theta^3 e_1 e_2) \tag{3.4}$$

である。

　今、

$$h = -e_0 e_1 e_2 e_3, \tag{3.5}$$

$$hi_k = -e_0 e_k, \tag{3.6}$$

$$i_1 = -e_2 e_3\,, \quad i_2 = -e_3 e_1\,, \quad i_3 = -e_1 e_2 \tag{3.7}$$

とすると、i_k は四元数の虚数単位とみなせる。よって、

$$q \overset{\text{def}}{=} q^0 + q^k h i_k \quad (q^\mu \in \mathbb{R}) \tag{3.8}$$

とすると、

$$e^{X^*} q e^{-X} = q' = q'^0 + q'^k h i_k\,, \quad q'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu q^\nu \tag{3.9}$$

となる。ここで、

$$X^* = -\frac{1}{2}(\varphi^k h i_k + \theta^k i_k), \tag{3.10}$$

$$-X = \frac{1}{2}(-\varphi^k h i_k + \theta^k i_k) \tag{3.11}$$

なので、$A \stackrel{\text{def}}{=} e^{X^*}$ とすると、$e^{-X} = \tilde{A}^*$ である：

$$Aq\tilde{A}^* = q'. \tag{3.12}$$

ここで、* は h についての複素共役で、$\tilde{\bullet}$ は $\bullet$ の四元共役 (i_k を $-i_k$ にする) である。
(3.9) の複素共役より、

$$e^X q^* e^{-X^*} = (q^*)', \tag{3.13}$$

$$q^* = q^0 - q^k h i_k\,, \quad (q^*)' = q'^0 - q'^k h i_k\,, \quad q'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu q^\nu \tag{3.14}$$

を得る。

4 パウリ行列とローレンツ変換

さて、h を i と書き、

$$\sigma_k \stackrel{\text{def}}{=} i i_k, \tag{4.1}$$

$$i_k = -i\sigma_k \tag{4.2}$$

と置く。σ_k はパウリ行列である。よって、

$$q = q^0 + q^k \sigma_k \tag{4.3}$$

であり、

$$e^{X^*} q e^{-X} = q', \tag{4.4}$$

$$X^* = -\varphi^k \frac{\sigma_k}{2} + i\theta^k \frac{\sigma_k}{2}, \tag{4.5}$$

$$-X = -\varphi^k \frac{\sigma_k}{2} - i\theta^k \frac{\sigma_k}{2} \tag{4.6}$$

となる。よって、

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(i\theta^k \frac{\sigma_k}{2} - \varphi^k \frac{\sigma_k}{2}\right) \tag{4.7}$$

とすると、

$$DqD^\dagger = q' \tag{4.8}$$

である。$X^\dagger$ は X のエルミート共役である。今、

$$\sigma_\mu \stackrel{\text{def}}{=} (1_2, \sigma_k) \tag{4.9}$$

とすると、(4.8) は、

$$D\sigma_\mu D^\dagger = \Lambda^\nu{}_\mu \sigma_\nu \tag{4.10}$$

を意味する。
　また、

$$C \overset{\text{def}}{=} \exp\left(i\theta^k \frac{\sigma_k}{2} + \varphi^k \frac{\sigma_k}{2}\right) \tag{4.11}$$

とすると、(3.13) は、

$$C\bar{\sigma}_\mu C^\dagger \;=\; \Lambda^\nu{}_\mu \bar{\sigma}_\nu, \tag{4.12}$$

$$\bar{\sigma}_\mu \overset{\text{def}}{=} (1_2, -\sigma_k) \tag{4.13}$$

である。C は、

$$C = (D^\dagger)^{-1} = (D^{-1})^\dagger \tag{4.14}$$

である。

5　ワイルスピノール

　ローレンツ群の $(\frac{1}{2}, 0)$ 表現 η と $(0, \frac{1}{2})$ 表現 ξ は、

$$\eta' = C\eta, \tag{5.1}$$

$$\xi' = D\xi \tag{5.2}$$

と変換する。これらをワイルスピノールという。
　(4.10), (4.12) より、

$$\mathcal{L}_\eta \overset{\text{def}}{=} \eta^\dagger \sigma_\mu \partial^\mu \eta, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{L}_\xi \overset{\text{def}}{=} \xi^\dagger \bar{\sigma}_\mu \partial^\mu \xi \tag{5.4}$$

はローレンツ不変である。