弱値と一般擬確率分布

中嶋 慧

平成 30 年 3 月 22 日

このノートは、論文 [1, 2]、特に [1] を解読したものである。

目 次

1 弱測定

注目系 S の物理量 A がポインター系 E の重心運動量 P と結合しているとする：

$$H_{\rm int}(t) \,=\, G(t)AP. \tag{1.1}$$

A および、注目系の別の物理量 B は、(論文 [1] より一般性を落とし、) 離散固有値を持つとする:

$$A \,=\, \sum_n a_n|a_n\rangle\langle a_n|, \tag{1.2}$$

$$B \,=\, \sum_k b_k|b_k\rangle\langle b_k|. \tag{1.3}$$

b_k に縮退はないとする。

合成系の初期状態は相関がなく、注目系の初期状態を $|\phi\rangle$, ポインター系の初期状態を $|\psi\rangle$ とする。$H_{\rm int}(t)$ の相互作用の後の状態は (フリー・ハミルトニアンを無視して)

$$|\Psi^g\rangle \,=\, e^{-igAP}|\phi\rangle|\psi\rangle,\; g = \int G(t) \tag{1.4}$$

である。相互作用後に、注目系の B を測定し、b が観測されたとする。測定後の状態 $|\Psi^g_{B=b}\rangle$ は、

$$|\Psi^g_{B=b}\rangle \,=\, \frac{|\tilde{\Psi}_b\rangle}{|\langle\tilde{\Psi}_b|\tilde{\Psi}_b\rangle|^{1/2}},\; |\tilde{\Psi}_b\rangle = |b\rangle\langle b|\Psi^g\rangle \tag{1.5}$$

である。これは、

$$|\tilde{\psi}_b\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle b|\Psi^g\rangle \tag{1.6}$$

を使って、

$$|\Psi^g_{B=b}\rangle = \frac{|b\rangle|\tilde{\psi}_b\rangle}{|\langle\tilde{\psi}_b|\tilde{\psi}_b\rangle|^{1/2}} \tag{1.7}$$

と書ける。注目系の状態は、

$$\begin{aligned}\rho^g_{B=b} &= \mathrm{Tr}_S(|\Psi^g_{B=b}\rangle\langle\Psi^g_{B=b}|) \\ &= |\psi^g_{B=b}\rangle\langle\psi^g_{B=b}|, \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$|\psi^g_{B=b}\rangle = \frac{e^{i\theta}|\tilde{\psi}_b\rangle}{|\langle\tilde{\psi}_b|\tilde{\psi}_b\rangle|^{1/2}} \tag{1.9}$$

と書ける。θ は実数である。$|\tilde{\psi}_b\rangle$ は、

$$\begin{aligned}|\tilde{\psi}_b\rangle &= \langle b|e^{-igAP}|\phi\rangle|\psi\rangle \\ &= \sum_n \langle b|a_n\rangle\langle a_n|\phi\rangle e^{-iga_nP}|\psi\rangle \\ &\equiv \sum_n \phi_{n,b}e^{-iga_nP}|\psi\rangle \end{aligned} \tag{1.10}$$

である。よって、

$$\langle\tilde{\psi}_b|\tilde{\psi}_b\rangle = \sum_{n,m}\phi^*_{n,b}\phi_{m,b}\langle\psi|e^{ig(a_n-a_m)P}|\psi\rangle \tag{1.11}$$

である。

ここで、g が非常に小さい場合 (弱測定) を考える。また、

$$\langle\psi|P|\psi\rangle = 0 \tag{1.12}$$

を仮定する。このとき、

$$\langle\psi|e^{ig(a_n-a_m)P}|\psi\rangle = 1 + \mathcal{O}(g^2) \tag{1.13}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\psi}_b|\tilde{\psi}_b\rangle &= |\sum_n \phi_{n,b}|^2 + \mathcal{O}(g^2) \\ &= |\langle b|\phi\rangle|^2 + \mathcal{O}(g^2) \end{aligned} \tag{1.14}$$

なので、θ を適当に選んで、

$$|\psi^g_{B=b}\rangle = \sum_n \frac{\langle b|a_n\rangle\langle a_n|\phi\rangle}{\langle b|\phi\rangle}e^{-iga_nP}|\psi\rangle + \mathcal{O}(g^2) \tag{1.15}$$

を得る。ここで、

$$\frac{\langle b|a_n\rangle\langle a_n|\phi\rangle}{\langle b|\phi\rangle}$$

は弱値である[1)]。

今、

$$E_A(\Delta) = \sum_{a\in\sigma(A)\cap\Delta} \Pi_a \tag{1.16}$$

とする。ここで、$\sigma(A)$ は A の固有値の集合で、Π_a は固有値 a の空間への射影子で、a が縮退していないなら、$\Pi_a = |a\rangle\langle a|$ である。ポインターの重心 X の固有状態を $|x\rangle$ とし、

$$\psi^g_{B=b}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle x|\psi^g_{B=b}\rangle \tag{1.17}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\psi^g_{B=b}(x) &= \sum_a \frac{\langle b|E(a)|\phi\rangle}{\langle b|\phi\rangle}\psi(x-ga) \\ &= \int d\nu_b(a)\ \psi(x-ga)\end{aligned} \tag{1.18}$$

となる。ただし、

$$\nu_b(\Delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_a \frac{\langle b|E(\Delta)|\phi\rangle}{\langle b|\phi\rangle} \tag{1.19}$$

と置いた。

2　擬確率測度

$\rho^g_{B=b}$ のウィグナー関数は、

$$W^{\psi^g_{B=b}}(x,p) = \int \frac{dy}{2\pi}\ [\psi^g_{B=b}(x+y/2)]^*\psi^g_{B=b}(x-y/2)e^{ipy} \tag{2.1}$$

である。これは、

$$W^{\psi^g_{B=b}}(x,p) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{2\pi}e^{ipy}\int_{\mathbb{R}^2} d(\nu_b^*\otimes\nu_b)(a_1',a_2')\ \psi^*(x-ga_1'+y/2)\psi(x-ga_2'-y/2) \tag{2.2}$$

と書ける。

今、

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$T \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

とし、擬確率測度を

$$\mu^\phi_A(\tilde{\Delta}|B=b) \stackrel{\mathrm{def}}{=} T(\nu_b^*\otimes\nu_b)(\tilde{\Delta}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\nu_b^*\otimes\nu_b)(T^{-1}\tilde{\Delta}) \tag{2.5}$$

[1)]物理量 A の、初期状態 $|\phi_i\rangle$, 終状態 $|\phi_f\rangle$ での弱値は、

$$\frac{\langle\phi_f|A|\phi_i\rangle}{\langle\phi_f|\phi_i\rangle}$$

である。

で導入する。$\tilde{\Delta}$ は 2 次元の領域である。すると、$a = a_1 + ia_2$ として、

$$W^{\psi^g_{B=b}}(x,p) \;=\; \int_{\mathbb{C}} d\mu^{\phi}_A(a|B=b)\; W^{\psi}(x - ga_1, p)e^{-i2ga_2p} \tag{2.6}$$

を得る。ここで、W^{ψ} は ψ のウィグナー関数。
　今、

$$\mu^{\phi}_A(a|B=b) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mu^{\phi}_A(a|B=b) & b \in \sigma(B) \\ \text{indefinite} & b \notin \sigma(B) \end{cases} \tag{2.7}$$

とする。また、

$$\mu^{\phi}_C(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle\phi|E_C(\Delta)|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} \quad (C = A, B) \tag{2.8}$$

とする。同時擬確率測度を、

$$\mu^{\phi}_{A,B}(\tilde{\Delta}_A \times \Delta_B) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Delta_B} d\mu^{\phi}_B(b)\mu^{\phi}_A(\tilde{\Delta}_A|B=b) \tag{2.9}$$

で定義する。$\tilde{\Delta}_A$ は実 2 次元, Δ_B は 1 次元の領域である。

$$\mu^{\phi}_A(\mathbb{C}|B=b) = 1 \tag{2.10}$$

なので、

$$\mu^{\phi}_{A,B}(\mathbb{C} \times \Delta_B) = \mu^{\phi}_B(\Delta_B) \tag{2.11}$$

である。また、以下に示すように、

$$\mu^{\phi}_{A,B}(\tilde{\Delta}_A \times \mathbb{R}) \;=\; \tilde{\mu}^{\phi}_A(\tilde{\Delta}_A) \tag{2.12}$$

である。ただし、

$$\tilde{\mu}^{\phi}_A(\tilde{\Delta}) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \frac{\langle\phi|\tilde{E}_A(\tilde{\Delta})|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle}, \tag{2.13}$$

$$\tilde{E}_A(\Delta_1 \times \Delta_2) \;=\; E_A(\Delta_1)E_0(\Delta_2) \tag{2.14}$$

で、E_0 はデルタ・スペクトル測度

$$E_0(\Delta) \;=\; \begin{cases} 1 & (0 \in \Delta) \\ 0 & (0 \notin \Delta) \end{cases} \tag{2.15}$$

である。さて、

$$\begin{aligned} \mu^{\phi}_{A,B}(\tilde{\Delta}_A \times \mathbb{R}) \;&=\; \sum_b (\nu^*_b \otimes \nu_b)(T^{-1}\tilde{\Delta}_A)|\langle b|\phi\rangle|^2 \\ &\equiv\; \mu(T^{-1}\tilde{\Delta}_A) \end{aligned} \tag{2.16}$$

である。ただし、

$$\mu(\tilde{\Delta}_A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_b (\nu^*_b \otimes \nu_b)(\tilde{\Delta}_A)|\langle b|\phi\rangle|^2 \tag{2.17}$$

であり、

$$\mu(\Delta_1 \times \Delta_2) = \sum_b \langle \phi | E_A(\Delta_1) | b \rangle \langle b | E_A(\Delta_2) | \phi \rangle$$
$$= \langle \phi | E_A(\Delta_1) E_A(\Delta_2) | \phi \rangle \tag{2.18}$$

である。これは、

$$\mu(\Delta_1 \times \Delta_2) = \int_{\mathbb{R}} d\mu_A^\phi(a)\ \chi_{\Delta_1}(a)\chi_{\Delta_2}(a) \equiv I_{\rm diag}(\chi_{\Delta_1}\chi_{\Delta_2}) \tag{2.19}$$

と書ける。ただし、

$$I_{\rm diag}(f) \stackrel{\rm def}{=} \int\int_{\mathbb{R}} d\mu_A^\phi(a)\ f(a,a). \tag{2.20}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\mu_{A,B}^\phi(\tilde{\Delta}_A \times \mathbb{R}) &= \mu(T^{-1}\tilde{\Delta}_A) \\
&= I_{\rm diag}(\chi_{T^{-1}\tilde{\Delta}_A}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} d\mu_A^\phi(a)\ \chi_{T^{-1}\tilde{\Delta}_A}(a,a) \\
&= \int_{\mathbb{R}} d\mu_A^\phi(a)\ \chi_{\tilde{\Delta}_A}(a,0) \\
&= \langle \phi | \tilde{E}_A(\tilde{\Delta}_A) | \phi \rangle \\
&= \tilde{\mu}_A^\phi(\tilde{\Delta}_A).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

3 Hashed operator

3.1 引数が実数の場合

$\#(s,t)$ を、A, B の関数で、A, B を c 数 a, b に置き換えた時 $e^{i(sa+tb)}$ となり、

$$\#(s,0) = e^{isA}, \tag{3.1}$$
$$\#(0,t) = e^{itB} \tag{3.2}$$

となる演算子とする。例えば、

$$\#(s,t) = \begin{cases} e^{i(sA+tB)} \\ e^{isA}e^{itB} \\ e^{itB}e^{isA} \\ \Pi_{k=1}^n e^{i\alpha_k sA}e^{i\beta_k tB} \quad (\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1,\ \sum_{k=1}^n \beta_k = 1) \end{cases} \tag{3.3}$$

や、これらの線形結合である。例えば、

$$\#(s,t) = \frac{1-\alpha}{2}e^{isA}e^{itB} + \frac{1+\alpha}{2}e^{itB}e^{isA} \tag{3.4}$$

や、

$$\#(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ G(k)\#_k(s,t) \ \ \Big(\int_{-\infty}^{\infty} dk\ G(k) = 1\Big), \tag{3.5}$$
$$\#_k(s,t) \stackrel{\rm def}{=} e^{i\frac{s}{2}(1-k)A}e^{itB}e^{i\frac{s}{2}(1+k)A} \tag{3.6}$$

でも良い。

擬確率分布を

$$\begin{aligned} W_\#(a,b) &\stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dsdt}{(2\pi)^2}\ e^{-i(sa+tb)}\mathrm{Tr}[\#(s,t)\rho] \\ &\equiv \mathrm{Tr}[\Pi_\#(a,b)\rho], \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\Pi_\#(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dsdt}{(2\pi)^2}\ e^{-i(sa+tb)}\#(s,t) \tag{3.8}$$

で定義する。古典量 $f(a,b)$ の量子化 $\mathcal{Q}_\#[f(q,p)]$ は、

$$\mathcal{Q}_\#[f(a,b)] \stackrel{\text{def}}{=} \int dadb\ f(a,b)\Pi_\#(a,b) \tag{3.9}$$

で定義する。期待値は、

$$\langle \mathcal{Q}_\#[f(a,b)]\rangle = \mathrm{Tr}(\mathcal{Q}_\#[f(a,b)]\rho) = \int dadb\ f(a,b)W_\#(q,p) \tag{3.10}$$

と書ける。

$W_\#(a,b)$ を a(または b) で積分したものは、b(または a) の確率分布となる。実際、

$$\begin{aligned} \int db\ \Pi_\#(a,b) &= \int \frac{dsdt}{(2\pi)^2}\int db\ e^{-i(sa+tb)}\#(s,t) \\ &= \int \frac{dsdt}{2\pi}\ e^{-isa}\delta(t)\#(s,t) \\ &= \int \frac{ds}{2\pi}\ e^{-isa}\#(s,0) \\ &= \int \frac{ds}{2\pi}\ e^{is(A-a)} \\ &= \delta(A-a) \end{aligned} \tag{3.11}$$

なので、

$$\int db\ W_\#(a,b) = \mathrm{Tr}[\delta(A-a)\rho] \equiv W(a) \tag{3.12}$$

は a の確率分布である。 同様に、

$$\int da\ W_\#(a,b) = \mathrm{Tr}[\delta(B-b)\rho] \equiv W(b). \tag{3.13}$$

また、

$$\mathcal{Q}_\#[f(a)] = f(A),\ \mathcal{Q}_\#[g(b)] = g(B) \tag{3.14}$$

である。

$\mathcal{Q}_\#[a^n b^m]$ は、

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\#[a^n b^m] &= \int dadb\ a^n b^m \Pi_\#(a,b) \\ &= \int dadb \int \frac{dsdt}{(2\pi)^2}\ a^n b^m e^{-i(sa+tb)}\#(s,t) \\ &= \int dadb \int \frac{dsdt}{(2\pi)^2}\ \frac{\partial^{n+m} e^{-i(sa+tb)}}{\partial(-is)^n\partial(-it)^m}\#(s,t) \\ &= \int \frac{dsdt}{(2\pi)^2}\ \frac{\partial^{n+m}\#(s,t)}{\partial(is)^n\partial(it)^m}\int dadb\ e^{-i(sa+tb)} \\ &= \frac{\partial^{n+m}\#(s,t)}{\partial(is)^n\partial(it)^m}\Big|_{s=0,t=0} \end{aligned} \tag{3.15}$$

で与えられる。

3.2 引数が複素数の場合

a, s を複素数とする。$s = s_1 + is_2$ とかく。$\#(s,t)$ を、A, B の関数で、

$$\#(s,0) = e^{is_1 A}, \tag{3.16}$$

$$\#(0,t) = e^{itB} \tag{3.17}$$

となる演算子とする。例えば、

$$\#^{\alpha}_{\mathrm{cnv}}(s,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{i\langle s,(1-\alpha)/2\rangle A} e^{itB} e^{i\langle s,(1+\alpha)/2\rangle A} \tag{3.18}$$

である。ただし、

$$\langle s_1 + is_2, a_1 + ia_2\rangle = s_1 a_1 + s_2 a_2 \tag{3.19}$$

であり、α は複素数である。

擬確率分布を

$$\begin{aligned} W_{\#}(a,b) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \int \frac{d^2 s dt}{(2\pi)^3}\, e^{-i(\langle s,a\rangle + tb)} \mathrm{Tr}[\#(s,t)\rho] \\ &\equiv \mathrm{Tr}[\Pi_{\#}(a,b)\rho], \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\Pi_{\#}(a,b) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int \frac{d^2 s dt}{(2\pi)^3}\, e^{-i(\langle s,a\rangle + tb)} \#(s,t) \tag{3.21}$$

で定義する。古典量 $f(a,b)$ の量子化 $\mathcal{Q}_{\#}[f(q,p)]$ は、

$$\mathcal{Q}_{\#}[f(a,b)] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int d^2 a db\ f(a,b) \Pi_{\#}(a,b) \tag{3.22}$$

で定義する。期待値は、

$$\langle \mathcal{Q}_{\#}[f(a,b)]\rangle = \mathrm{Tr}(\mathcal{Q}_{\#}[f(a,b)]\rho) = \int d^2 a db\ f(a,b) W_{\#}(q,p) \tag{3.23}$$

と書ける。

$W_{\#}(a,b)$ を a(または b) で積分したものは、b(または a) の確率分布となる。実際、

$$\begin{aligned} \int db\ \Pi_{\#}(a,b) &= \int \frac{d^2 s dt}{(2\pi)^3} \int db\ e^{-i(\langle s,a\rangle + tb)} \#(s,t) \\ &= \int \frac{d^2 s dt}{(2\pi)^2}\, e^{-i\langle s,a\rangle} \delta(t) \#(s,t) \\ &= \int \frac{d^2 s}{(2\pi)^2}\, e^{-i\langle s,a\rangle} \#(s,0) \\ &= \int \frac{d^2 s}{(2\pi)^2}\, e^{i(A-a_1)s_1} e^{-is_2 a_2} \\ &= \delta(A - a_1)\delta(a_2) \end{aligned} \tag{3.24}$$

および、

$$\int d^2 a\ \Pi_{\#}(a,b) = \delta(B - b) \tag{3.25}$$

なので、その性質が従う。

3.3 擬確率測度の一致

$\#^{\alpha}_{\rm cnv}$ に対応する擬確率分布は、

$$W^{\alpha}_{\rm cnv}(a,b) \;=\; \int \frac{d^2sdt}{(2\pi)^3}\; e^{-i(\langle s,a\rangle+tb)}\langle\phi|e^{i\langle s,(1-\alpha)/2\rangle A}e^{itB}e^{i\langle s,(1+\alpha)/2\rangle A}|\phi\rangle \tag{3.26}$$

であり、逆変換して、

$$\langle\phi|e^{i\langle s,(1-\alpha)/2\rangle A}e^{itB}e^{i\langle s,(1+\alpha)/2\rangle A}|\phi\rangle \;=\; \int dW^{\alpha}_{\rm cnv}(a,b)\; e^{i(\langle s,a\rangle+tb)} \equiv u^{\alpha}_{\rm cnv}(s,t) \tag{3.27}$$

である。

ところで、$\mu^{\phi}_{I}(a,b)$ を $\mu^{\phi}_{A,B}(a,b)$ で T を 2 次単位行列 1_2 に変えたものとすると、

$$\begin{aligned}\int d\mu^{\phi}_{I}(a,b)\; e^{i(\langle s,a\rangle+tb)} \;&=\; \sum_{b} e^{itb}\langle\phi|e^{is_1A}|b\rangle\langle b|e^{is_2A}|\phi\rangle \\ &=\; \langle\phi|e^{is_1A}e^{itB}e^{is_2A}|\phi\rangle \equiv u(s,t)\end{aligned} \tag{3.28}$$

である。また、

$$\mu^{\phi}_{A,B}(\tilde\Delta_A\times\Delta_B) = \mu^{\phi}_{T}(\tilde\Delta_A\times\Delta_B) \overset{\rm def}{=} \mu^{\phi}_{I}((T^{-1}\tilde\Delta_A)\times\Delta_B) \tag{3.29}$$

である。よって、

$$u^{\phi}_{A,B}(s,t) \overset{\rm def}{=} \int d\mu^{\phi}_{A,B}(a,b)\; e^{i(\langle s,a\rangle+tb)} \;=\; u({}^tTs,t) \equiv u_T(s,t) \tag{3.30}$$

である。今、

$$T_\alpha \overset{\rm def}{=} \begin{pmatrix} (1-\alpha_1)/2 & (1+\alpha_1)/2 \\ -\alpha_2/2 & \alpha_2/2 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

と置くと、

$$u_{T_\alpha}(s,t) \;=\; u^{\alpha}_{\rm cnv}(s,t) \tag{3.32}$$

を得る。$T=T_i$ であるから、

$$u^{\phi}_{A,B}(s,t) \;=\; u^{i}_{\rm cnv}(s,t). \tag{3.33}$$

つまり、同時擬確率測度 $\mu^{\phi}_{A,B}$ は $\#^{i}_{\rm cnv}$ に対応する擬確率分布である。

参考文献

[1] 李 宰河, 筒井 泉, "Quasi-probabilities in conditioned quantum measurement and a geometric/statistical interpretation of Aharonov ' s weak value", PTEP 2017.5 (2017): 052A01

[2] 李 宰河, 筒井 泉, "On Quantisations, Quasi-probabilities and the Weak Value", arXiv:1703.06068