スカラー重力理論

中嶋 慧

December 27, 2020

Abstract

この記事は、数理物理 Advent Calendar 2020 の 24 日目の記事である。重力がスカラー場 $\phi(x)$ で表されると仮定した重力理論を解説する。この理論では、近日点移動は一般相対論の $(-1/6)$ 倍となる。

Contents

1　質点と重力場との結合 **2**

2　重力場の方程式 **2**

3　近日点移動 **4**

3.1　一般論 4

3.2　一般相対論での近日点移動 4

3.3　スカラー重力理論での近日点移動 5

A　$g_{\mu\nu} = \varphi^2\eta_{\mu\nu}$ に対するスカラー曲率 **6**

B　近日点移動：詳細 **9**

1　質点と重力場との結合

このノートでは重力はスカラー場 $\phi(x)$ で表されると仮定する。時空は平坦で、計量はミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ だとする。

質量 m, 重力質量 m_G の質点の作用は、

$$S = -\int d\tau\ (mc^2 + m_G\phi) \tag{1.1}$$

である [1]。ここで、$d\tau$ は固有時

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1.2}$$

である。(弱い) 等価原理より、$m_G = m$ として、

$$S = -mc^2\int d\tau\ \left(1+\frac{\phi}{c^2}\right) \tag{1.3}$$

である。

今、「計量」を、

$$g_{\mu\nu} := \left(1+\frac{\phi}{c^2}\right)^2\eta_{\mu\nu} \tag{1.4}$$

と定義すると、

$$S = -mc^2\int d\lambda\ \sqrt{-\frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} \tag{1.5}$$

となる。λ は適当なパラメーターである。

2　重力場の方程式

重力場のラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2kc^4}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{c^3}T\phi \tag{2.1}$$

である [1]。k は定数である。また、

$$T := \eta_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \tag{2.2}$$

であり、$T^{\mu\nu}$ は物質場やゲージ場のエネルギー・運動量テンソルである。重力場の作用は、

$$S = \int d^4x\ \mathcal{L} \tag{2.3}$$

である。

質点系では、

$$T^{\mu\nu} = c\sum_A m_A\int d\tau_A\ \frac{dz_A^\mu}{d\tau_A}\frac{dz_A^\nu}{d\tau_A}\delta^4(x-z_A) \tag{2.4}$$

である。ここで、A は質点のラベル, z_A^μ は粒子の位置で、

$$d\tau_A^2 = -\frac{1}{c^2}\eta_{\mu\nu}dz_A^\mu dz_A^\nu \tag{2.5}$$

である。よって、

$$T = -c\sum_A m_A c^2 \int d\tau_A \ \delta^4(x - z_A) =: -\rho c^2 \tag{2.6}$$

となり、

$$\frac{1}{c^3}T\phi = -\frac{\rho}{c}\phi = -\phi\sum_A m_A \int d\tau_A \ \delta^4(x - z_A) \tag{2.7}$$

であり、(1.1) と整合する。

場の方程式は、

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = -kcT (= kc^3\rho) \tag{2.8}$$

である[1)]。古典重力の方程式

$$\triangle\phi = 4\pi G\rho \tag{2.9}$$

と比較して、

$$k = \frac{4\pi G}{c^3} = \frac{c\kappa}{2} \tag{2.10}$$

である。G は万有引力定数で、$\kappa = 8\pi G/c^4$ はアインシュタイン定数である。

(A.31) によると、$g_{\mu\nu} = \varphi^2\eta_{\mu\nu}$ に対するスカラー曲率は、

$$R = -\frac{6}{\varphi^3}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi \tag{2.11}$$

である。(2.8) と $\varphi = 1 + \frac{\phi}{c^2}$ より、

$$R = \frac{3\kappa}{\varphi^3}T = \frac{3\kappa}{\varphi}\mathcal{T} \tag{2.12}$$

となる。ここで、$\mathcal{T} := g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \varphi^{-2}T$ である[2)3)] 。

---

1)なお、重力の自己相互作用を考えると、場の方程式は、

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi \ = \ -kc(T + T_G)$$

となる。T_G は重力場のエネルギー・運動量テンソルのトレースである [1, 2]。

2)アインシュタイン方程式からは、$R = -\kappa\mathcal{T}$ が得られる。ここで、$\mathcal{T} := g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ である。

3)Nordstrom の重力理論では、場の方程式は、

$$R \ = \ 3\kappa\mathcal{T} \Longleftrightarrow \varphi\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi = -\frac{\kappa}{2}\sqrt{-g}\mathcal{T} \Longleftrightarrow \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi = -\frac{\kappa}{2}\varphi T$$

である [2]。ここで、$g = \det(g_{\mu\nu}) = -\varphi^8$, $\sqrt{-g} = \varphi^4$ である。

3　近日点移動

この章では $c = 1$ とする。

3.1　一般論

今、一般に計量が、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

と書け、$h_{\mu\nu}$ が十分小さく、

$$h_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(h_0, h_s, h_s, h_s) \tag{3.2}$$

となる場合を考える。特に、スカラー重力では、

$$h_0 = -2\phi - \phi^2, \tag{3.3}$$

$$h_s = 2\phi + \phi^2 \tag{3.4}$$

である。球対称で静的な場合を考える。M を中心 $(r = 0)$ にある星の質量とし、

$$\Phi := -2GM/r, \tag{3.5}$$

$$h_0 = -\alpha\Phi - a\Phi^2 + \mathcal{O}(\Phi^3), \tag{3.6}$$

$$h_s = -\beta\Phi - b\Phi^2 + \mathcal{O}(\Phi^3) \tag{3.7}$$

を仮定する。このとき、近日点の 1 周期ごとの歳差は、付録 B より、

$$\delta \approx \pi \frac{(2GM)^2}{L^2}(\alpha^2 + \alpha\beta - a) \tag{3.8}$$

である。L は角運動量を表す定数である。

3.2　一般相対論での近日点移動

アインシュタイン方程式の解は、

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{\Phi}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{\Phi}{4}\right)^{-2}, \tag{3.9}$$

$$g_{ik} = \delta_{ik}\left(1 - \frac{\Phi}{4}\right)^4 \tag{3.10}$$

である [3]。よって、

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 - \left(1 + \frac{\Phi}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{\Phi}{4}\right)^{-2} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi^2}{16}\right)\left(1 + \frac{\Phi}{2} + \frac{3\Phi^2}{16} + \frac{\Phi^3}{16} + \cdots\right) \\ &= -\Phi - \frac{1}{2}\Phi^2 - \frac{3}{16}\Phi^3 + \cdots \end{aligned} \tag{3.11}$$

および、

$$
\begin{aligned}
h_s &= -1 + \left(1 - \frac{\Phi}{4}\right)^4 \\
&= -\Phi + \frac{3}{8}\Phi^2 + \frac{1}{16}\Phi^3 - \frac{1}{256}\Phi^4
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

を得る。よって、

$$
(\alpha, \beta, a, b) = (1, 1, 1/2, -3/8) \tag{3.13}
$$

であり、

$$
\delta = \pi \frac{(2GM)^2}{L^2} \cdot \frac{3}{2} =: \delta_{\mathrm{GR}} \tag{3.14}
$$

である。

3.3 スカラー重力理論での近日点移動

スカラー重力では、$\phi = \Phi/2$ なので、

$$
(\alpha, \beta, a, b) = (1, -1, 1/4, -1/4) \tag{3.15}
$$

であり、

$$
\delta = \pi \frac{(2GM)^2}{L^2} \cdot (-1/4) = -\frac{1}{6}\delta_{\mathrm{GR}} \tag{3.16}
$$

となる。一般相対論と符号すら合わない。

A　$g_{\mu\nu} = \varphi^2 \eta_{\mu\nu}$ に対するスカラー曲率

　計量テンソルが、

$$g_{\mu\nu} = \varphi^2 \eta_{\mu\nu} \tag{A.1}$$

の場合を考える。スカラー重力理論では、

$$\varphi = 1 + \frac{\phi}{c^2} \tag{A.2}$$

である。

　ところで一般に、計量テンソルは、フレーム形式と呼ばれる 1 形式の組 $\{\theta^a\}_{a=0,1,2,3}$ を用いて、

$$g = \eta_{ab}\theta^a \otimes \theta^b, \quad \eta_{ab} := \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \tag{A.3}$$

と書ける。η_{ab} はミンコフスキー計量である。フレーム形式を、

$$\theta^a = \theta^a{}_\mu dx^\mu \tag{A.4}$$

と書いたとき、$\theta^a{}_\mu$ は多脚場と呼ばれる。(A.1) の場合は、

$$\theta^a{}_\mu = \varphi \delta^a_\mu \tag{A.5}$$

である。レビ=チビタ接続 $A^a{}_b$ は、

$$d\theta^a = -A^a{}_b \wedge \theta^b \tag{A.6}$$

を満たす。今、

$$d\theta^a = \frac{1}{2}\Delta^a{}_{bc}\theta^b \wedge \theta^c \tag{A.7}$$

とおくと、

$$A_{ab} = A_{abc}\theta^c, \tag{A.8}$$

$$A_{abc} := \frac{1}{2}(\Delta_{cba} + \Delta_{abc} + \Delta_{bca}) \tag{A.9}$$

となる [4]。曲率テンソルは、

$$F^a_{\ b} = dA^a{}_b + A^a{}_c \wedge A^c{}_b \tag{A.10}$$

である。

$$F^a_{\ b} =: \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d \tag{A.11}$$

とおき、

$$R_{ab} := R^c{}_{acb}, \tag{A.12}$$

$$R := \eta^{ab}R_{ab} \tag{A.13}$$

とする。η^{ab} は η_{ab} の逆行列である。R はスカラー曲率である。$*$ をホッジ双対とすると、

$$F_{ab} \wedge *(\theta^a \wedge \theta^b) = R * 1 \tag{A.14}$$

となる。なお、

$$\theta^a \wedge \theta^b \wedge *(\theta^c \wedge \theta^d) = (\eta^{ac}\eta^{bd} - \eta^{ad}\eta^{bc}) * 1 \tag{A.15}$$

である [4]。

今は、

$$\theta^\mu = \varphi dx^\mu \tag{A.16}$$

なので、

$$\begin{aligned} d\theta^\mu &= \partial_\nu \varphi dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= \frac{\partial_\alpha \varphi}{\varphi^2} \delta^\mu_\beta \theta^\alpha \wedge \theta^\beta, \end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\Delta^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{\partial_\alpha \varphi}{\varphi^2} \delta^\mu_\beta - \frac{\partial_\beta \varphi}{\varphi^2} \varphi \delta^\mu_\alpha, \tag{A.18}$$

$$\Delta_{abc} = \frac{\partial_b \varphi}{\varphi^2} \eta_{ac} - \frac{\partial_c \varphi}{\varphi^2} \eta_{ab} \tag{A.19}$$

であり、

$$\begin{aligned} A_{abc} &= \frac{1}{2}(\Delta_{abc} + \Delta_{bca} + \Delta_{cba}) \\ &= \frac{1}{\varphi^2}(\partial_b \varphi \eta_{ac} - \partial_a \varphi \eta_{bc}) \end{aligned} \tag{A.20}$$

であるから、

$$\begin{aligned} A_{ab} &= \frac{1}{\varphi}(\partial_b \varphi \eta_{ac} - \partial_a \varphi \eta_{bc}) dx^c \\ &= (\partial_b \ln \varphi \eta_{ac} - \partial_a \ln \varphi \eta_{bc}) dx^c \end{aligned} \tag{A.21}$$

であり、

$$\begin{aligned} dA_{ab} &= -(\partial_d \partial_b \ln \varphi \eta_{ac} - \partial_d \partial_a \ln \varphi \eta_{bc}) dx^c \wedge dx^d \\ &= -\frac{1}{\varphi^2}(\partial_d \partial_b \ln \varphi \eta_{ac} - \partial_d \partial_a \ln \varphi \eta_{bc}) \theta^c \wedge \theta^d \end{aligned} \tag{A.22}$$

となる。また、$\lambda_a := \partial_a \ln \varphi$ とすると、

$$\begin{aligned} G_{ab} &:= \eta^{ef} A_{ae} \wedge A_{fb} \\ &= \eta^{ef}(\lambda_e \eta_{ac} - \lambda_a \eta_{ec})(\lambda_b \eta_{fd} - \lambda_f \eta_{bd}) dx^c \wedge dx^d \\ &= (\lambda_d \lambda_b \eta_{ac} - \lambda^2 \eta_{ac} \eta_{bd} - \lambda_a \lambda_b \eta_{dc} + \lambda_a \lambda_c \eta_{bd}) dx^c \wedge dx^d \\ &= \frac{1}{\varphi^2}(\lambda_d \lambda_b \eta_{ac} - \lambda^2 \eta_{ac} \eta_{bd} + \lambda_a \lambda_c \eta_{bd}) \theta^c \wedge \theta^d \end{aligned} \tag{A.23}$$

である。ここで、$\lambda^2 := \eta^{ab}\lambda_a\lambda_b$ である。

よって、

$$
\begin{aligned}
dA_{ab} \wedge *(\theta^a \wedge \theta^b) &= -\frac{1}{\varphi^2}(\partial_d\partial_b \ln\varphi\eta_{ac} - \partial_d\partial_a \ln\varphi\eta_{bc})(\eta^{ac}\eta^{bd} - \eta^{ad}\eta^{bc}) * 1 \\
&= -\frac{2(D-1)}{\varphi^2}\Box \ln\varphi * 1
\end{aligned}
\tag{A.24}
$$

である。ここで、

$$
\Box\bullet := \eta^{ab}\partial_a\partial_b\bullet \tag{A.25}
$$

である。$D = 4$ は次元である。また、

$$
\begin{aligned}
G_{ab} \wedge *(\theta^a \wedge \theta^b) &= \frac{1}{\varphi^2}(\lambda_d\lambda_b\eta_{ac} - \lambda^2\eta_{ac}\eta_{bd} + \lambda_a\lambda_c\eta_{bd})(\eta^{ac}\eta^{bd} - \eta^{ad}\eta^{bc}) * 1 \\
&= \frac{1}{\varphi^2}(D - D^2 + D - 1 + D - 1)\lambda^2 * 1 \\
&= -\frac{(D-1)(D-2)}{\varphi^2}\lambda^2 * 1
\end{aligned}
\tag{A.26}
$$

である。

よって、

$$
R = -\frac{2(D-1)}{\varphi^2}\left(\Box \ln\varphi + \frac{1}{2}(D-2)\lambda^2\right) \tag{A.27}
$$

である。ここで、

$$
\begin{aligned}
\Box \ln\varphi &= \eta^{\mu\nu}\partial_\nu\left(\frac{\partial_\mu\varphi}{\varphi}\right) \\
&= \frac{\Box\varphi}{\varphi} - \lambda^2
\end{aligned}
\tag{A.28}
$$

なので、

$$
\Box \ln\varphi + \frac{1}{2}(D-2)\lambda^2 = \frac{\Box\varphi}{\varphi} + \frac{1}{2}(D-4)\lambda^2, \tag{A.29}
$$

$$
R = -\frac{2(D-1)}{\varphi^3}\Box\varphi - \frac{(D-1)(D-4)\lambda^2}{\varphi^2} \tag{A.30}
$$

となる。$D = 4$ なので、

$$
R = -\frac{6\Box\varphi}{\varphi^3} \tag{A.31}
$$

である。

B　近日点移動：詳細

§ 3.1 の設定で考える。$c = 1$ とする。この章は [5] を参考にした。

パラメーター τ を、

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = -1 \tag{B.1}$$

と選ぶと、質点の運動方程式は、

$$\frac{d}{d\tau}\Big[(\eta_{\sigma\nu} + h_{\sigma\nu})\frac{dx^\sigma}{d\tau}\Big] = \frac{1}{2}\partial_\nu h_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} \tag{B.2}$$

となる。(B.2) の空間成分 $(i = 1, 2, 3)$ は、

$$\frac{d}{d\tau}\Big[(1 + h_s)\dot{x}^i\Big] = \frac{1}{2}\Big[\partial_i h_0 \dot{t}^2 + \partial_i h_s(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\Big] \tag{B.3}$$

となる。ここで、$\dot{X} := dX/d\tau$, $t = x^0$ である。(B.2) の時間成分は、

$$\frac{d}{d\tau}\Big[(1 - h_0)\dot{t}\Big] = 0 \tag{B.4}$$

となる。ここで、

$$\partial_0 h_{\mu\nu} = 0 \tag{B.5}$$

を仮定した。

(B.1) は、

$$(1 - h_0)\dot{t}^2 - (1 + h_s)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 1 \tag{B.6}$$

である。ところで、(B.4) より、

$$(1 - h_0)\dot{t} = K = \mathrm{const.} \tag{B.7}$$

である。これと (B.6) より、

$$\frac{K^2}{1 - h_0} - (1 + h_s)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 1 \tag{B.8}$$

である。

ところで、

$$\frac{d}{d\tau}\Big[(1 + h_s)(\dot{x}^i x^k - \dot{x}^k x^i)\Big] = \frac{d}{d\tau}\Big[(1 + h_s)\dot{x}^i\Big]x^k - \frac{d}{d\tau}\Big[(1 + h_s)\dot{x}^k\Big]x^i \tag{B.9}$$

である。今、h_0, h_s が $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ のみの関数とすると、(B.3) の右辺は x^i に比例する。よって、上式の右辺は 0 である：

$$\frac{d}{d\tau}\Big[(1 + h_s)(\dot{x}^i x^k - \dot{x}^k x^i)\Big] = 0. \tag{B.10}$$

これは角運動量の保存則である。特に、

$$L_1 := (1+h_s)(\dot{z}y - \dot{y}z), \tag{B.11}$$
$$L_2 := (1+h_s)(\dot{x}z - \dot{z}x), \tag{B.12}$$
$$L_3 := (1+h_s)(\dot{y}x - \dot{x}y) =: L \tag{B.13}$$

は保存する。

今、$L_1 = L_2 = 0$ を仮定する。この時、極座標表示で、$\varphi = \pi/2$ ($\dot{\varphi} = 0$) である[4)] 。また、

$$L = (1+h_s)r^2\dot{\theta}, \tag{B.14}$$
$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 = r^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\dot{\theta}^2 \tag{B.15}$$

である。(B.15) より、

$$\frac{K^2}{1-h_0} - (1+h_s)\dot{\theta}^2\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] = 1 \tag{B.16}$$

である。また、(B.14) より、

$$\dot{\theta} = \frac{L}{(1+h_s)r^2} \tag{B.17}$$

なので、

$$\frac{K^2}{1-h_0} - \frac{L^2}{(1+h_s)r^4}\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] = 1 \tag{B.18}$$

となる。今、

$$u := \frac{1}{r} \tag{B.19}$$

とすると、

$$\frac{du}{d\theta} = -u^2\frac{dr}{d\theta}, \tag{B.20}$$
$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \tag{B.21}$$

なので、

$$\frac{K^2}{1-h_0} - \frac{L^2}{(1+h_s)}\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right] = 1, \tag{B.22}$$
$$u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{K^2}{1-h_0} - 1\right)\frac{1+h_s}{L^2} \tag{B.23}$$

を得る。

[4)] ここでの θ, φ は多くの文献と逆である。つまり、ここでの φ は通常は θ と書かれるものである。

今、M を中心 $(r=0)$ にある星の質量とし、

$$\Phi := -2GMu, \tag{B.24}$$
$$h_0 = -\alpha\Phi - a\Phi^2 + \mathcal{O}(\Phi^3), \tag{B.25}$$
$$h_s = -\beta\Phi - b\Phi^2 + \mathcal{O}(\Phi^3) \tag{B.26}$$

を仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{K^2}{1-h_0} - 1 &= K^2(1 - \alpha\Phi - a\Phi^2 + \alpha^2\Phi^2 + \cdots) - 1 \\ &= K^2 - 1 - K^2\alpha\Phi + K^2(\alpha^2 - a)\Phi^2 + \cdots, \end{aligned} \tag{B.27}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{K^2}{1-h_0} - 1\right)\frac{1+h_s}{L^2} &= \frac{K^2-1}{L^2} - \frac{K^2\alpha}{L^2}\Phi + \frac{K^2}{L^2}(\alpha^2 - a)\Phi^2 \\ &\quad - \frac{K^2-1}{L^2}\beta\Phi - \frac{K^2-1}{L^2}b\Phi^2 + \frac{K^2\alpha\beta}{L^2}\Phi^2 + \mathcal{O}(\Phi^3) \\ &= A + Bu + Cu^2 + \cdots \end{aligned} \tag{B.28}$$

となる。ただし、

$$A = \frac{K^2-1}{L^2}, \tag{B.29}$$
$$B = \frac{2GM}{L^2}\Big[K^2\alpha + (K^2-1)\beta\Big], \tag{B.30}$$
$$C = \frac{(2GM)^2}{L^2}\Big[K^2(\alpha^2 + \alpha\beta - a) - (K^2-1)b\Big] \tag{B.31}$$

である。よって、

$$u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = A + Bu + Cu^2 + \cdots \tag{B.32}$$

となる。これを θ で微分して、$\cdots$ を無視すると、

$$u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{2}B + Cu, \tag{B.33}$$
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{2}B - (1-C)u \tag{B.34}$$

を得る。

$$u = \frac{B}{2(1-C)} + v \tag{B.35}$$

とすると、

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} = -(1-C)v \tag{B.36}$$

となる。これの解は、

$$v = v_0\cos(\sqrt{1-C}\,\theta) + v_1\sin(\sqrt{1-C}\,\theta) \tag{B.37}$$

であり、近日点は、角度が

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-C}} = 2\pi + C\pi + \mathcal{O}(C^2) \tag{B.38}$$

変化するたびに現れる。近日点の 1 周期ごとの歳差は、

$$\begin{aligned}\delta = C\pi &= \pi\frac{(2GM)^2}{L^2}\Big[K^2(\alpha^2+\alpha\beta-a)-(K^2-1)b\Big] \\ &\approx \pi\frac{(2GM)^2}{L^2}(\alpha^2+\alpha\beta-a)\end{aligned} \tag{B.39}$$

である。ここで、$K^2 \approx 1$ とした。

References

[1] A. Vecchiato, “Variational Approach to Gravity Field Theories”, Springer (2017).

[2] T. Ortin, “Gravity and Strings”, Cambridge University Press (2004).

[3] 内山龍雄『相対性理論』(岩波書店, 1977 年).

[4] 中嶋慧, 松尾衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』(現代数学社, 2020 年).

[5] ファインマン, モリニーゴ, ワーグナー (著), 和田純夫 (訳)『ファインマン講義重力の理論』(岩波書店, 1999 年).