5次のルンゲ・クッタ法の条件

中嶋 慧

January 22, 2024

Abstract

5 次のルンゲ・クッタ法の条件を求める。

Contents

1　4 次まで

　常微分方程式

$$\frac{dy^A}{dx} = f^A(x,y) \ \ (A = 1, \cdots, n) \tag{1.1}$$

を考える。$y^\alpha = (y^0, y^A) = (x, y^A)$ とすると、

$$\frac{dy^\alpha}{dx} = f^\alpha(y) \ \ (\alpha = 0, \cdots, n), \quad f^0 = 1 \tag{1.2}$$

となる。まず、

$$\frac{df^\alpha}{dx} = f^\alpha_{\ \beta} f^\beta \tag{1.3}$$

である。ここで、$f^\alpha_{\ \beta} = \partial_\beta f^\alpha$ である。またアインシュタインの縮退を使う。次に、

$$\frac{d^2 f^\alpha}{dx^2} = f^\alpha_{\ \beta\gamma} f^\beta f^\gamma + f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma \tag{1.4}$$

である。3 階微分は、

$$\begin{aligned}\frac{d^3 f^\alpha}{dx^3} &= f^\alpha_{\ \beta\gamma\delta} f^\beta f^\gamma f^\delta + 2 f^\alpha_{\ \beta\gamma} f^\beta_{\ \delta} f^\gamma f^\delta \\ &\quad + f^\alpha_{\ \beta\delta} f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma f^\delta + f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma\delta} f^\gamma f^\delta + f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma_{\ \delta} f^\delta \\ &= f^\alpha_{\ \beta\gamma\delta} f^\beta f^\gamma f^\delta + 3 f^\alpha_{\ \beta\gamma} f^\beta_{\ \delta} f^\gamma f^\delta + f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma\delta} f^\gamma f^\delta + f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma_{\ \delta} f^\delta\end{aligned} \tag{1.5}$$

である。
　いま、

$$k_i^\alpha = f^\alpha(y_0 + hd_i), \quad d_i^\alpha = \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j^\alpha, \tag{1.6}$$

$$\Delta y^\alpha = h \sum_{i=1}^s b_i k_i^\alpha \tag{1.7}$$

とおき、

$$\Delta y^\alpha = y^\alpha(x_0 + h) - y_0^\alpha + O(h^6) \tag{1.8}$$

となるように a_{ij}, b_i を決める。以下、

$$c_i := \sum_{j=1}^s a_{ij} \tag{1.9}$$

とする。また、

$$d_i^\alpha = D_i^\alpha + hE_i^\alpha + \frac{h^2}{2} G_i^\alpha + \frac{h^3}{6} H_i^\alpha + O(h^4), \tag{1.10}$$

$$k_i^\alpha = \sum_{n=0}^4 \frac{k_{i,n}^\alpha}{n!} h^n + O(h^5) \tag{1.11}$$

とする。このとき、

$$D_i^\alpha = c_i f^\alpha(y_0) \tag{1.12}$$

である。さて、

$$k_i^\alpha = f^\alpha(y_0) + hf^\alpha{}_\beta(y_0) d_i^\beta + \frac{h^2}{2} f^\alpha{}_{\beta\gamma}(y_0) d_i^\beta d_i^\gamma + \frac{h^3}{6} f^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}(y_0) d_i^\beta d_i^\gamma d_i^\delta + O(h^4) \tag{1.13}$$

であるから、まず、

$$k_{i,0}^\alpha = f^\alpha(y_0), \tag{1.14}$$

$$k_{i,1}^\alpha = c_i f^\alpha{}_\beta(y_0) f^\beta(y_0) \tag{1.15}$$

である。よって、

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1, \tag{1.16}$$

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2} \tag{1.17}$$

を得る。次に、

$$k_{i,2}^\alpha = c_i^2 f^\alpha{}_{\beta\gamma} f^\beta f^\gamma + 2f^\alpha{}_\beta E_i^\beta \tag{1.18}$$

である。ここで、

$$
\begin{aligned}
E_i^\beta &= \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_{j,1}^\beta \\
&= \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j f^\beta{}_\gamma f^\gamma
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

であるから、

$$
k_{i,2}^\alpha = c_i^2 f^\alpha{}_{\beta\gamma} f^\beta f^\gamma + \sum_{j=1}^{s} 2 a_{ij} c_j f^\alpha{}_\beta f^\beta{}_\gamma f^\gamma \tag{1.20}
$$

であり、

$$
\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^2 = \frac{1}{3}, \tag{1.21}
$$

$$
\sum_{i,j=1}^{s} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6} \tag{1.22}
$$

を得る。

$k_{i,3}$ は、

$$
k_{i,3}^\alpha = c_i^3 f^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} f^\beta f^\gamma f^\delta + 3 f^\alpha{}_\beta G_i^\beta + 6 f^\alpha{}_{\beta\gamma} D_i^\beta E_i^\gamma \tag{1.23}
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
G_i^\beta &= \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_{j,2}^\beta \\
&= \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^2 f^\beta{}_{\gamma\delta} f^\gamma f^\delta + \sum_{j,k=1}^{s} 2 a_{ij} a_{jk} c_k f^\beta{}_\gamma f^\gamma{}_\delta f^\delta
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
k_{i,3}^\alpha &= c_i^3 f^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} f^\beta f^\gamma f^\delta \\
&\quad + \sum_{j=1}^{s} 3 a_{ij} c_j^2 f^\alpha{}_\beta f^\beta{}_{\gamma\delta} f^\gamma f^\delta + \sum_{j,k=1}^{s} 6 a_{ij} a_{jk} c_k f^\alpha{}_\beta f^\beta{}_\gamma f^\gamma{}_\delta f^\delta \\
&\quad + \sum_{j=1}^{s} 6 c_i a_{ij} c_j f^\alpha{}_{\beta\gamma} f^\gamma{}_\delta f^\beta f^\delta
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

である。よって、

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^3 = \frac{1}{4}, \tag{1.26}$$

$$\sum_{i,j=1}^{s} b_i a_{ij} c_i c_j = \frac{1}{8}, \tag{1.27}$$

$$\sum_{i,j=1}^{s} b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12}, \tag{1.28}$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{s} b_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{24} \tag{1.29}$$

を得る。

2　5次

まず、

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 f^\alpha}{dx^4} &= f^\alpha_{\ \beta\gamma\delta\varepsilon} f^\beta f^\gamma f^\delta f^\varepsilon + 3 f^\alpha_{\ \beta\gamma\delta} f^\beta_{\ \varepsilon} f^\gamma f^\delta f^\varepsilon \\
&\quad + 3 f^\alpha_{\ \beta\gamma\varepsilon} f^\beta_{\ \delta} f^\gamma f^\delta f^\varepsilon + 3 f^\alpha_{\ \beta\gamma} f^\beta_{\ \delta\varepsilon} f^\gamma f^\delta f^\varepsilon + 3 f^\alpha_{\ \beta\gamma} f^\beta_{\ \delta} f^\gamma_{\ \varepsilon} f^\delta f^\varepsilon + 3 f^\alpha_{\ \beta\gamma} f^\beta_{\ \delta} f^\delta_{\ \varepsilon} f^\gamma f^\varepsilon \\
&\quad + f^\alpha_{\ \beta\varepsilon} f^\beta_{\ \gamma\delta} f^\gamma f^\delta f^\varepsilon + f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma\delta\varepsilon} f^\gamma f^\delta f^\varepsilon + 2 f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma\delta} f^\gamma_{\ \varepsilon} f^\delta f^\varepsilon \\
&\quad + f^\alpha_{\ \beta\varepsilon} f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma_{\ \delta} f^\delta f^\varepsilon + f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma\varepsilon} f^\gamma_{\ \delta} f^\delta f^\varepsilon + f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma_{\ \delta\varepsilon} f^\delta f^\varepsilon + f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma_{\ \delta} f^\delta_{\ \varepsilon} f^\varepsilon \\
&= f^\alpha_{\ \beta\gamma\delta\varepsilon} f^\beta f^\gamma f^\delta f^\varepsilon + 6 f^\alpha_{\ \beta\gamma\delta} f^\beta_{\ \varepsilon} f^\gamma f^\delta f^\varepsilon + 4 f^\alpha_{\ \beta\gamma} f^\beta_{\ \delta\varepsilon} f^\gamma f^\delta f^\varepsilon \\
&\quad + 3 f^\alpha_{\ \beta\gamma} f^\beta_{\ \delta} f^\gamma_{\ \varepsilon} f^\delta f^\varepsilon + 4 f^\alpha_{\ \beta\gamma} f^\beta_{\ \delta} f^\delta_{\ \varepsilon} f^\gamma f^\varepsilon + f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma\delta\varepsilon} f^\gamma f^\delta f^\varepsilon \\
&\quad + 3 f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma\delta} f^\gamma_{\ \varepsilon} f^\delta f^\varepsilon + f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma_{\ \delta\varepsilon} f^\delta f^\varepsilon + f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma_{\ \delta} f^\delta_{\ \varepsilon} f^\varepsilon
\end{aligned} \tag{2.1}$$

である。

$k_{i,4}$ は、

$$\begin{aligned}
k_{i,4} &= c_i^4 f^\alpha_{\ \beta\gamma\delta\varepsilon} f^\beta f^\gamma f^\delta f^\delta + 12 c_i^2 f^\alpha_{\ \beta\gamma\delta} E_i^\beta f^\gamma f^\delta + 12 f^\alpha_{\ \beta\gamma} E_i^\beta E_i^\gamma \\
&\quad + 12 c_i f^\alpha_{\ \beta\gamma} G_i^\beta f^\gamma + 4 f^\alpha_{\ \beta} H_i^\beta
\end{aligned} \tag{2.2}$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned}
H_i^\beta &= \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_{j,3}^\beta \\
&= \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \Bigg(c_j^3 f^\beta_{\ \gamma\delta\varepsilon} f^\gamma f^\delta f^\varepsilon + \sum_{k=1}^{s} 3 a_{jk} c_k^2 f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma_{\ \delta\varepsilon} f^\delta f^\varepsilon \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^{s} 6 a_{jk} a_{kl} c_l f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma_{\ \delta} f^\delta_{\ \varepsilon} f^\varepsilon + \sum_{k=1}^{s} 6 c_j a_{jk} c_k f^\beta_{\ \gamma\varepsilon} f^\gamma_{\ \delta} f^\delta f^\varepsilon \Bigg)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
k_{i,4} = {} & c_i^4 f^\alpha_{\beta\gamma\delta\varepsilon} f^\beta f^\gamma f^\delta f^\delta + 12 c_i^2 \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j f^\alpha_{\beta\gamma\delta} f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma f^\gamma f^\delta \\
& + 12 \Big(\sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j \Big)^2 f^\alpha_{\beta\gamma} f^\beta_{\ \delta} f^\gamma_{\ \varepsilon} f^\delta f^\varepsilon \\
& + \sum_{j=1}^{s} 12 a_{ij} c_i c_j^2 f^\alpha_{\beta\varepsilon} f^\beta_{\ \gamma\delta} f^\gamma f^\delta f^\varepsilon + \sum_{j,k=1}^{s} 24 c_i a_{ij} a_{jk} c_k f^\alpha_{\beta\varepsilon} f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma_{\ \delta} f^\delta f^\varepsilon \\
& + \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \Big(4 c_j^3 f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma\delta\varepsilon} f^\gamma f^\delta f^\varepsilon + \sum_{k=1}^{s} 12 a_{jk} c_k^2 f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma_{\ \delta\varepsilon} f^\delta f^\varepsilon \\
& + \sum_{k,l=1}^{s} 24 a_{jk} a_{kl} c_l f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma} f^\gamma_{\ \delta} f^\delta_{\ \varepsilon} f^\varepsilon + \sum_{k=1}^{s} 24 c_j a_{jk} c_k f^\alpha_{\ \beta} f^\beta_{\ \gamma\varepsilon} f^\gamma_{\ \delta} f^\delta f^\varepsilon \Big)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

である。よって、以下の条件を得る：

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^4 = \frac{1}{5}, \tag{2.5}$$

$$\sum_{i,j=1}^{s} b_i a_{ij} c_i^2 c_j = \frac{1}{10}, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{s} b_i \Big(\sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j \Big)^2 = \frac{1}{20}, \tag{2.7}$$

$$\sum_{i,j=1}^{s} b_i a_{ij} c_i c_j^2 = \frac{1}{15}, \tag{2.8}$$

$$\sum_{i,j=1}^{s} b_i a_{ij} c_j^3 = \frac{1}{20}, \tag{2.9}$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{s} b_i c_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{30}, \tag{2.10}$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{s} b_i a_{ij} a_{jk} c_k^2 = \frac{1}{60}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{s} b_i a_{ij} a_{jk} c_j c_k = \frac{1}{40}, \tag{2.12}$$

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{s} b_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_l = \frac{1}{120}. \tag{2.13}$$

なお、$\frac{d^5 f^\alpha}{dx^5}$ からは 20 タイプの項が現れる [1, 2]。

References

[1] J. C. Butcher, “Coefficients for the study of Runge-Kutta integration processes”, Journal of the Australian Mathematical Society, **3**, 185 (1963).

[2] J. R. Dormand and P. J. Prince, “A family of embedded Runge-Kutta formulae”, Journal of computational and applied mathematics, **6**, 19 (1980).