# $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{F})$ とローレンツ群

中嶋 慧

January 23, 2020

**Abstract**

この記事では、

$$\mathrm{SO}(2,1) = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2, \quad (0.1)$$
$$\mathrm{SO}(3,1) = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2, \quad (0.2)$$
$$\mathrm{SO}(4,1) = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{H})/\mathbb{Z}_2 \quad (0.3)$$

である [1] ことを解説する。ここで、$\mathbb{H}$ は四元数である。

# Contents



# 1 シンプレクティック群

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{K}) = \{M \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{K}) | {}^t M \Omega M = \Omega\} \quad (1.1)$$

である。ここで、${}^t$ は転置を表し、

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

である。このとき、

$$\det M = 1 \tag{1.3}$$

である。

これは次のように示される。今、$x^1, x^2, \cdots, x^{2n}$ を1形式の基底とし、

$$V(\omega) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i<k} \omega_{ik} x^i \wedge x^k \tag{1.4}$$

とする。$\omega_{ik} = -\omega_{ki}$ とする。また、

$$\eta \overset{\text{def}}{=} x^1 \wedge x^2 \wedge \cdots \wedge x^{2n} \tag{1.5}$$

とし、

$$\begin{aligned} V(\omega)^n &= V(\omega) \wedge V(\omega) \wedge \cdots V(\omega) \\ &\equiv n! \mathrm{Pf}(\omega) \eta \end{aligned} \tag{1.6}$$

でパフィアン $\mathrm{Pf}(\omega)$ を定義する。また、

$$P(\omega, \boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} V(\omega)^n \tag{1.7}$$

と書く。ここで、$\boldsymbol{x} = {}^t(x^1, x^2, \cdots, x^{2n})$ である。さて、

$$P(\omega, M\boldsymbol{x}) = n! \mathrm{Pf}({}^t M \omega M) \eta \tag{1.8}$$

であり、

$$P(\omega, M\boldsymbol{x}) = \det(M) P(\omega, \boldsymbol{x}) = n! \det(M) \mathrm{Pf}(\omega) \eta \tag{1.9}$$

であるから、

$$\mathrm{Pf}({}^t M \omega M) = \det(M) \mathrm{Pf}(\omega) \tag{1.10}$$

である。特に $\omega = \Omega$ とし、$M \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{K})$ とすると、$\det(M) = 1$ を得る。

さて、$M \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{K})$ は、

$${}^t M \Omega = \Omega M^{-1} \tag{1.11}$$

と同値である。$n = 1$ のとき、これは $\det M = 1$ と同値である。つまり、

$$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{K}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{K}) \tag{1.12}$$

である。

今、

$$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{H}, X) \overset{\text{def}}{=} \{M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{H}) | M^\dagger X M = X\}, \tag{1.13}$$

$$S_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

$$T_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

と置く。ここで、$M^\dagger$ は $M$ の転置および複素共役 (四元共役) である。$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{H})$ は $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{H}, T_1)$ を表す。

## 2　$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}(2,1)$

$V$ をトレース 0 の 2 次の実行列の全体とすると、$V$ の任意の元 $x$ は、

$$x = \sum_{\mu=0}^{2} x^\mu G_\mu \quad (x^\mu \in \mathbb{R}), \tag{2.1}$$

$$G_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad G_2 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

と書ける。今、

$$\langle x, y\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Tr}(xy) \tag{2.3}$$

とすると、

$$\langle G_\mu, G_\nu\rangle = \mathrm{diag}(-1,1,1) \equiv \eta_{\mu\nu} \tag{2.4}$$

であり、

$$\langle x, y\rangle = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{2.5}$$

である。今、$x \in V$ に対して、

$$g * x \overset{\mathrm{def}}{=} gxg^{-1}, \quad g \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) \tag{2.6}$$

とすると、$g * x \in V$ であるから、

$$g * x = [\rho(g)]^\mu{}_\nu x^\nu G_\mu \tag{2.7}$$

と書ける。また、

$$\begin{aligned} \langle g * x, g * y\rangle &= \mathrm{Tr}(gxg^{-1}gyg^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}(xy) \\ &= \langle x, y\rangle \end{aligned} \tag{2.8}$$

であるから、

$$\rho(g) \in \mathrm{SO}(2,1) \tag{2.9}$$

である。また、

$$\rho(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})) = \mathrm{SO}(2,1), \tag{2.10}$$

$$\mathrm{Ker}(\rho) = \{\pm 1\} \tag{2.11}$$

である [1]。

# 3 $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(3,1)$

　今、

$$V \overset{\text{def}}{=} \{x \in M(2,\mathbb{C}) | x^\dagger = \Omega x \Omega^{-1}\}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

と置く。

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

と書くと、

$$x^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

であり、

$$\begin{aligned} \Omega x \Omega^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.4}$$

である。よって、$V$ の元 $x$ は、

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & ib \\ ic & \alpha^* \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{C}, b, c \in \mathbb{R}) \tag{3.5}$$

と書ける。その基底は、

$$G_0 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad G_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad G_3 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

である。$V$ の元 $x$ は、

$$x = x^\mu G_\mu \quad (x^\mu \in \mathbb{R}) \tag{3.7}$$

と書ける。
　今、

$$\langle x, y \rangle \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(x^* y)) \tag{3.8}$$

とすると、

$$\langle G_\mu, G_\nu \rangle = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \equiv \eta_{\mu\nu}, \tag{3.9}$$
$$\langle x, y \rangle = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{3.10}$$

である。

　また、$x \in V$ に対して、

$$g * x \overset{\text{def}}{=} gx(g^{-1})^*, \quad g \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{C}) \tag{3.11}$$

とすると、

$$(g * x)^\dagger = {}^t g^{-1} x^\dagger g^\dagger \tag{3.12}$$

である。また、$g \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})$ より、

$$g^{-1} = \Omega \cdot {}^t g \Omega^{-1}, \tag{3.13}$$

$${}^t g = \Omega^{-1} g^{-1} \Omega = \Omega g^{-1} \Omega^{-1} \tag{3.14}$$

であるから、

$${}^t g^{-1} = \Omega g \Omega^{-1}, \tag{3.15}$$

$$g^\dagger = \Omega (g^{-1})^* \Omega^{-1} \tag{3.16}$$

である。$x \in V$ より、

$$x^\dagger = \Omega x \Omega^{-1} \tag{3.17}$$

なので、

$$\begin{aligned} (g * x)^\dagger &= (\Omega g \Omega^{-1})(\Omega x \Omega^{-1}) \Omega (g^{-1})^* \Omega^{-1} \\ &= \Omega g x (g^{-1})^* \Omega^{-1} \\ &= \Omega (g * x) \Omega^{-1} \end{aligned} \tag{3.18}$$

なので、

$$g * x \in V \tag{3.19}$$

であり、

$$g * x = [\rho(g)]^\mu{}_\nu x^\nu G_\mu \tag{3.20}$$

と書ける。

　また、

$$\langle g * x, g * y \rangle = \langle x, y \rangle \tag{3.21}$$

である。実際、

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}((g * x)^* g * y) &= \mathrm{Tr}(g^* x^* g^{-1} g y (g^{-1})^*) \\ &= \mathrm{Tr}(x^* y (g^{-1})) \end{aligned} \tag{3.22}$$

である。(3.21) は、

$$\rho(g) \in \mathrm{SO}(3, 1) \tag{3.23}$$

を意味する。また、

$$\rho(\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})) = \mathrm{SO}(3, 1), \tag{3.24}$$

$$\mathrm{Ker}(\rho) = \{\pm 1\} \tag{3.25}$$

である [1]。

# 4 $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{H}) \to \mathrm{SO}(4,1)$

## 4.1 $X^2 = \pm 1$ の場合

　四元数値に正方行列 $A$, $B$ に対して、

$$\lambda(AB) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(AB)) \tag{4.1}$$

とする。$A$ の $(i,k)$ 成分を $A_{ik}$ と書くと、

$$\begin{aligned}\lambda(AB) &= \mathrm{Re}(A_{ik}B_{ki}) \\ &= \mathrm{Re}(B_{ki}A_{ik}) \\ &= \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(BA)) \\ &= \lambda(BA)\end{aligned} \tag{4.2}$$

となる。また、

$$\langle A, B\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \lambda(AB) \tag{4.3}$$

とする。
　$g \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{H},X)$ とすると、

$$g^{-1} = X^{-1}g^{\dagger}X \tag{4.4}$$

である。今、

$$X = S_\varepsilon, T_\varepsilon, \quad \varepsilon = \pm 1 \tag{4.5}$$

とすると、

$$X^2 = \pm 1 \tag{4.6}$$

なので、

$$g^{-1} = Xg^{\dagger}X^{-1} \equiv g^{\sigma} \tag{4.7}$$

となる。一般に、

$$x^{\sigma} \overset{\mathrm{def}}{=} Xx^{\dagger}X^{-1} \tag{4.8}$$

とする。また、

$$W(X) \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in M(2,\mathbb{H}) | x^{\sigma} = x\} \tag{4.9}$$

と置く。
　今、$A \in M(2,\mathbb{H})$ に対して、

$$g * A \overset{\mathrm{def}}{=} gAg^{\sigma}, \quad g \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{H},X) \tag{4.10}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\langle g*A, g*B\rangle &= \lambda((g*A)(g*B)) \\ &= \lambda(gAg^\sigma gBg^\sigma)) \\ &= \lambda(g^\sigma gAB) \\ &= \lambda(AB) \\ &= \langle A, B\rangle \end{aligned} \tag{4.11}$$

である。また、

$$x \in W(X) \Rightarrow g*x \in W(X) \tag{4.12}$$

である。これを示す。まず、

$$\begin{aligned}(g*x)^\sigma &= X(gxg^\sigma)^\dagger X^{-1} \\ &= X(g^\sigma)^\dagger x^\dagger g^\dagger X^{-1}\end{aligned} \tag{4.13}$$

である。ここで、

$$(g^\sigma)^\dagger = X^{-1}gX, \tag{4.14}$$

$$x^\dagger = X^{-1}x^\sigma X = X^{-1}xX, \tag{4.15}$$

$$g^\dagger = X^{-1}g^\sigma X \tag{4.16}$$

なので、

$$\begin{aligned}(g*x)^\sigma &= X(X^{-1}gX)(X^{-1}xX)(X^{-1}g^\sigma X)X^{-1} \\ &= gxg^\sigma \\ &= g*x\end{aligned} \tag{4.17}$$

である。
　今、

$$V(X) \overset{\text{def}}{=} \{x \in M(2,\mathbb{H}) | x^\sigma = x,\ \lambda(x) = 0\} \tag{4.18}$$

とすると、

$$\lambda(g*x) = \lambda(x) \quad (g \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{H},X)) \tag{4.19}$$

より、

$$x \in V(X) \Rightarrow g*x \in V(X) \tag{4.20}$$

である。

## 4.2 $X = T_{-1} = 1_2$ の場合

$X = T_{-1} = 1_2$ とする。$V(1_2)$ の基底は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & e_k\\ -e_k & 0\end{pmatrix}(k=1,2,3), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{4.21}$$

であり、これらを $G_\mu(\mu = 1,2,3,4,5)$ とすると、

$$\langle G_\mu, G_\nu\rangle = \mathrm{diag}(1,1,1,1,1) = \delta_{\mu\nu} \tag{4.22}$$

である。また、$x \in V(1_2)$ を $x = x^\mu G_\mu$ と書くと、

$$g * x = [\rho(g)]^\mu{}_\nu x^\nu G_\mu, \tag{4.23}$$
$$\rho(g) \in \mathrm{SO}(5) \tag{4.24}$$

となる。また、

$$\rho(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{H},1_2)) = \mathrm{SO}(5), \tag{4.25}$$
$$\mathrm{Ker}(\rho) = \{\pm 1\} \tag{4.26}$$

である [1]。

## 4.3 $X = T_1$ の場合

$V(1_2)$ の基底は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & e_k\\ e_k & 0\end{pmatrix}(k=1,2,3), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \tag{4.27}$$

であり、これらを $G_\mu(\mu = 0,1,2,3,4)$ とすると、

$$\langle G_\mu, G_\nu\rangle = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1,-1) = -\eta_{\mu\nu} \tag{4.28}$$

である。また、$x \in V(1_2)$ を $x = x^\mu G_\mu$ と書くと、

$$g * x = [\rho(g)]^\mu{}_\nu x^\nu G_\mu, \tag{4.29}$$
$$\rho(g) \in \mathrm{SO}(4,1) \tag{4.30}$$

となる。また、

$$\rho(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{H},\mathrm{T}_1)) = \mathrm{SO}(4,1), \tag{4.31}$$
$$\mathrm{Ker}(\rho) = \{\pm 1\} \tag{4.32}$$

である (要確認)。

### 4.4 $X = S_1$ の場合

$X = S_\varepsilon$ とする。$V(S_\varepsilon)$ の元 $x$ は、

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & \varepsilon\alpha^* \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Re}(\alpha + \varepsilon\alpha^*) = 0 \ \ (b, c \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{H}) \tag{4.33}$$

である。

$V(S_1)$ の基底は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e_k & 0 \\ 0 & -e_k \end{pmatrix}(k = 1, 2, 3), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

である。これを左から $G_0, G_1, \cdots, G_4$ とする。

$$\langle G_\mu, G_\nu \rangle = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1, -1) \equiv -\eta_{\mu\nu} \tag{4.35}$$

である。また、$x \in V(S_1)$ を $x = x^\mu G_\mu$ と書くと、

$$g * x = [\rho(g)]^\mu{}_\nu x^\nu G_\mu, \tag{4.36}$$

$$\rho(g) \in \mathrm{SO}(4, 1) \tag{4.37}$$

となる。また、

$$\rho(\mathrm{Sp}(2, \mathbb{H}, \mathrm{S}_1)) = \mathrm{SO}(4, 1), \tag{4.38}$$

$$\mathrm{Ker}(\rho) = \{\pm 1\} \tag{4.39}$$

である (要確認)。

## 5 超スピノール

$\mathbb{F}_2 = \mathbb{R}, \mathbb{F}_3 = \mathbb{C}, \mathbb{F}_4 = \mathbb{H}$ とする。$\mathrm{SO}(n, 1)$ のスピノールを $\mathbb{F}_n$ の 2×1 行列で、$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{F}_n)$ の作用を受けるものと考える。ところで、$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{F}_n)$ を超リー群に拡張したもの $\mathrm{OSp}(2, \mathbb{F}_n)$ が存在する。$\mathrm{OSp}(2, \mathbb{F}_n)$ のスピノール (超スピノール) を、

$$\begin{pmatrix} q \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad q \in \mathbb{F}_n,\ \theta_\alpha \text{は} \mathbb{F}_n \text{係数のグラスマン数} \tag{5.1}$$

で、$\mathrm{OSp}(2, \mathbb{F}_n)$ の作用を受けるものと定義する [2]。このようにして超スピノールが定義できる。これは「超ローレンツ群」のスピノールとみなせる。この「超ローレンツ群」は、[3] のものとは異なるようである。

## References


[1] Paul Garrett, “Sporadic isogenies to orthogonal groups”,
http://physnakajima.html.xdomain.jp/gauge.pdf

[2] J. Lukierski and A. Nowicki, “Superspinors and graded Lorentz groups in three, four and five dimensions”, Fortschritte der Physik **30**, 75 (1982).

[3] 中嶋 慧「超リー群」http://physnakajima.html.xdomain.jp/super_Lie.pdf