SU(2) ゲージ場の変換則

中嶋 慧

January 14, 2020

Abstract

この記事では、SU(2) ゲージ場の変換則を計算する。

Contents

1　ゲージ場の変換則：一般の線形リー群の場合　1

2　SU(2) ゲージ場の変換則　4

1　ゲージ場の変換則：一般の線形リー群の場合

n 個の実数パラメーター $\varepsilon^r(r=1,2,\cdots,n)$ に依存する大域的変換

$$\psi'^A(x) = \boldsymbol{T}^A_B(\varepsilon)\psi^B(x) \tag{1.1}$$

で、場の組 ψ^A に対する作用が不変とする。ただし、$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ は線形リー群 G の表現になっているとする。$\varepsilon=0$ が恒等変換になるものとする。この時、局所的変換

$$\psi'^A(x) = \boldsymbol{T}^A_B(\varepsilon(x))\psi^B(x) \tag{1.2}$$

で作用が不変となるように、ψ のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0(\psi,\partial_\mu\psi)$ を修正することを考える。そのためには、

$$\partial_\mu\psi^A \to (\nabla_\mu\psi)^A \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu\psi^A + (\boldsymbol{A}_\mu)^A{}_B\psi^B \tag{1.3}$$

という置き換えをすれば良い。ただし、$\boldsymbol{A}_\mu$ は以下の変換則が成り立つように決める：

$$(\nabla'_\mu\psi')^A \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu\psi'^A + (\boldsymbol{A}'_\mu)^A{}_B\psi'^B = \boldsymbol{T}^A_B(\varepsilon(x))(\nabla_\mu\psi)^B. \tag{1.4}$$

ここで、$\psi'^A = \boldsymbol{T}^A_B(\varepsilon(x))\psi^B$ である。これより、

$$\boldsymbol{A}'_\mu = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu\boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} \tag{1.5}$$

を得る。

ところで、$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ は単位元の近くで、

$$\boldsymbol{T}(\varepsilon) = \exp[\varepsilon^r \boldsymbol{G}_r] \tag{1.6}$$

と書ける[1)]。$\boldsymbol{G}_r$ は G のリー代数の基底であり、それらの交換関係は、

$$[\boldsymbol{G}_r, \boldsymbol{G}_s] \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{G}_r \boldsymbol{G}_s - \boldsymbol{G}_s \boldsymbol{G}_r = f^t{}_{rs} \boldsymbol{G}_t \tag{1.7}$$

となる。$f^t{}_{rs} (= -f^t{}_{sr})$ は構造定数と呼ばれる実定数である。(1.6) に対して、

$$\partial_\mu \boldsymbol{T} = \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}} \partial_\mu \boldsymbol{E} e^{(1-s)\boldsymbol{E}} \quad (\boldsymbol{E} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^r \boldsymbol{G}_r) \tag{1.8}$$

である[2)] 。(1.8) より、

$$\begin{aligned} \partial_\mu \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^{-1} &= \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}} \partial_\mu \boldsymbol{E} e^{-s\boldsymbol{E}} \\ &= \partial_\mu \varepsilon^r \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}} \boldsymbol{G}_r e^{-s\boldsymbol{E}} \end{aligned} \tag{1.9}$$

となる。ところで、

$$e^{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{G}_r e^{-\boldsymbol{E}} = \alpha^s{}_r(\varepsilon) \boldsymbol{G}_s \tag{1.10}$$

である[3)]。よって、

$$\partial_\mu \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^{-1} = \partial_\mu \varepsilon^r \boldsymbol{G}_s \int_0^1 ds\ \alpha^s{}_r(s\varepsilon) =: \partial_\mu \varepsilon^r \boldsymbol{G}_s l^s{}_r(\varepsilon) \tag{1.11}$$

---

1)コンパクトで連結な線形リー群の任意の元は、この形で書ける [1]。U(n), SU(n), SO(n), Sp(n) は連結なコンパクト群である [1]。

2)ここで、

$$\frac{\partial e^{H(\alpha)}}{\partial \alpha^n} = \int_0^1 ds\ e^{sH(\alpha)} \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha^n} e^{(1-s)H(\alpha)}$$

を用いた。$\alpha = \{\alpha^n\}$ はパラメーター α^n の組である。これは以下のように示される。今、

$$C(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-xH(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha^n} e^{xH(\alpha)}$$

と置くと、$C(0) = 0$ であり、$C(x)$ は、

$$\frac{dC(x)}{dx} = e^{-xH(\alpha)} \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha^n} e^{xH(\alpha)}$$

を満たす。上式を $x = 0$ から $x = 1$ まで積分して、

$$C(1) = e^{-H(\alpha)} \frac{\partial e^{H(\alpha)}}{\partial \alpha^n} = \int_0^1 dx\ e^{-xH(\alpha)} \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha^n} e^{xH(\alpha)}$$

を得る。これに左から $e^{H(\alpha)}$ をかけて上の公式が得られる。

3)G を線形リー群とする。そのリー代数 $\mathfrak{g}$ は、

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathrm{M}(N, \mathbb{C}) | {}^\forall a \in \mathbb{R},\ \exp(aX) \in G\}$$

で定義される。$\mathfrak{g}$ の任意の元は $\varepsilon^r \boldsymbol{G}_r$ と書ける。ε^r は実数である。$X \in G$, $A \in \mathfrak{g}$ とすると、

$$X e^A X^{-1} = e^{XAX^{-1}} \in G$$

となる。
よって、(1.5) の第 2 項は、$\boldsymbol{G}_r$ の線形結合で書ける[4)]。今、

$$\boldsymbol{A}_\mu^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} A^r{}_\mu \boldsymbol{G}_r, \tag{1.12}$$
$$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{A}_\mu - \boldsymbol{A}_\mu^{(0)} \tag{1.13}$$

と置く。$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)}$ は $\boldsymbol{G}_r$ の線形結合では書けない部分である。これらはそれぞれ、

$$\boldsymbol{A}_\mu^{(0)\prime} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu^{(0)}\boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^{-1}, \tag{1.14}$$
$$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)\prime} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu^{(1)}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{1.15}$$

と変換する。$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)}$ は、(1.4) を満たすためには不要であり、0 であっても困ることはない。よって、$\boldsymbol{A}_\mu^{(1)} = 0$ と置く。このとき、

$$(\nabla_\mu \psi)^A = \partial_\mu \psi^A + A^r{}_\mu (\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \psi^B \tag{1.16}$$

となる。$A^r{}_\mu$ が一般のゲージ場である (線形リー群 G のゲージ場とも呼ばれる)。
ゲージ場の変換則は、

$$A'^r{}_\mu = \alpha^r{}_s(\varepsilon) A^s{}_\mu - l^r{}_s(\varepsilon)\partial_\mu \varepsilon^s \tag{1.17}$$

となる。実は、

$$\alpha^r{}_s(\varepsilon) = [\exp(\boldsymbol{e})]^r{}_s, \quad [\boldsymbol{e}]^a{}_b \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^r f^a{}_{rb} \tag{1.18}$$

である [2]。よって、

$$\begin{aligned} l^s{}_r(\varepsilon) &= \int_0^1 ds\ [\exp(s\boldsymbol{e})]^s{}_r \\ &= \int_0^1 ds\ \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} s^n [\boldsymbol{e}^n]^s{}_r \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)!} [\boldsymbol{e}^n]^s{}_r \end{aligned} \tag{1.19}$$

である。

なので、$XAX^{-1} \in \mathfrak{g}$ である。特に、$X\boldsymbol{G}_r X^{-1} \in \mathfrak{g}$ なので、

$$X\boldsymbol{G}_r X^{-1} = \alpha^s{}_r \boldsymbol{G}_s$$

と書ける。
[4)] $\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ が (1.6) の形で書けない場合にもそうである [2]。

2　SU(2) ゲージ場の変換則

さて、SU(2) ゲージ場の場合は、

$$\boldsymbol{G}_r = -i\sigma_r, \tag{2.1}$$
$$f^r{}_{st} = 2\varepsilon_{rst} \tag{2.2}$$

である。ここで σ_r はパウリ行列で、ε_{rst} は完全反対称で $\varepsilon_{123} = 1$ である。$\boldsymbol{G}_r$ は四元数の虚数単位とみなすことが出来る。$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ は、一般に、

$$\boldsymbol{T}(\varepsilon) = \exp(\varepsilon^r \boldsymbol{G}_r) \tag{2.3}$$

である。今、

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\varepsilon^1)^2 + (\varepsilon^2)^2 + (\varepsilon^3)^2}, \tag{2.4}$$
$$n_r \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^r/\varepsilon \tag{2.5}$$

とする。以下、$\varepsilon \neq 0$ とする。このとき、$\alpha^r{}_s(\varepsilon)$ は、回転軸 n_r 周りの大きさ 2ε の回転行列である [3]：

$$\alpha^r{}_s(\varepsilon) = \begin{pmatrix} c + n_1^2(1-c) & -n_3 s + n_1 n_2(1-c) & n_2 s + n_1 n_3(1-c) \\ n_3 s + n_1 n_2(1-c) & c + n_2^2(1-c) & -n_1 s + n_2 n_3(1-c) \\ -n_3 s + n_1 n_2(1-c) & n_1 s + n_2 n_3(1-c) & c + n_3^2(1-c) \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$
$$c \stackrel{\text{def}}{=} \cos(2\varepsilon), \quad s \stackrel{\text{def}}{=} \sin(2\varepsilon). \tag{2.7}$$

また、

$$l^r{}_s(\varepsilon) = \begin{pmatrix} C + n_1^2(1-C) & -n_3 S + n_1 n_2(1-C) & n_2 S + n_1 n_3(1-C) \\ n_3 S + n_1 n_2(1-C) & C + n_2^2(1-C) & -n_1 S + n_2 n_3(1-C) \\ -n_3 S + n_1 n_2(1-C) & n_1 S + n_2 n_3(1-C) & C + n_3^2(1-C) \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$
$$C \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 ds \ \cos(2s\varepsilon) = \frac{\sin(2\varepsilon)}{2\varepsilon}, \tag{2.9}$$
$$S \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 ds \ \sin(2s\varepsilon) = \frac{1-\cos(2\varepsilon)}{2\varepsilon} \tag{2.10}$$

である。SU(2) ゲージ場の変換則は、

$$A'^r{}_\mu = \alpha^r{}_s(\varepsilon) A^s{}_\mu - l^r{}_s(\varepsilon)\partial_\mu \varepsilon^s \tag{2.11}$$

となる。$\boldsymbol{A}_\mu \stackrel{\text{def}}{=} (A^1{}_\mu, A^2{}_\mu, A^3{}_\mu)$, $\boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3)$, $\boldsymbol{n} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varepsilon}/\varepsilon$ とすると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}'_\mu = {} & \boldsymbol{A}_\mu + \sin(2\varepsilon)\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A}_\mu + [1-\cos(2\varepsilon)]\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A}_\mu) \\ & -\partial_\mu \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1-\cos(2\varepsilon)}{2\varepsilon}\boldsymbol{n} \times \partial_\mu \boldsymbol{\varepsilon} - \left(1 - \frac{\sin(2\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \partial_\mu \boldsymbol{\varepsilon}) \end{aligned} \tag{2.12}$$

となる。

References

[1] 佐藤 光『群と物理』(丸善出版, 2016 年).

[2] 中嶋 慧「一般ゲージ場論」http://physnakajima.html.xdomain.jp/gauge.pdf

[3] 今野 紀雄『四元数』(森北出版, 2016 年).