SU(2) 回転の分解

中嶋 慧

May 21, 2019

1 SU(2) 回転の分解

$$[S_a, S_b] = i\varepsilon_{abc}S_c \tag{1.1}$$

$$R(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\Big(xi(\theta_1 S_1 + \theta_2 S_2 + \theta_3 S_3)\Big) \tag{1.2}$$

を

$$R(x) = \exp(if_3(x)S_3)\exp(if_2(x)S_2)\exp(if_1(x)S_1) \tag{1.3}$$

と分解したい。今、

$$R(x) = e^{if_3(x)S_3}T(x) \tag{1.4}$$

と置くと、

$$R'(x) = i(\theta_1 S_1 + \theta_2 S_2 + \theta_3 S_3)R(x) = i(\theta_1 S_1 + \theta_2 S_2 + \theta_3 S_3)e^{if_3(x)S_3}T(x) \tag{1.5}$$

であり ($X' = dX/dx$)、

$$R'(x) = if_3'(x)S_3 e^{if_3(x)S_3}T(x) + e^{if_3(x)S_3}T'(x) \tag{1.6}$$

である。よって、

$$i(\theta_1 S_1 + \theta_2 S_2 + \theta_3 S_3)e^{if_3(x)S_3}T(x) = if_3'(x)e^{if_3(x)S_3}T(x) + e^{if_3(x)S_3}T'(x), \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} T'(x) &= e^{-if_3(x)S_3}i(\theta_1 S_1 + \theta_2 S_2 + [\theta_3 - f_3'(x)]S_3)e^{if_3(x)S_3}T(x) \\ &= i\{e^{-if_3(x)S_3}(\theta_1 S_1 + \theta_2 S_2)e^{if_3(x)S_3} + [\theta_3 - f_3'(x)]S_3\}T(x) \end{aligned} \tag{1.8}$$

を得る。今、

$$S_i(x) = e^{-f_3(x)S_3}S_i e^{f_3(x)S_3} \tag{1.9}$$

とすると、

$$T'(x) = i\{\theta_1 S_1(x) + \theta_2 S_2(x) + [\theta_3 - f_3'(x)]S_3\}T(x) \tag{1.10}$$

となる。
　さて、

$$\begin{aligned} S_a'(x) &= -if_3'(x)e^{-if_3(x)S_3}[S_3, S_a]e^{if_3(x)S_3} \\ &= f_3'(x)\varepsilon_{3ak}S_k(x) \end{aligned} \tag{1.11}$$

である。つまり、

$$S_1'(x) = f_3'(x)S_2(x), \tag{1.12}$$
$$S_2'(x) = -f_3'(x)S_1(x) \tag{1.13}$$

である。今、

$$S_+ \stackrel{\text{def}}{=} S_1 + iS_2 \tag{1.14}$$

とすると、

$$S_+'(x) = -if_3'(x)S_+(x), \tag{1.15}$$
$$\begin{aligned} S_+(x) &= S_+ \exp(-i[f_3(x) - f_3(0)]) \\ &= S_+ e^{-if_3(x)} \end{aligned} \tag{1.16}$$

である。ここで、$f_3(0) = 0$ を用いた。よって、

$$S_1(x) = S_1 \cos f_3(x) + S_2 \sin f_3(x), \tag{1.17}$$
$$S_2(x) = S_2 \cos f_3(x) - S_1 \sin f_3(x) \tag{1.18}$$

となる。
　以上より、

$$T'(x) = i\{\theta_1[S_1 \cos f_3(x) + S_2 \sin f_3(x)] + \theta_2[S_2 \cos f_3(x) - S_1 \sin f_3(x)] + [\theta_3 - f_3'(x)]S_3\}T(x) \tag{1.19}$$

となる。
　次に、

$$T(x) = e^{if_2(x)S_2}U(x) \tag{1.20}$$

と置く。このとき、

$$T'(x) = if_2'(x)S_2e^{if_2(x)S_2}U(x) + e^{if_2(x)S_2}U'(x) \tag{1.21}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} U'(x) = i\{&e^{-if_2(x)S_2}S_1e^{if_2(x)S_2}[\theta_1 \cos f_3(x) - \theta_2 \sin f_3(x)] \\ &+S_2[\theta_1 \sin f_3(x) + \theta_2 \cos f_3(x) - f_2'(x)] \\ &+[\theta_3 - f_3'(x)]e^{-if_2(x)S_2}S_3e^{if_2(x)S_2}\}U(x) \end{aligned} \tag{1.22}$$

を得る。
　今、

$$\tilde{S}_i(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{-if_2(x)S_2} S_i e^{if_2(x)S_2} \tag{1.23}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\tilde{S}'_a(x) &= -if'_2(x)e^{-if_2(x)S_2}[S_2, S_a]e^{if_2(x)S_2} \\ &= f'_2(x)\varepsilon_{2ak}\tilde{S}_k(x)\end{aligned} \tag{1.24}$$

である。つまり、

$$\tilde{S}'_1(x) = -f'_2(x)\tilde{S}_3(x), \tag{1.25}$$

$$\tilde{S}'_3(x) = f'_2(x)\tilde{S}_1(x) \tag{1.26}$$

である。これを $f_2(0) = 0$ の下で解いて、

$$\tilde{S}_1(x) = S_1 \cos f_2(x) - S_3 \sin f_2(x), \tag{1.27}$$

$$\tilde{S}_3(x) = S_3 \cos f_2(x) + S_1 \sin f_2(x) \tag{1.28}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}U'(x) = i\{&[S_1 \cos f_2(x) - S_3 \sin f_2(x)][\theta_1 \cos f_3(x) - \theta_2 \sin f_3(x)] \\ &+S_2[\theta_1 \sin f_3(x) + \theta_2 \cos f_3(x) - f'_2(x)] \\ &+[\theta_3 - f'_3(x)][S_3 \cos f_2(x) + S_1 \sin f_2(x)]\}U(x) \\ = i\{&S_1([\theta_1 \cos f_3(x) - \theta_2 \sin f_3(x)] \cos f_2(x) + [\theta_3 - f'_3(x)] \sin f_2(x)) \\ &+S_2[\theta_1 \sin f_3(x) + \theta_2 \cos f_3(x) - f'_2(x)] \\ &+S_3([\theta_3 - f'_3(x)] \cos f_2(x) - [\theta_1 \cos f_3(x) - \theta_2 \sin f_3(x)] \sin f_2(x))\}U(x)\end{aligned} \tag{1.29}$$

となる。$U(x)$ は S_1 だけの関数なので、$U'(x)$ の S_2, S_3 の係数は 0 である：

$$\theta_1 \sin f_3(x) + \theta_2 \cos f_3(x) - f'_2(x) = 0, \tag{1.30}$$

$$\{\theta_3 - f'_3(x)\} \cos f_2(x) - \{\theta_1 \cos f_3(x) - \theta_2 \sin f_3(x)\} \sin f_2(x) = 0. \tag{1.31}$$

　(1.31) より、

$$\{\theta_3 - f'_3(x)\} - \{\theta_1 \cos f_3(x) - \theta_2 \sin f_3(x)\} \tan f_2(x) = 0, \tag{1.32}$$

$$\tan f_2(x) = \frac{\theta_3 - f'_3(x)}{\theta_1 \cos f_3(x) - \theta_2 \sin f_3(x)} \tag{1.33}$$

である。また、(1.31) を微分して、

$$\begin{aligned}&-f''_3(x) \cos f_2(x) - \{\theta_3 - f'_3(x)\} \sin f_2(x) f'_2(x) + \{\theta_1 \sin f_3(x) + \theta_2 \cos f_3(x)\} f'_3(x) \sin f_2(x) \\ &-\{\theta_1 \cos f_3(x) - \theta_2 \sin f_3(x)\} \cos f_2(x) f'_2(x) = 0\end{aligned} \tag{1.34}$$

これは、

$$
\begin{aligned}
&-f_3''(x) + \{-\theta_3 + 2f_3'(x)\} \tan f_2(x)[\theta_1 \sin f_3(x) + \theta_2 \cos f_3(x)] \\
&-\{\theta_1 \cos f_3(x) - \theta_2 \sin f_3(x)\}[\theta_1 \sin f_3(x) + \theta_2 \cos f_3(x)] = 0
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

と書ける。(1.33) より、

$$
\begin{aligned}
&-f_3''(x) + \{-\theta_3 + 2f_3'(x)\} \frac{\theta_3 - f_3'(x)}{\theta_1 \cos f_3(x) - \theta_2 \sin f_3(x)} [\theta_1 \sin f_3(x) + \theta_2 \cos f_3(x)] \\
&-\{\theta_1 \cos f_3(x) - \theta_2 \sin f_3(x)\}[\theta_1 \sin f_3(x) + \theta_2 \cos f_3(x)] = 0
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

を得る。