ラマヌジャンのある公式

中嶋 慧

December 24, 2022

Abstract

ラマヌジャン (ハーディへの手紙) によると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{(1000+n)^n} = \frac{1}{1000} - \delta, \tag{0.1}$$

$$\delta \approx 1.0125 \times 10^{-440} \tag{0.2}$$

である。これについて考える。

Contents

1　解析的な結果

$$f_\alpha(x) := \frac{x^{x-2}}{(\alpha+x)^x} \quad (\alpha > 0) \tag{1.1}$$

とし、

$$S(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} f_\alpha(n) \tag{1.2}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{(\alpha+n)^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} \frac{\Gamma(n)}{(\alpha+n)^n} \end{aligned} \tag{1.3}$$

である。公式

$$\frac{\Gamma(s)}{\beta^s} = \int_0^\infty dt\ t^{s-1} e^{-\beta t} \tag{1.4}$$

より、

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} \int_0^\infty dt\ t^{n-1} e^{-nt} e^{-\alpha t} \\ &= \int_0^\infty dt\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} (te^{-t})^n \frac{e^{-\alpha t}}{t} =: \int_0^\infty dt\ U(t) e^{-\alpha t} \end{aligned} \tag{1.5}$$

である。$U(t)$ のグラフを Figure 1 に示す。いま、

$$W(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n \quad \Big(-\frac{1}{e} \le x \le \frac{1}{e}\Big) \tag{1.6}$$

とすると、これはランベルトの W 関数なので、$t < 1$ のとき、

$$W(-te^{-t}) = -t \tag{1.7}$$

である。また、

$$U(t) = -\frac{W(-te^{-t})}{t} \tag{1.8}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \int_0^1 dt\ e^{-\alpha t} + \int_1^\infty dt\ U(t) e^{-\alpha t} \\ &=: \mathcal{S}_1(\alpha) + \mathcal{S}_2(\alpha) \end{aligned} \tag{1.9}$$

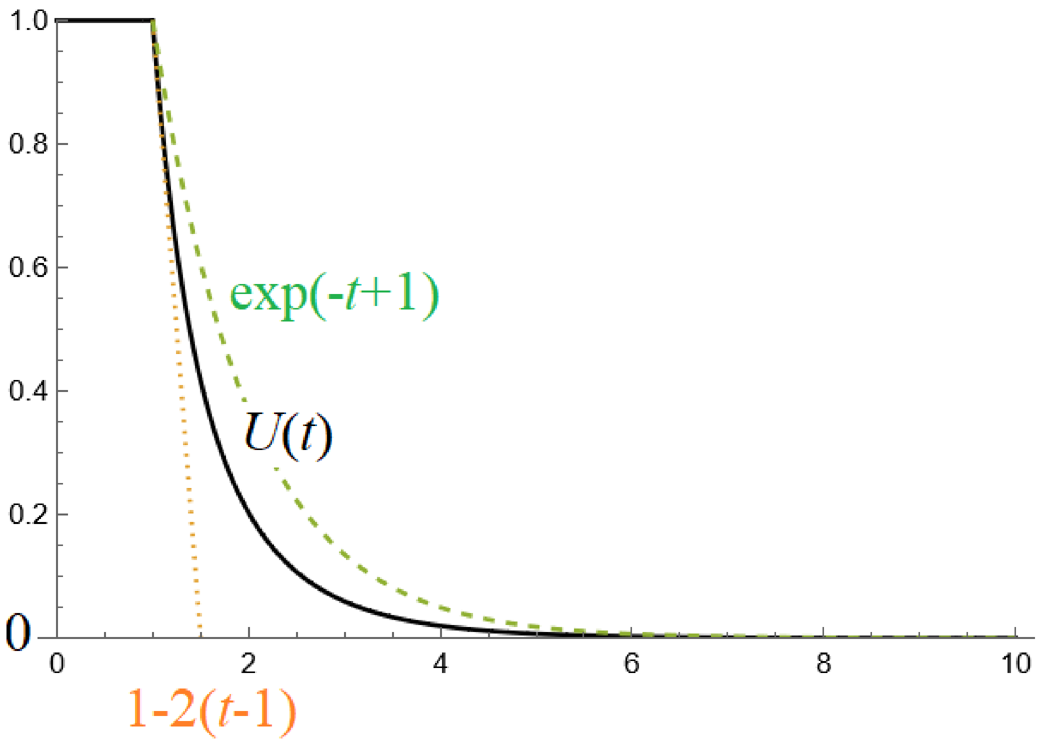

Figure 1: $U(t)$, e^{-t+1}, $1-2(t-1)$ のグラフ

となる。ここで、

$$\mathcal{S}_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}, \tag{1.10}$$

$$\mathcal{S}_2(\alpha) = \int_1^\infty dt\ U(t)e^{-\alpha t} \tag{1.11}$$

である。

　さて、

$$y \le -W(-y) \le ey \quad \left(0 \le y \le \frac{1}{e}\right) \tag{1.12}$$

より、

$$e^{-t} \le U(t) \le ee^{-t} \quad (t \ge 1) \tag{1.13}$$

なので、

$$\frac{e^{-(\alpha+1)}}{\alpha+1} < \mathcal{S}_2(\alpha) < \frac{e^{-\alpha}}{\alpha+1} \tag{1.14}$$

となる。いま、

$$S(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \delta(\alpha) \tag{1.15}$$

と置くと、

$$e^{-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1}\right) < \delta(\alpha) < e^{-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{e}\frac{1}{\alpha+1}\right) \tag{1.16}$$

となる。

ところで、ラマヌジャンによると、

$$\mathcal{S}_2(\alpha) = e^{-\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{4}{3}\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+4)} - \frac{4}{3}\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+23/3+\theta_\alpha)}\Big), \tag{1.17}$$

$$\theta_0 = 0.0023, \quad \theta_1 = 0.1379, \quad \theta_\infty = \frac{1}{5} \tag{1.18}$$

である (付録 A も参照)[1]。よって、

$$\delta(\alpha) = 2\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2}\Big(1 - \frac{8}{3\alpha} + \frac{28}{3\alpha^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{\alpha^3})\Big) \tag{1.19}$$

であり、

$$\delta(1000) = 1.0124940... \times 10^{-440} \tag{1.20}$$

となる。

また、Figure 1 より、

$$U(t) \geq \max\{1 - 2(t-1), 0\} \quad (t \geq 1) \tag{1.21}$$

なので、これを使うと、

$$\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - 2\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha/2}) < \mathcal{S}_2(\alpha) \tag{1.22}$$

を得る。これと (1.16) より、

$$e^{-\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1}\Big) < \delta(\alpha) < 2\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha/2}) \tag{1.23}$$

となる。ここで、下限は、

$$e^{-\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1}\Big) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2} + \cdots \tag{1.24}$$

である。

2　数値解析

今、

$$S_{m,n}(\alpha) := \sum_{k=m}^{n} f_\alpha(k) \tag{2.1}$$

と置くと、

$$-\delta(\alpha) = S(\alpha) - \frac{1}{\alpha} = \Big[S_{1,N} - \frac{1}{\alpha}\Big] + \Big[- f_\alpha(N) + S_{N,\infty}\Big] \tag{2.2}$$

である。ここで、

$$S_{1,N} - \frac{1}{\alpha} =: -\delta_N(\alpha) \tag{2.3}$$

と置く。また、

$$d_N(\alpha) := -f_\alpha(N) + S_{N,\infty} \tag{2.4}$$

と置くと、

$$\delta(\alpha) = \delta_N(\alpha) - d_N(\alpha) \tag{2.5}$$

となる。Python で mpmath を用いて 465 桁の精度 (mpmath.mp.dps = 465) で $\delta_{10^7}(1000)$ を求めると、

$$\delta_{10^7}(1000) = 1.064543969... \times 10^{-440} \tag{2.6}$$

であった。この計算には 42 分かかった。

$d_N(\alpha)$ をオイラー・マクローリンの総和則で評価する。オイラー・マクローリンの総和則より、

$$S_{m,n} = \int_m^n dx\ f_\alpha(x) + \frac{1}{2}[f_\alpha(m) + f_\alpha(n)] + R_{m,n}, \tag{2.7}$$

$$R_{m,n} = \int_m^n dx\ \tilde{B}_1(x) f'_\alpha(x) \tag{2.8}$$

である。$\tilde{B}_k(x)$ は周期ベルヌーイ多項式である。さて、

$$|\tilde{B}_1(x)| \leq \frac{1}{2} \tag{2.9}$$

なので、

$$|R_{m,n}| \leq \frac{1}{2} \int_m^n dx\ |f'_\alpha(x)| = \frac{1}{2}[f_\alpha(m) - f_\alpha(n)] \tag{2.10}$$

となる。よって、

$$d_N(\alpha) = \int_N^\infty dx\ f_\alpha(x) + \Big[- \frac{1}{2} + \frac{\eta}{2}\Big] f_\alpha(N), \quad |\eta| \leq 1 \tag{2.11}$$

である。
　ところで、

$$\begin{aligned} \ln f_\alpha(x) &= \ln\frac{1}{x^2} - x\ln(1+\frac{\alpha}{x}) \\ &= \ln\frac{1}{x^2} - \alpha + \frac{\alpha^2}{2x} - \frac{\alpha^3}{3x^2} + \frac{\alpha^4}{4x^4} - \cdots, \qquad (2.12) \\ f_\alpha(x) &= e^{-\alpha}\Big[\frac{1}{x^2} + \frac{\alpha^2}{2x^3} + \frac{\alpha^4}{8x^3}\Big(1-\frac{8}{2\alpha}\Big) + \cdots\Big] \qquad (2.13) \end{aligned}$$

なので、

$$N = \frac{\alpha^2}{\varepsilon} \tag{2.14}$$

とすると、

$$\int_N^\infty dx\ f_\alpha(x) = \varepsilon\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2}\Big[1+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{24}\Big(1-\frac{8}{2\alpha}\Big)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)\Big] \tag{2.15}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} d_N(\alpha) &= \varepsilon\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2}\Big[1+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{24}\Big(1-\frac{8}{2\alpha}\Big)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)+\frac{\xi}{N}\Big], \qquad (2.16) \\ \xi &= \Big[-\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}\Big]\Big[1+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{8}\Big(1-\frac{8}{2\alpha}\Big)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)\Big] \qquad (2.17) \end{aligned}$$

である。これより、

$$\alpha = 1000, \quad \varepsilon = 0.1 \tag{2.18}$$

として、

$$\begin{aligned} d_{10^7}(1000) &= 0.0520496... \times (1+\mathcal{O}(10^{-4})) \times 10^{-440} \\ &\approx 0.05205 \times 10^{-440} \qquad (2.19) \end{aligned}$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned} \delta(1000) &= \delta_{10^7}(1000) - d_{10^7}(1000) \\ &\approx (1.064543969... - 0.05205) \times 10^{-440} \\ &\approx 1.01249 \times 10^{-440} \qquad (2.20) \end{aligned}$$

を得る。これはラマヌジャンの結果 (1.20)、すなわち、

$$\delta(1000) = 1.0124940... \times 10^{-440} \tag{2.21}$$

と整合する。

3　精度を上げる

3.1　(2.13) の精密化

(2.13) を精密化すると、

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\alpha}}{x^2}\Big[1 + \frac{\alpha^2}{2x} + \sum_{l=2}^{\infty} A_l(\alpha)\Big(\frac{\alpha^2}{x}\Big)^l\Big], \tag{3.1}$$

$$A_2(\alpha) = \frac{1}{24}\Big(3 - \frac{8}{\alpha}\Big), \tag{3.2}$$

$$A_3(\alpha) = \frac{1}{48}\Big(1 - \frac{8}{\alpha} + \frac{12}{\alpha^2}\Big), \tag{3.3}$$

$$A_4(\alpha) = \frac{1}{5760}\Big(15 - \frac{240}{\alpha} + \frac{1040}{\alpha^2} - \frac{1152}{\alpha^3}\Big), \tag{3.4}$$

$$A_5(\alpha) = \frac{1}{11520}\Big(3 - \frac{80}{\alpha} + \frac{680}{\alpha^2} - \frac{2112}{\alpha^3} + \frac{1920}{\alpha^4}\Big) \tag{3.5}$$

となる。よって、

$$\int_N^\infty dx\ f_\alpha(x) = \varepsilon\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2}\Big[1 + \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{l=2}^{5}\frac{A_l(\alpha)}{l+1}\varepsilon^l + \mathcal{O}(\varepsilon^6)\Big], \tag{3.6}$$

$$d_N(\alpha) = \varepsilon\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2}\Big[1 + \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{l=2}^{5}\frac{A_l(\alpha)}{l+1}\varepsilon^l + \mathcal{O}(\varepsilon^6) + \frac{\xi}{N}\Big], \tag{3.7}$$

$$\xi = \Big[-\frac{1}{2} + \frac{\eta}{2}\Big]\Big[1 + \sum_{l=2}^{5} A_l(\alpha)\varepsilon^l + \mathcal{O}(\varepsilon^6)\Big], \quad |\eta| < 1 \tag{3.8}$$

を得る。よって、

$$d_{10^7}(1000) = 0.0520499370... \times (1 + \mathcal{O}(10^{-7})) \times 10^{-440}, \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\delta(1000) &= \delta_{10^7}(1000) - d_{10^7}(1000) \\ &\approx 1.01249403 \times 10^{-440}\end{aligned} \tag{3.10}$$

を得る。これはラマヌジャンの

$$\delta(1000) = 1.0124940... \times 10^{-440} \tag{3.11}$$

と整合する。

3.2　$N = 10^8$

ところで、Julia を使うと、

$$\delta_{10^8}(1000) = 1.0175827047960000597... \times 10^{-440} \tag{3.12}$$

が 46.5 分で得られた。 setprecision(1550) とした[1)]。一方、

$$d_{10^8}(1000) = 0.00508866991... \times (1 + \mathcal{O}(10^{-8})) \times 10^{-440} \tag{3.13}$$

なので、

$$\begin{aligned} \delta(1000) &= \delta_{10^8}(1000) - d_{10^8}(1000) \\ &\approx 1.0124940349 \times 10^{-440} \end{aligned} \tag{3.14}$$

を得る。

3.3 ラマヌジャンの式の評価

なお、(1.17) で θ_α を θ で置き換えた式から $\delta(\alpha)$ を計算したものを $\delta(\alpha, \theta)$ と書くと、

$$\delta(1000, \theta_1) = 1.0124940349471... \times 10^{-440}, \tag{3.15}$$

$$\delta(1000, \theta_\infty) = 1.0124940349060... \times 10^{-440} \tag{3.16}$$

となり、

$$\delta(1000) = 1.0124940349... \times 10^{-440} \tag{3.17}$$

まで確定する。これは (3.14) と整合する。

3.4 オイラー・マクローリンの総和公式からの精密化

オイラー・マクローリンの総和公式より、

$$\begin{aligned} S_{m,n} = &\int_m^n dx\ f_\alpha(x) + \frac{1}{2}[f_\alpha(m) + f_\alpha(n)] + \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f_\alpha^{(2k-1)}(n) - f_\alpha^{(2k-1)}(m)\right] \\ &+ R_{m,n}^{(2\mathcal{N}+1)}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$R_{m,n}^{(2\mathcal{N}+1)} = \frac{1}{(2\mathcal{N}+1)!}\int_m^n dx\ \tilde{B}_{2\mathcal{N}+1}(x) f_\alpha^{(2\mathcal{N}+1)}(x) \tag{3.19}$$

である。B_{2k} はベルヌーイ数である。$R_{m,n}^{(2\mathcal{N}+1)}$ の絶対値は、

$$\begin{aligned} |R_{m,n}^{(2\mathcal{N}+1)}| &< \frac{1}{(2\mathcal{N}+1)!}\int_m^n dx\ |\tilde{B}_{2\mathcal{N}+1}(x)||f_\alpha^{(2\mathcal{N}+1)}(x)| \\ &\le \mathcal{B}_{2\mathcal{N}+1}\int_m^n dx\ |f_\alpha^{(2\mathcal{N}+1)}(x)|, \quad \mathcal{B}_{2\mathcal{N}+1} := \frac{1}{(2\mathcal{N}+1)!}\max|\tilde{B}_{2\mathcal{N}+1}(x)| \end{aligned} \tag{3.20}$$

となる。ところで、$\{A_l(1000)\}_{l=2}^5$ は全て正であるから、$f_\alpha^{(3)}(x) < 0$ である。よって、

$$|R_{m,n}^{(3)}| < \mathcal{B}_3[f_\alpha^{(2)}(m) - f_\alpha^{(2)}(n)], \quad \mathcal{B}_3 = \frac{1}{72\sqrt{3}} = 0.008018\cdots \tag{3.21}$$

---

1) setprecision(1550) で $\delta_{10^7}(1000)$ を計算するのに 3.8 分かかった。

であり、

$$S_{m,n} = \int_m^n dx\ f_\alpha(x) + \frac{1}{2}[f_\alpha(m) + f_\alpha(n)] + \frac{1}{12}\Big[f'_\alpha(n) - f'_\alpha(m)\Big]$$
$$+\mathcal{B}_3\eta_3[f^{(2)}_\alpha(m) - f^{(2)}_\alpha(n)], \quad |\eta_3| < 1 \tag{3.22}$$

となる。$n \to \infty$ とすると、

$$S_{m,\infty} = \int_m^\infty dx\ f_\alpha(x) + \frac{1}{2}f_\alpha(m) + \frac{1}{12}\Big[-f'_\alpha(m)\Big] + \mathcal{B}_3\eta_3 f^{(2)}_\alpha(m) \tag{3.23}$$

である。よって、

$$d_N(\alpha) = \varepsilon\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2}\Big[1 + \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{l=2}^{5}\frac{A_l(\alpha)}{l+1}\varepsilon^l + \mathcal{O}(\varepsilon^6)\Big] - \frac{1}{2}f_\alpha(N)$$
$$+\frac{1}{12}\Big[-f'_\alpha(N)\Big] + \mathcal{B}_3\eta_3 f^{(2)}_\alpha(N) \tag{3.24}$$

となる。さて、

$$f_\alpha(x) = e^{-\alpha}\Big[\frac{1}{x^2} + \frac{\alpha^2}{2x^3} + \sum_{l=2}^{\infty}A_l(\alpha)\frac{\alpha^{2l}}{x^{l+2}}\Big] \tag{3.25}$$

なので、

$$f'_\alpha(x) = e^{-\alpha}\Big[-\frac{2}{x^3} - 3\frac{\alpha^2}{2x^4} - \sum_{l=2}^{\infty}(l+2)A_l(\alpha)\frac{\alpha^{2l}}{x^{l+3}}\Big], \tag{3.26}$$

$$f^{(2)}_\alpha(x) = e^{-\alpha}\Big[\frac{6}{x^4} + 6\frac{\alpha^2}{x^5} + \sum_{l=2}^{\infty}(l+2)(l+3)A_l(\alpha)\frac{\alpha^{2l}}{x^{l+4}}\Big] \tag{3.27}$$

となる。よって、

$$\frac{1}{12}\Big[-f'_\alpha(N)\Big] = \varepsilon\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2}\frac{1}{12N^2}\Big[2 + \frac{3}{2}\varepsilon + \sum_{l=2}^{\infty}(l+2)A_l(\alpha)\varepsilon^l\Big], \tag{3.28}$$

$$\mathcal{B}_3\eta_3 f^{(2)}_\alpha(N) = \varepsilon\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2}\frac{\xi}{N^3}, \tag{3.29}$$

$$\xi = \mathcal{B}_3\eta_3(6 + 6\varepsilon + \cdots) = 0.04811\cdots \times \eta_3(1 + \varepsilon + \cdots) \tag{3.30}$$

となる。従って、

$$d_N(\alpha) = \varepsilon\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2}\Big[1 + \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{l=2}^{\infty}\frac{A_l(\alpha)}{l+1}\varepsilon^l + \frac{1}{12N^2}\Big\{2 + \frac{3}{2}\varepsilon + \sum_{l=2}^{\infty}(l+2)A_l(\alpha)\varepsilon^l\Big\} + \frac{\xi}{N^3}\Big]$$
$$-\frac{1}{2}f_\alpha(N) \tag{3.31}$$

である。これより、

$$\delta(1000) = \delta_{10^8}(1000) - d_{10^8}(1000) = 1.0124940349070... \times 10^{-440} \tag{3.32}$$

を得る。これは (3.15), (3.16) と整合する。

3.5 $N = 10^9$

Julia で、setprecision(1650) で 8 時間ほど計算して、

$$\delta_{10^9}(1000) = 1.0130017577166019123182544811067051... \times 10^{-440} \tag{3.33}$$

を得た。また、(3.31) より、

$$d_{10^9}(1000) \approx 0.0005077228095695116046921030 11 \times 10^{-440} \tag{3.34}$$

を得る (Wolfram を用いた)。よって、

$$\delta(1000) \approx 1.0124940349070324007135623780962 \times 10^{-440} \tag{3.35}$$

となる。これは (A.10) と整合し、(A.27) と一致する。

A　$\delta(\alpha)$ の正確な公式

すぐ後で示すように、$a,p>0$ で、p が ∞ に向かうとき、以下の式が成り立つ：

$$S(a,p) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+n)^{n-1}}{(2p+a+n)^{n+1}} = \frac{1}{2ap} - \delta(a,p), \tag{A.1}$$

$$\delta(a,p) \sim e^{-2p}\Big[\frac{1}{2p(p+a)} - \frac{1}{6(p+a)^3} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^l p^{l-1} P_l(p)}{(p+a)^{2l+1}}\Big], \tag{A.2}$$

$$P_2(p) = \frac{1}{6} + \frac{1}{30p}, \tag{A.3}$$

$$P_3(p) = \frac{5}{18} + \frac{1}{6p} + \frac{1}{42p^2}, \tag{A.4}$$

$$P_4(p) = \frac{35}{54} + \frac{7}{9p} + \frac{3}{10p^2} + \frac{1}{30p^3}, \tag{A.5}$$

$$P_5(p) = \frac{35}{18} + \frac{35}{9p} + \frac{17}{6p^2} + \frac{5}{6p^3} + \frac{5}{66p^4}, \tag{A.6}$$

$$P_6(p) = \frac{385}{54} + \frac{385}{18p} + \frac{451}{18p^2} + \frac{616}{45p^3} + \frac{691}{210p^4} + \frac{691}{2730p^5}, \tag{A.7}$$

$$P_7(p) = \frac{5005}{162} + \frac{7007}{54p} + \frac{2002}{9p^2} + \frac{26026}{135p^3} + \frac{7709}{90p^4} + \frac{35}{2p^5} + \frac{7}{6p^6}. \tag{A.8}$$

$\sim$ は漸近展開を表す。これもラマヌジャンの結果のようである。特に、$a=1$ とすると、

$$S(\alpha) = S(1,\alpha/2), \quad \delta(\alpha) = \delta(1,\alpha/2) \tag{A.9}$$

である。よって、上の式から、

$$\delta(1000) \approx 1.012494034907032401 \times 10^{-440} \tag{A.10}$$

となる。これは (3.15), (3.16), (3.35) と整合する。

(A.2) を示す [1]。まず、

$$\begin{aligned} S(a,p/2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+n)^{n-1}}{(p+a+n)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2\left(1+\frac{p}{a+n}\right)^{n+1}} \end{aligned} \tag{A.11}$$

である。$|x|<1$ のとき、

$$\frac{1}{(1+x)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)} x^k \tag{A.12}$$

なので、$0 < p < a$ のとき、

$$
\begin{aligned}
S(a,p/2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+1)} \Big(\frac{p}{a+n}\Big)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{(a+n)^{k+2}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{\Gamma(k+2)} \int_0^\infty dt\ t^{k+1} e^{-(a+n)t} \\
&= \int_0^\infty dt\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{(k+1)\Gamma(k+1)} (e^{-t})^n t^{k+1} e^{-at} \\
&= \int_0^\infty dt\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p)^k}{(k+1)!} \frac{1}{(1-e^{-t})^{k+1}} t^{k+1} e^{-at} \\
&= -\frac{1}{p} \int_0^\infty dt\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \Big(\frac{-pt}{1-e^{-t}}\Big)^{k+1} e^{-at} \\
&= -\frac{1}{p} \int_0^\infty dt\ \Big[\exp\Big(\frac{-pt}{1-e^{-t}}\Big) - 1\Big] e^{-at} \\
&= \frac{1}{ap} - \frac{1}{p} \int_0^\infty dt\ \exp\Big(\frac{-pt}{1-e^{-t}}\Big) e^{-at} \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}
$$

となる。両辺は $\mathrm{Re}(a) > 0$, $\mathrm{Re}(p) > 0$ のとき解析的である。解析接続より、上式は、$\mathrm{Re}(a) > 0$, $\mathrm{Re}(p) > 0$ のときに成立する ($0 < p < a$ の条件は不要である)。よって、

$$
\begin{aligned}
\delta(a,p/2) &= \frac{1}{p} \int_0^\infty dt\ \exp\Big(\frac{-pt}{1-e^{-t}}\Big) e^{-at}, \qquad \text{(A.14)} \\
\delta(a,p) &= \frac{1}{2p} \int_0^\infty dt\ e^{-(a+p)t} \exp\Big(pt + \frac{2pt}{e^{-t}-1}\Big), \qquad \text{(A.15)} \\
e^{2p}\delta(a,p) &= \frac{1}{2p} \int_0^\infty dt\ e^{-(a+p)t} \exp(pw(t)) \qquad \text{(A.16)}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
w(t) &:= 2 + t + \frac{2t}{e^{-t}-1} \\
&= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} t^{2n} \quad (|t| < 2\pi) \qquad \text{(A.17)}
\end{aligned}
$$

である。さて、$Q_n(p)$ を、

$$
\frac{\exp(pw(t)) - 1}{2p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n Q_n(p)}{(2n)!} t^{2n} \quad (|t| < 2\pi) \qquad \text{(A.18)}
$$

で定義し、

$$
Q_n(p) = p^{n-1} P_n(p) \qquad \text{(A.19)}
$$

で $P_n(p)$ を定義する。すると、

$$
\begin{aligned}
e^{2p}\delta(a,p) = &\int_0^{2\pi} dt\ e^{-(a+p)t}\Big(\frac{1}{2p} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n Q_n(p)}{(2n)!}t^{2n}\Big) \\
&+\frac{1}{2p}\int_{2\pi}^{\infty} dt\ e^{-(a+p)t+pw(t)}
\end{aligned} \tag{A.20}
$$

を得る [1]。よって、

$$
\begin{aligned}
e^{2p}\delta(a,p) &\sim \int_0^{\infty} dt\ \frac{1}{2p}e^{-(a+p)t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n Q_n(p)}{(2n)!}\int_0^{\infty} dt\ t^{2n}e^{-(a+p)t} \\
&= \frac{1}{2p(p+a)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n Q_n(p)}{(a+p)^{2n+1}} \\
&= \frac{1}{2p(p+a)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n p^{n-1} P_n(p)}{(a+p)^{2n+1}}
\end{aligned} \tag{A.21}
$$

となる。

Wolfram を用いて、(A.18) から $P_n(p)$ を計算すると、

$$
P_8(p) = \frac{25025}{162} + \frac{70070}{81p} + \frac{55055}{27p^2} + \frac{23023}{9p^3} + \frac{161369}{90p^4} + \frac{10151}{15p^5} + \frac{3617}{30p^6} + \frac{3617}{510p^7}, \tag{A.22}
$$

$$
\begin{aligned}
P_9(p) = &\frac{425425}{486} + \frac{170170}{27p} + \frac{527527}{27p^2} + \frac{901901}{27p^3} + \frac{3034109}{90p^4} \\
&+\frac{901357}{45p^5} + \frac{4158829}{630p^6} + \frac{43867}{42p^7} + \frac{43867}{798p^8},
\end{aligned} \tag{A.23}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{10}(p) = &\frac{8083075}{1458} + \frac{8083075}{162p} + \frac{5311735}{27p^2} + \frac{35565530}{81p^3} + \frac{32454071}{54p^4} \\
&+\frac{230773487}{450p^5} + \frac{502625791}{1890p^6} + \frac{24571142}{315p^7} + \frac{1222277}{110p^8} + \frac{174611}{330p^9},
\end{aligned} \tag{A.24}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{11}(p) = &\frac{56581525}{1458} + \frac{622396775}{1458p} + \frac{337872535}{162p^2} + \frac{476578102}{81p^3} \\
&+\frac{1695829135}{162p^4} + \frac{16310575897}{1350p^5} + \frac{134811479}{15p^6} + \frac{20748684}{5p^7} \\
&+\frac{10986081}{10p^8} + \frac{854513}{6p^9} + \frac{854513}{138p^{10}},
\end{aligned} \tag{A.25}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{12}(p) = &\frac{1301375075}{4374} + \frac{2863025165}{729p} + \frac{33947298385}{1458p^2} + \frac{39346145839}{486p^3} \\
&+\frac{3264592331}{18p^4} + \frac{61061090552}{225p^5} + \frac{306733737442}{1125p^6} + \frac{13539078938}{75p^7} \\
&+\frac{3162639541}{42p^8} + \frac{1145930909}{63p^9} + \frac{1181820455}{546p^{10}} + \frac{236364091}{2730p^{11}}
\end{aligned} \tag{A.26}
$$

を得る。$n = 15$ までの和から、Wolfram を用いて、

$$
\delta(1000) \approx 1.0124940349070324007135623780962 \times 10^{-440} \tag{A.27}
$$

を得た。(3.35) と一致する。

References

[1] Bruce C. Berndt, “Ramanujan’s Notebooks: Part V”, Springer (2012).