ルンゲ, ホイン, クッタ

中嶋 慧

January 23, 2024

Abstract

ルンゲの 1895 年の論文, ホインの 1900 年の論文, クッタの 1901 年の論文を解説する。

Contents

1 ルンゲ (1895)

常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.1}$$

を考える。

ルンゲの 1895 年の論文 [1] では現在ホイン法として知られる

$$\Delta y = \frac{f(x, y) + f(x + \Delta x, y + f(x, y)\Delta x)}{2}\Delta x + O(\Delta x^3) \tag{1.2}$$

が書かれている。また、

$$\Delta y = \frac{\Delta' y + \Delta''' y}{2} + O(\Delta x^3), \tag{1.3}$$

$$\Delta' y := f(x, y)\Delta x, \tag{1.4}$$

$$\Delta'' y := f(x + \Delta x, y + \Delta' y)\Delta x, \tag{1.5}$$

$$\Delta''' y := f(x + \Delta x, y + \Delta'' y)\Delta x \tag{1.6}$$

が書かれている。この論文の内容はあまり系統的ではない。

2　ホイン (1900)

ホインの 1900 年の論文 [2] では以下の近似が研究された：

$$\Delta y = \sum_\nu \alpha_\nu f(x + \varepsilon_\nu \Delta x, y + \varepsilon_\nu \Delta'_\nu y)\Delta x + O(\Delta x^5), \tag{2.1}$$

$$\Delta'_\nu y = f(x + \varepsilon'_\nu \Delta x, y + \varepsilon'_\nu \Delta''_\nu y)\Delta x, \tag{2.2}$$

$$\Delta''_\nu y = f(x + \varepsilon''_\nu \Delta x, y + \varepsilon''_\nu f(x, y)\Delta x)\Delta x. \tag{2.3}$$

現代、4 次のルンゲ・クッタ法として知られる以下の方法 [4, 5] は上のクラスに入る：

$$\Delta y = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}\Delta x + O(\Delta x^5), \tag{2.4}$$

$$k_1 := f(x, y), \tag{2.5}$$

$$k_2 := f(x + \frac{1}{2}\Delta x, y + \frac{1}{2}k_1\Delta x), \tag{2.6}$$

$$k_3 := f(x + \frac{1}{2}\Delta x, y + \frac{1}{2}k_2\Delta x), \tag{2.7}$$

$$k_4 := f(x + \Delta x, y + k_3\Delta x). \tag{2.8}$$

実際、$\alpha_\nu = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ および、

$$\varepsilon_\nu = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \tag{2.9}$$

$$\varepsilon'_\nu = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \tag{2.10}$$

$$\varepsilon''_\nu = (0, 0, 0, \frac{1}{2}) \tag{2.11}$$

とすれば良い。ホインは以下の条件が満たされるとき、Δy の誤差が $O(\Delta x^5)$ になることを示した：

$$\sum_\nu \alpha_\nu = 1, \tag{2.12}$$

$$\sum_\nu \alpha_\nu \varepsilon_\nu = \frac{1}{2}, \tag{2.13}$$

$$\sum_\nu \alpha_\nu \varepsilon_\nu^2 = \frac{1}{3}, \tag{2.14}$$

$$\sum_\nu \alpha_\nu \varepsilon_\nu \varepsilon'_\nu = \frac{1}{6}, \tag{2.15}$$

$$\sum_\nu \alpha_\nu \varepsilon_\nu^3 = \frac{1}{4}, \tag{2.16}$$

$$\sum_\nu \alpha_\nu \varepsilon_\nu^2 \varepsilon'_\nu = \frac{1}{8}, \tag{2.17}$$

$$\sum_\nu \alpha_\nu \varepsilon_\nu (\varepsilon'_\nu)^2 = \frac{1}{12}, \tag{2.18}$$

$$\sum_\nu \alpha_\nu \varepsilon_\nu \varepsilon'_\nu \varepsilon''_\nu = \frac{1}{24}. \tag{2.19}$$

4 次のルンゲ・クッタ法ではこれは満たされる。

3　クッタ (1901)

クッタの 1901 年の論文 [3] では、以下のクラスが系統的に調べられた：

$$\Delta y = a\Delta' + b\Delta'' + c\Delta''' + d\Delta'''' + O(\Delta x^5), \tag{3.1}$$

$$\Delta' = f(x, y)\Delta x, \tag{3.2}$$

$$\Delta'' = f(x + \kappa\Delta x, y + \kappa\Delta')\Delta x, \tag{3.3}$$

$$\Delta''' = f(x + \lambda\Delta x, y + \rho\Delta'' + (\lambda - \rho)\Delta')\Delta x, \tag{3.4}$$

$$\Delta'''' = f(x + \mu\Delta x, y + \sigma\Delta''' + \tau\Delta'' + (\mu - \sigma - \tau)\Delta')\Delta x. \tag{3.5}$$

特別な場合として上述の 4 次のルンゲ・クッタ法と以下の「クッタの 3/8 公式」(シンプソンの 3/8 公式に対応) が導かれた：

$$\Delta y = \frac{\Delta' + 3\Delta'' + 3\Delta''' + \Delta''''}{8} + O(\Delta x^5), \tag{3.6}$$

$$\Delta' = f(x, y)\Delta x, \tag{3.7}$$

$$\Delta'' = f(x + \frac{1}{3}\Delta x, y + \frac{1}{3}\Delta')\Delta x, \tag{3.8}$$

$$\Delta''' = f(x + \frac{2}{3}\Delta x, y + \Delta'' - \frac{1}{3}\Delta')\Delta x, \tag{3.9}$$

$$\Delta'''' = f(x + \Delta x, y + \Delta''' - \Delta'' + \Delta')\Delta x. \tag{3.10}$$

クッタは更に 5 段 5 次および 6 段 5 次の (陽的) ルンゲ・クッタ法を研究し、5 段 5 次は不可能だと結論付けた。5 次の条件を 16 個導出したが、本当は 17 個ある [6]。6 段 5 次の公式を 2 つ書いたが、計算が間違っていて、誤差は $O(\Delta x^4)$ と $O(\Delta x^2)$ であった。

References

[1] C. Runge, "Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen", Math. Ann. **46**, 167 (1895).

[2] K. Heun, "Neue Methoden zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen", Z. Angew Math. Phys. **45**, 23 (1900).

[3] W. Kutta, "Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen", Zeitschrift für Mathematik und Physik, **46**, 435 (1901).

[4] 緒方秀教「常微分方程式の数値解法と数値積分」

[5] 中嶋慧「4 次のルンゲ・クッタ法とシンプソン公式」
`http://physnakajima.html.xdomain.jp/RK_Simpson.pdf`

[6] 中嶋慧「5 次のルンゲ・クッタ法の条件」
`http://physnakajima.html.xdomain.jp/RK5pdf`