緩やかに発散する級数

中嶋 慧

February 23, 2021

Abstract

$\{f_k\}_{k=m}^{\infty}$ を正の単調減少数列とする。和

$$S(N) := \sum_{k=m}^{N} f_k \tag{0.1}$$

が $N \to \infty$ で $\ln \ln N$ や $\ln \ln \ln N$ や $\ln \ln \ln \ln N$ で発散するような f_k を与える。また、$\{p_n\}_{n=m}^{\infty}$ を確率とするとき、シャノン・エントロピー

$$H := -\sum_{n} p_n \ln p_n \tag{0.2}$$

が発散する例を与える。

1 緩やかに発散する級数

$f(x)$ は区間 $[m-1, n]$ で正で単調減少とすると、

$$\int_m^n dx\ f(x) < \sum_{k=m}^{n} f(k) < \int_m^n dx\ f(x-1) \tag{1.1}$$

である。よって、

$$I(m, N) := \int_m^N dx\ f(x) \tag{1.2}$$

が $N \to \infty$ で発散するなら、

$$S(N) := \sum_{k=m}^{N} f(k) \tag{1.3}$$

も発散する。また、$I(m-1, N-1)$ が $N \to \infty$ で収束するなら、$S(N)$ も収束する。

$\alpha \geq 0$ とし、

$$f_{1,\alpha}(x) := \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}, \tag{1.4}$$

$$f_{2,\alpha}(x) := \frac{1}{x \ln x(\ln\ln x)^\alpha}, \tag{1.5}$$

$$f_{3,\alpha}(x) := \frac{1}{x \ln x \ln\ln x(\ln\ln\ln x)^\alpha} \tag{1.6}$$

とすると、これらは m を適当に大きくすると、$x \geq m-1$ で正で単調減少とする。

$$I_{n,\alpha}(m,N) := \int_m^N dx\ f_{n,\alpha}(x), \tag{1.7}$$

$$S_{n,\alpha}(N) := \sum_{k=m}^{N} f_{n,\alpha}(k) \tag{1.8}$$

とすると、

$$I_{n,\alpha}(m,N) < S_{n,\alpha}(N) < I_{n,\alpha}(m-1,N-1) \tag{1.9}$$

である。$t = \ln x$ とすると、

$$dt = \frac{dx}{x} \tag{1.10}$$

なので、

$$I_{1,\alpha}(m,N) = \int_{\ln m}^{\ln N} \frac{dt}{t^\alpha} \tag{1.11}$$

であり、$\alpha > 1$ で $N \to \infty$ でも収束する。$\alpha = 1$ とすると、

$$I_{1,1}(m,N) = \ln\ln N - \ln\ln m \tag{1.12}$$

であり、$S_{1,1}(N)$ は $\ln\ln N$ で発散する。

また、

$$\begin{aligned} I_{2,\alpha}(m,N) &= \int_{\ln m}^{\ln N} \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} \\ &= \int_{\ln\ln m}^{\ln\ln N} \frac{ds}{s^\alpha} \end{aligned} \tag{1.13}$$

であり、$\alpha > 1$ で $N \to \infty$ でも収束する。$\alpha = 1$ とすると、

$$I_{2,1}(m,N) = \ln\ln\ln N - \ln\ln\ln m \tag{1.14}$$

であり、$S_{2,1}(N)$ は $\ln\ln\ln N$ で発散する。

また、

$$\begin{aligned} I_{3,\alpha}(m,N) &= \int_{\ln\ln m}^{\ln\ln N} \frac{ds}{s(\ln s)^\alpha} \\ &= \int_{\ln\ln\ln m}^{\ln\ln\ln N} \frac{du}{u^\alpha} \end{aligned} \tag{1.15}$$

であり、$\alpha > 1$ で $N \to \infty$ でも収束する。$\alpha = 1$ とすると、

$$I_{3,1}(m, N) = \ln\ln\ln\ln N - \ln\ln\ln\ln m \tag{1.16}$$

であり、$S_{3,1}(N)$ は $\ln\ln\ln\ln N$ で発散する。

2　シャノン・エントロピーが発散する例

　$\alpha > 1$ とし、

$$p_n := \frac{f_{1,\alpha}(n)}{S}, \quad S := S_{1,\alpha}(\infty) \tag{2.1}$$

は確率となる。このとき、

$$\begin{aligned} \ln p_n &= \ln f_{1,\alpha}(n) - \ln S \\ &= -\ln(n(\ln n)^{\alpha}) - \ln S \end{aligned} \tag{2.2}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} -p_n \ln p_n &= \frac{\ln n + \alpha \ln\ln n + \ln S}{n(\ln n)^{\alpha} S} \\ &= \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha-1} S} + \frac{\alpha \ln\ln n + \ln S}{n(\ln n)^{\alpha} S} \end{aligned} \tag{2.3}$$

である。第 2 項の和は収束するが、$1 < \alpha \leq 2$ なら第 1 項の和は発散する。