量子ポアソンノイズ

中嶋 慧

2026 年 11 月 10 日

概 要

§1, §2 では K. Funo and A. Ishizaki, Phys. Rev. Lett. **132**, 170402 (2024) の解読をする。§3 ではラプラス変換による解法を議論する。

1 射影演算子法

量子マスター方程式

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}(t)\rho(t), \tag{1.1}$$

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_1, \tag{1.2}$$

$$\mathcal{L}_S\bullet = -i[H_S, \bullet] - iJ(t)A\bullet, \tag{1.3}$$

$$\mathcal{L}_1\bullet = -i[H_1, \bullet], \tag{1.4}$$

$$\mathcal{L}_B\bullet = -i[H_B, \bullet] + \mathcal{D}(\bullet) \tag{1.5}$$

を考える。$\mathcal{D}$ は散逸子である。A は S 系の演算子である。$\mathcal{L}_S$ はもっと一般的な形でもよい。しばらく $\mathcal{L}_S$ の具体的な形を使わない。いま、

$$\frac{d}{dt}\hat{V}(t) = \mathcal{L}(t)\hat{V}(t)\,, \quad \hat{V}(0) = 1 \tag{1.6}$$

とすると、

$$\rho(t) = \hat{V}(t)\rho(0) \tag{1.7}$$

である。

$\mathcal{P}$ を射影演算子

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \tag{1.8}$$

とする。$\mathcal{Q}$ を、

$$\mathcal{Q} := 1 - \mathcal{P} \tag{1.9}$$

で定義すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^2 &= (1-\mathcal{P})^2 = 1 - 2\mathcal{P} + \mathcal{P}^2 = 1 - \mathcal{P} \\ &= \mathcal{Q}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\mathcal{Q}\mathcal{P} = \mathcal{P} - \mathcal{P}^2 = 0, \tag{1.11}$$

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{P} - \mathcal{P}^2 = 0 \tag{1.12}$$

となる。いま、

$$\hat{x}(t) := \mathcal{Q}\hat{V}(t), \quad \hat{y}(t) := \mathcal{P}\hat{V}(t) \tag{1.13}$$

と置くと、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{V}(t) &= \mathcal{L}(t)[\mathcal{Q}+\mathcal{P}]\hat{V}(t) \\ &= \mathcal{L}(t)\hat{x}(t) + \mathcal{L}(t)\hat{y}(t)\end{aligned} \tag{1.14}$$

または、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{V}(t) &= \mathcal{L}(t)[\mathcal{Q}^2+\mathcal{P}^2]\hat{V}(t) \\ &= \mathcal{L}(t)\mathcal{Q}\hat{x}(t) + \mathcal{L}(t)\mathcal{P}\hat{y}(t)\end{aligned} \tag{1.15}$$

を得る。また、

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \mathcal{L}_{QQ}(t)\hat{x}(t) + \mathcal{L}_{QP}(t)\hat{y}(t), \tag{1.16}$$

$$\mathcal{L}_{QQ}(t) := \mathcal{Q}\mathcal{L}\mathcal{Q}, \quad \mathcal{L}_{QP} := \mathcal{Q}\mathcal{L}(t)\mathcal{P} \tag{1.17}$$

である。ところで、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\hat{X}(t)\hat{x}(t)] &= \hat{X}(t)[\mathcal{L}_{QQ}(t)\hat{x}(t) + \mathcal{L}_{QP}(t)\hat{y}(t)] + \frac{d\hat{X}(t)}{dt}\hat{x}(t) \\ &= \hat{X}(t)[\mathcal{L}_{QQ}(t) + \hat{X}^{-1}(t)\frac{d\hat{X}(t)}{dt}]\hat{x}(t) + \hat{X}(t)\mathcal{L}_{QP}(t)\hat{y}(t)\end{aligned} \tag{1.18}$$

である。いま $\hat{X}_{QQ}$ を、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QQ}(t) + \hat{X}_{QQ}^{-1}(t)\frac{d\hat{X}_{QQ}(t)}{dt} &= 0, \\ \frac{d\hat{X}_{QQ}(t)}{dt} &= -\hat{X}_{QQ}(t)\mathcal{L}_{QQ}(t)\end{aligned} \tag{1.19}$$

および、

$$\hat{X}_{QQ}(0) = 1 \tag{1.20}$$

で定義する。このとき、

$$\frac{d}{dt}[\hat{X}_{QQ}(t)\hat{x}(t)] = \hat{X}_{QQ}(t)\mathcal{L}_{QP}(t)\hat{y}(t) \tag{1.21}$$

である。よって、

$$\hat{X}_{QQ}(t)\hat{x}(t) - \hat{X}_{QQ}(0)\hat{x}(0) = \int_0^t ds\ \hat{X}_{QQ}(s)\mathcal{L}_{QP}(s)\hat{y}(s) \tag{1.22}$$

であり、これより、

$$\hat{x}(t) = \hat{X}_{QQ}^{-1}(t)\mathcal{Q} + \int_0^t ds\ \hat{X}_{QQ}^{-1}(t)\hat{X}_{QQ}(s)\mathcal{L}_{QP}(s)\hat{y}(s) \tag{1.23}$$

を得る。いま、

$$\hat{U}_{QQ}(t) := \hat{X}_{QQ}^{-1}(t), \tag{1.24}$$
$$\hat{U}_{QQ}(s,t) := \hat{U}_{QQ}(s)\hat{U}_{QQ}^{-1}(t) \tag{1.25}$$

とすると、

$$\hat{U}_{QQ}(t,t) = 1, \tag{1.26}$$
$$\hat{U}_{QQ}(t,u)\hat{U}_{QQ}(u,s) = \hat{U}_{QQ}(t,s), \tag{1.27}$$
$$\hat{U}_{QQ}(s,t) = \hat{U}_{QQ}^{-1}(t,s) \tag{1.28}$$

であり、

$$\begin{aligned}\hat{X}_{QQ}^{-1}(t)\hat{X}_{QQ}(s) &= \hat{U}_{QQ}(t,0)\hat{U}_{QQ}(0,s) \\ &= \hat{U}_{QQ}(t,s)\end{aligned} \tag{1.29}$$

なので、

$$\hat{x}(t) = \hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q} + \int_0^t ds\, \hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{L}_{QP}(s)\hat{y}(s) \tag{1.30}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{V}(t) = \mathcal{L}(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q} + \int_0^t ds\, \mathcal{L}(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{L}_{QP}(s)\mathcal{P}\hat{V}(s) \\ + \mathcal{L}(t)\mathcal{P}\hat{V}(t)\end{aligned} \tag{1.31}$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}\rho(0) + \int_0^t ds\, \mathcal{L}(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{L}_{QP}(s)\mathcal{P}\rho(s) \\ + \mathcal{L}(t)\mathcal{P}\rho(t)\end{aligned} \tag{1.32}$$

が従う。さらに $\mathcal{P}$ を作用させて、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho(t) = \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}\rho(0) + \int_0^t ds\, \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{L}_{QP}(s)\mathcal{P}\rho(s) \\ + \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{P}\rho(t)\end{aligned} \tag{1.33}$$

を得る。

$\hat{U}_{QQ}(t,s)$ の運動方程式を求める。まず、

$$\begin{aligned}\hat{U}_{QQ}(t,s) &= \hat{X}_{QQ}^{-1}(t)\hat{X}_{QQ}(s), \\ \frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_{QQ}(t,s) &= \big[\frac{d}{dt}\hat{X}_{QQ}^{-1}(t)\big]\hat{X}_{QQ}(s)\end{aligned} \tag{1.34}$$

である。ここで、

$$0 = [\frac{d}{dt}\hat{X}_{QQ}(t)]\hat{X}_{QQ}^{-1}(t) + \hat{X}_{QQ}(t)\frac{d}{dt}\hat{X}_{QQ}^{-1}(t), \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{X}_{QQ}^{-1}(t) &= -\hat{X}_{QQ}^{-1}(t)\Big[\frac{d}{dt}\hat{X}_{QQ}(t)\Big]\hat{X}_{QQ}^{-1}(t) \\ &= \hat{X}_{QQ}^{-1}(t)\hat{X}_{QQ}(t)\mathcal{L}_{QQ}(t)\hat{X}_{QQ}^{-1}(t) \\ &= \mathcal{L}_{QQ}(t)\hat{X}_{QQ}^{-1}(t)\end{aligned} \tag{1.36}$$

なので、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_{QQ}(t,s) &= \mathcal{L}_{QQ}(t)\hat{X}_{QQ}^{-1}(t)\hat{X}_{QQ}(s)\\ &= \mathcal{L}_{QQ}(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\end{aligned} \tag{1.37}$$

を得る。

以下では、

$$\mathcal{P}\bullet = \mathrm{Tr}_B(\bullet)\otimes\rho_B, \tag{1.38}$$

$$\rho(0) = \rho_S(0)\otimes\rho_B \tag{1.39}$$

を仮定する。ρ_B は $\mathcal{L}_B\rho_B = 0$ で定まる定常状態である。このとき、

$$\mathcal{Q}\rho(0) = 0, \tag{1.40}$$

$$\mathcal{P}\rho(s) = \rho_S(s)\otimes\rho_B \tag{1.41}$$

である。ここで、

$$\rho_S(t) := \mathrm{Tr}_B(\rho(t)) \tag{1.42}$$

である。

いま、

$$H_1 = \sum_k S^k B^k \tag{1.43}$$

を仮定する。S^k は S 系の演算子で、B^k は B 系の演算子である。このとき、

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\mathcal{L}_1\mathcal{P}\rho(t) &= \mathrm{Tr}_B\Big(-i[H_1,\rho_S(t)\otimes\rho_B]\Big)\otimes\rho_B\\ &= \sum_k\Big(-iS^k\rho_S(t) + i\rho_S(t)S^k\Big)\mathrm{Tr}_B[B^k\rho_B]\otimes\rho_B\end{aligned} \tag{1.44}$$

である。ここで、

$$\mathrm{Tr}_B[B^k\rho_B] = 0 \tag{1.45}$$

を仮定すると、

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_1(t)\mathcal{P}\rho(t) = 0 \tag{1.46}$$

となる。また、

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_B\mathcal{P}\rho(t) = 0 \tag{1.47}$$

である。

よって、(1.33) は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_S(t)\otimes\rho_B &= \mathcal{L}_S\rho_S(t)\otimes\rho_B + \int_0^t ds\,\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{L}_{QP}(s)\rho_S(s)\otimes\rho_B\\ &= \mathcal{L}_S\rho_S(t)\otimes\rho_B + \int_0^t ds\,\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}(s)\mathcal{P}\rho_S(s)\otimes\rho_B\\ &= \mathcal{L}_S\rho_S(t)\otimes\rho_B + \int_0^t ds\,\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}(s)\rho_S(s)\otimes\rho_B\end{aligned} \tag{1.48}$$

となる。ここで、

$$\mathcal{Q}\mathcal{L}_S(s)\rho_S(s)\otimes\rho_B = 0, \tag{1.49}$$

$$\mathcal{Q}\mathcal{L}_B\rho_S(s)\otimes\rho_B = 0 \tag{1.50}$$

なので、

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t)\otimes\rho_B = \mathcal{L}_S\rho_S(t)\otimes\rho_B + \int_0^t ds\,\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\otimes\rho_B \tag{1.51}$$

となり、これは、

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}_S\rho_S(t) + \int_0^t ds\ \mathrm{Tr}_B\left(\mathcal{L}(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\otimes\rho_B\right) \tag{1.52}$$

を意味する。ところで、

$$\mathrm{Tr}_B(\mathcal{L}_B\bullet) = 0 \tag{1.53}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_B\left(\mathcal{L}_S(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\otimes\rho_B\right) &= \mathcal{L}_S(t)\,\mathrm{Tr}_B\left(\hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\otimes\rho_B\right)\\ &=: \mathcal{L}_S(t)\sigma_S(t,s)\end{aligned} \tag{1.54}$$

であり、

$$\sigma_S(t,s)\otimes\rho_B = \mathcal{P}\hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\otimes\rho_B \tag{1.55}$$

である。よって、

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_S(t,s)\otimes\rho_B = \mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{L}\mathcal{Q}\hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\otimes\rho_B = 0 \tag{1.56}$$

となり、

$$\sigma_S(t,s) = \sigma_S(s,s) = \mathrm{Tr}_B\left(\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\otimes\rho_B\right) = 0 \tag{1.57}$$

となる。よって、

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}_S\rho_S(t) + \int_0^t ds\ \mathrm{Tr}_B\left(\mathcal{L}_1(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\otimes\rho_B\right) \tag{1.58}$$

を得る。

いま、

$$\hat{U}_{QQ}(t,s) = \hat{W}(t,s)\hat{U}(t,s) \tag{1.59}$$

と置く。ここで、

$$\hat{W}(t,s) := \hat{W}(t)\hat{W}(s)^{-1}, \tag{1.60}$$

$$\frac{d\hat{W}(t)}{dt} = [\mathcal{L}_S(t)+\mathcal{L}_B]\hat{W}(t)\,,\quad \hat{W}(0) = 1 \tag{1.61}$$

である。(1.59) を t で微分して、

$$\mathcal{L}_{QQ}(t)\hat{U}_{QQ}(t,s) = (\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_B)\hat{U}_{QQ}(t,s) + \hat{W}(t,s)\frac{\partial \hat{U}(t,s)}{\partial t} \tag{1.62}$$

を得る。ここで、

$$(\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_B)\hat{U}_{QQ}(t,s) = \mathcal{Q}(\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_B)\mathcal{Q}\hat{U}_{QQ}(t,s) + \mathcal{P}\mathcal{L}_S\mathcal{P}\hat{U}_{QQ}(t,s) \tag{1.63}$$

である。ただし、

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_B = 0\,, \quad \mathcal{L}_B\mathcal{P} = 0, \tag{1.64}$$

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_S\mathcal{Q} = 0\,, \quad \mathcal{Q}\mathcal{L}_S\mathcal{P} = 0 \tag{1.65}$$

を用いた。よって、

$$\frac{\partial \hat{U}(t,s)}{\partial t} = \hat{W}(t,s)^{-1}[\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(t)\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_S(t)\mathcal{P}]\hat{U}_{QQ}(t,s) \tag{1.66}$$

を得る。従って、

$$\hat{U}(t,s) = 1 + \int_s^t dv\ \hat{W}(v,s)^{-1}\mathcal{I}(v)\hat{U}_{QQ}(v,s), \tag{1.67}$$

$$\mathcal{I}(v) := \mathcal{Q}\mathcal{L}_1(v)\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_S(v)\mathcal{P} \tag{1.68}$$

および、

$$\hat{U}_{QQ}(t,s) = \hat{W}(t,s) + \int_s^t dv\ \hat{W}(t,v)\mathcal{I}(v)\hat{U}_{QQ}(v,s) \tag{1.69}$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned}\hat{U}_{QQ}(t,s) &= \hat{W}(t,s) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\int_s^t dv_1 \int_s^{v_1} dv_2 \cdots \int_s^{v_{n-1}} dv_n\ \hat{W}(t,v_1)\mathcal{I}(v_1)\hat{W}(v_1,v_2)\mathcal{I}(v_2)\cdots\mathcal{I}(v_n)\hat{W}(v_n,s)\end{aligned} \tag{1.70}$$

が従う。

これより、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_S(t) &= \mathcal{L}_S\rho_S(t) + \int_0^t ds\ \mathrm{Tr}_B\left(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t ds \int_s^t dv_1 \int_s^{v_1} dv_2 \cdots \int_s^{v_{n-1}} dv_n \\ &\qquad \mathrm{Tr}_B\left(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,v_1)\mathcal{I}(v_1)\hat{W}(v_1,v_2)\mathcal{I}(v_2)\cdots\mathcal{I}(v_n)\hat{W}(v_n,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\right)\end{aligned} \tag{1.71}$$

を得る。いま、

$$\mathcal{I}_1 := \mathcal{Q}\mathcal{L}_1\mathcal{Q}\,, \quad \mathcal{I}_2 := -\mathcal{P}\mathcal{L}_S\mathcal{P} \tag{1.72}$$

と置くと、

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}_S\rho_S(t) + \int_0^t ds\ \mathrm{Tr}_B\left(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=1,2}\int_0^t ds\int_s^t dv_1\int_s^{v_1} dv_2\cdots\int_s^{v_{n-1}} dv_n\ \kappa^{\boldsymbol{\alpha}}_{n+2}(t,v_1,\cdots,v_n,s) \tag{1.73}$$

となる。ここで、

$$\kappa^{\boldsymbol{\alpha}}_{n+2}(t,v_1,\cdots,v_n,s) := \mathrm{Tr}_B\left(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,v_1)\mathcal{I}_{\alpha_1}(v_1)\hat{W}(v_1,v_2)\mathcal{I}_{\alpha_2}(v_2)\cdots\mathcal{I}_{\alpha_n}(v_n)\hat{W}(v_n,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\right) \tag{1.74}$$

である。ところで、

$$\text{全ての } \alpha_i \text{ が } 1 \text{ でない場合 } (2 \text{ が } 1 \text{ つ以上含まれる場合}) \text{ は} \kappa^{\boldsymbol{\alpha}}_{n+2}(t,v_1,\cdots,v_n,s) = 0 \tag{1.75}$$

である (付録 B)。いま、

$$\mathcal{S}^k_+\bullet_S := S^k\bullet_S\,,\quad \mathcal{S}^k_-\bullet_S := \bullet_S S^k, \tag{1.76}$$

$$\mathcal{B}^k_+\bullet_B := B^k\bullet_B\,,\quad \mathcal{B}^k_-\bullet_B := \bullet_B B^k \tag{1.77}$$

とすると、

$$\mathcal{L}_1\bullet = \sum_{l=\pm}\sum_k (-i)^l\mathcal{S}^k_l\mathcal{B}^k_l \tag{1.78}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_B\left(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,v_1)\mathcal{I}_1(v_1)\hat{W}(v_1,v_2)\mathcal{I}_1(v_2)\cdots\mathcal{I}_1(v_n)\hat{W}(v_n,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\right)\\ &= \sum_{l_0,\cdots,l_{n+1}=\pm}\sum_{k_0,,\cdots,,k_{n+1}}(-i)^{l_0+\cdots+l_{n+1}}\\ &\times\mathcal{S}^{k_0}_{l_0}\hat{W}_S(t,v_1)\mathcal{S}^{k_1}_{l_1}\hat{W}_S(v_1,v_2)\cdots\hat{W}_S(v_{n-1},v_n)\mathcal{S}^{k_n}_{l_n}\hat{W}_S(v_n,s)\mathcal{S}^{k_{n+1}}_{l_{n+1}}\rho_S(s)\\ &\times\mathrm{Tr}_B[\mathcal{B}^{k_0}_{l_0}e^{\mathcal{L}_B(t-v_1)}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_B(v_1-v_2)}\mathcal{Q}\cdots\mathcal{Q}\mathcal{B}^{k_n}_{l_n}e^{\mathcal{L}_B(v_n-s)}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{k_{n+1}}_{l_{n+1}}\rho_B]\end{aligned} \tag{1.79}$$

となる。いま、

$$\chi^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}_{n+2}(t_0,t_1,\cdots,t_{n+1}) := \mathrm{Tr}_B[\mathcal{B}^{k_0}_{l_0}e^{\mathcal{L}_B(t_0-t_1)}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_B(t_1-t_2)}\mathcal{Q}\cdots\mathcal{Q}\mathcal{B}^{k_n}_{l_n}e^{\mathcal{L}_B(t_n-t_{n+1})}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{k_{n+1}}_{l_{n+1}}\rho_B] \tag{1.80}$$

と置くと、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_S(t) &= \mathcal{L}_S\rho_S + \sum_{l_0,l_1}\sum_{k_0,k_1}\int_0^t ds\ (-i)^{l_0+l_1}\chi^{k_0,k_1,l_0,l_1}_2(t,s)\mathcal{S}^{k_0}_{l_0}\hat{W}_S(t,s)\mathcal{S}^{k_1}_{l_1}\rho_S(s)\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l_0,\cdots,l_{n+1}=\pm}\sum_{k_0,\cdots,k_{n+1}}\int_0^t ds\int_s^t dv_1\int_s^{v_1} dv_2\cdots\int_s^{v_{n-1}} dv_n\ (-i)^{l_1+\cdots+l_{n+1}}\\ &\times\chi^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}_{n+2}(t,v_1\cdots,v_n,s)\mathcal{S}^{k_0}_{l_0}\hat{W}_S(t,v_1)\mathcal{S}^{k_1}_{l_1}\hat{W}_S(v_1,v_2)\cdots\hat{W}_S(v_{n-1},v_n)\mathcal{S}^{k_n}_{l_n}\hat{W}_S(v_n,s)\mathcal{S}^{k_{n+1}}_{l_{n+1}}\rho_S(s)\end{aligned} \tag{1.81}$$

を得る。変数変換

$$u_1 := t - s, \tag{1.82}$$
$$u_2 := v_1 - s, \tag{1.83}$$
$$u_{n+1} := v_n - s \tag{1.84}$$

とすると、

$$s = t - u_1, \tag{1.85}$$
$$\begin{aligned} v_1 &= s + u_2 \\ &= t - u_1 + u_2, \end{aligned} \tag{1.86}$$
$$v_2 = t - u_1 + u_3 \tag{1.87}$$

であり、

$$t - v_1 = u_1 - u_2, \tag{1.88}$$
$$v_1 - v_2 = u_2 - u_3, \tag{1.89}$$
$$v_n - s = u_{n+1} \tag{1.90}$$

なので、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) &= \mathcal{L}_S\rho_S + \sum_{l_0,l_1}\sum_{k_0,k_1}\int_0^t du_1\ (-i)^{l_0+l_1}\chi_2^{k_0,k_1,l_0,l_1}(u_1)\mathcal{S}_{l_0}^{k_0}\hat{W}_S(t,t-u_1)\mathcal{S}_{l_1}^{k_1}\rho_S(t-u_1) \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l_0,\cdots,,l_{n+1}=\pm}\sum_{k_0,\cdots,k_{n+1}}\int_0^t du_1\int_0^{u_1}du_2\cdots\int_0^{u_n}du_{n+1}\ (-i)^{l_0+\cdots+l_{n+1}} \\ &\times\chi_{n+2}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(u_1,\cdots,u_{n+1},0)\mathcal{S}_{l_0}^{k_0}\hat{W}_S(t,t-u_1+u_2)\mathcal{S}_{l_1}^{k_1}\hat{W}_S(t-u_1+u_2,t-u_1+u_3)\cdots \\ &\times\mathcal{S}_{l_n}^{k_n}\hat{W}_S(t-u_1+u_{n+1},t-u_1)\mathcal{S}_{l_{n+1}}^{k_{n+1}}\rho_S(t-u_1) \end{aligned} \tag{1.91}$$

である。

2　ポアソンノイズ

2.1　設定

以下では、

$$H_B = \sum_{i=1}^{2}\frac{\omega_i}{2}\sigma_i^z, \tag{2.1}$$
$$\mathcal{D}(\rho) = \sum_{i=1}^{2}\Big(\Gamma_i^+\mathcal{D}[\sigma_i^+](\rho) + \Gamma_i^-\mathcal{D}[\sigma_i^-](\rho)\Big), \tag{2.2}$$
$$H_1 = \lambda(L\sigma_1^+\sigma_2^- + L^\dagger\sigma_1^-\sigma_2^+) \tag{2.3}$$

を考える。ただし、$\omega_i > 0$ であり、

$$\mathcal{D}[L](\bullet) := L\bullet L^\dagger - \frac{1}{2}\{L^\dagger L, \bullet\} \tag{2.4}$$

である。局所詳細つり合い

$$\frac{\Gamma_i^-}{\Gamma_i^+} = e^{\beta\omega_i} \tag{2.5}$$

を仮定する。

2.2 ポアソンノイズ極限

極限

$$\Gamma_1^- = \Gamma_2^- =: \Gamma \to \infty, \quad \lambda \to \infty, \quad \mu := \lambda/\Gamma = \text{fixed} \tag{2.6}$$

を考える。このとき、

$$\frac{d\rho_S}{dt} = \mathcal{L}_S\rho_S + \Gamma_2^+ s(\mu)[L]\rho_S + \Gamma_1^+ s(\mu)[L^\dagger]\rho_S \tag{2.7}$$

となる (付録 C)。ただし、

$$s(\mu)[L]\bullet := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mu^{2n}\sum_{j=0}^{2n}\frac{(2n)!}{(2n-j)!j!}(-1)^j(L)_j \bullet \{L^\dagger\}_{2n-j} \tag{2.8}$$

であり、$(L)_n$ は、

$$(L)_0 = 1, \tag{2.9}$$
$$(L)_1 = L, \tag{2.10}$$
$$(L)_2 = L^\dagger L, \tag{2.11}$$
$$(L)_3 = LL^\dagger L, \tag{2.12}$$
$$(L)_4 = L^\dagger LL^\dagger L \tag{2.13}$$

のように、$\{L\}_n$ は、

$$\{L\}_0 = 1, \tag{2.14}$$
$$\{L\}_1 = L, \tag{2.15}$$
$$\{L\}_2 = LL^\dagger, \tag{2.16}$$
$$\{L\}_3 = LL^\dagger L, \tag{2.17}$$
$$\{L\}_4 = LL^\dagger LL^\dagger \tag{2.18}$$

のように定義される。$s(\mu)[L]$ は発散するが、ボレル和は存在する。この級数のボレル変換は、

$$\tilde{s}(\mu,\alpha)[L]\bullet := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\alpha\mu)^{2n}}{(2n)!}\sum_{j=0}^{2n}\frac{(2n)!}{(2n-j)!j!}(-1)^j(L)_j \bullet \{L^\dagger\}_{2n-j} =: \mathcal{S}(\alpha\mu)[L]\bullet \tag{2.19}$$

であり、ボレル和 $S(\mu)[L]\bullet$ は、

$$S(\mu)[L] := \int_0^\infty d\alpha\ e^{-\alpha}\tilde{s}(\mu,\alpha)[L] \tag{2.20}$$

である。よって、

$$S(\mu)[L] = \int_0^\infty d\alpha\ e^{-\alpha}\mathcal{S}(\alpha\mu)[L]$$
$$= \int_0^\infty da\ \frac{e^{-a/\mu}}{\mu}\mathcal{S}(a)[L] \tag{2.21}$$

である。さて、

$$\mathcal{S}(a)[L]\bullet = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ia)^{2n}}{(2n)!}\sum_{j=0}^{2n}\frac{(2n)!}{(2n-j)!j!}(-1)^j(L)_j \bullet \{L^\dagger\}_{2n-j} \tag{2.22}$$

において、

$$\{L^\dagger\}_i = \{(L)_i\}^\dagger \tag{2.23}$$

なので、

$$\mathcal{S}(a)[L]\bullet = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ia)^{2n}}{(2n)!}\sum_{j=0}^{2n}\frac{(2n)!}{(2n-j)!j!}(-1)^j(L)_j \bullet \{(L)_{2n-j}\}^\dagger \tag{2.24}$$

となる。これより、

$$\mathrm{Tr}\left(\mathcal{S}(a)[L]\bullet\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ia)^{2n}}{(2n)!}\sum_{j=0}^{2n}\frac{(2n)!}{(2n-j)!j!}(-1)^j\,\mathrm{Tr}\left(\{(L)_{2n-j}\}^\dagger(L)_j\bullet\right)$$
$$=: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ia)^{2n}}{(2n)!}\kappa_n \tag{2.25}$$

である。$n=1$ とすると、

$$\kappa_0 = \mathrm{Tr}\left(\{(L)_2\}^\dagger(L)_0\bullet\right) - 2\,\mathrm{Tr}\left(\{(L)_1\}^\dagger(L)_1\bullet\right) + \mathrm{Tr}\left(\{(L)_0\}^\dagger(L)_2\bullet\right)$$
$$= \mathrm{Tr}\left(L^\dagger L\bullet\right) - 2\,\mathrm{Tr}\left(L^\dagger L\bullet\right) + \mathrm{Tr}\left(L^\dagger L\bullet\right)$$
$$= 0 \tag{2.26}$$

である。一般に、$\mathrm{Tr}\left(\{(L)_{2n-j}\}^\dagger(L)_j\bullet\right) = \mathrm{Tr}\left((L^\dagger L)^n\bullet\right) =: k_n$ は j に依らないので、

$$\kappa_n = k_n\sum_{j=0}^{2n}\frac{(2n)!}{(2n-j)!j!}(-1)^j$$
$$= k_n(1-1)^{2n} = 0 \tag{2.27}$$

となる。

いま、

$$L(a) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ia)^{2n+1}}{(2n+1)!}L(L^\dagger L)^n, \tag{2.28}$$

$$N(a) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ia)^{2n}}{(2n)!}(LL^\dagger)^n \tag{2.29}$$

とする。以下では、

$$\mathcal{S}(a)[L]\bullet = \mathcal{D}[L(a)](\bullet) + \mathcal{D}[N(a)](\bullet) \tag{2.30}$$

を示す。いま、

$$f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ia)^k}{k!}[f]_k \tag{2.31}$$

と書く。

$$[f(a) \bullet g(a)]_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}[f]_k \bullet [g]_{m-k} \tag{2.32}$$

である。よって、

$$[L(a) \bullet L(a)^\dagger]_{2n+1} = 0, \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
[L(a) \bullet L(a)^\dagger]_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}[L(a)]_k \bullet [L(a)^\dagger]_{2n-k} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2n-2k-1)!}[L(a)]_{2k+1} \bullet ([L(a)]_{2(n-k-1)+1})^\dagger \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2n-2k-1)!} L(L^\dagger L)^k \bullet (L^\dagger L)^{n-k-1} L^\dagger \quad (n \geq 1)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

となる。同様に、

$$[N(a) \bullet N(a)^\dagger]_{2n+1} = 0, \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
[N(a) \bullet N(a)^\dagger]_{2n} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}[N(a)]_{2k} \bullet ([N(a)]_{2(n-k)})^\dagger \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}(LL^\dagger)^k \bullet (LL^\dagger)^{n-k} \quad (n \geq 1)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

となる。よって、$n \geq 1$ に対して、

$$[L(a) \bullet L(a)^\dagger]_{2n} + [N(a) \bullet N(a)^\dagger]_{2n} = \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{(2n)!}{(2n-j)!j!}(-1)^j (L)_j \bullet \{(L)_{2n-j}\}^\dagger \tag{2.37}$$

である。また、同様に、

$$[L(a)^\dagger L(a)]_{2n+1} = 0, \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
[L(a)^\dagger L(a)]_{2n} &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2n-2k-1)!}([L(a)]_{2(n-k-1)+1})^\dagger [L(a)]_{2k+1} \\
&= -(L^\dagger L)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2n-2k-1)!}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

および、

$$[N(a)^\dagger N(a)]_{2n+1} = 0, \tag{2.40}$$

$$[N(a)^\dagger N(a)]_{2n} = (L^\dagger L)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!} \tag{2.41}$$

なので、

$$\begin{aligned}[L(a)^\dagger L(a)]_{2n} + [N(a)^\dagger N(a)]_{2n} &= (L^\dagger L)^n \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{(2n)!}{(2n-j)!j!}(-1)^j \\ &= -2(L^\dagger L)^n \end{aligned} \tag{2.42}$$

すなわち、

$$-\frac{1}{2}([L(a)^\dagger L(a)]_{2n} + [N(a)^\dagger N(a)]_{2n}) = (L^\dagger L)^n \tag{2.43}$$

である。よって、

$$\mathcal{S}(a)[L]\bullet = \mathcal{D}[L(a)](\bullet) + \mathcal{D}[N(a)](\bullet) \tag{2.44}$$

となる。同様に、

$$M(a) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ia)^{2n}}{(2n)!}(L^\dagger L)^n \tag{2.45}$$

とすると、

$$\mathcal{S}(a)[L^\dagger]\bullet = \mathcal{D}[L(a)^\dagger](\bullet) + \mathcal{D}[M(a)](\bullet) \tag{2.46}$$

となる。従って、

$$\frac{d\rho_S}{dt} = \mathcal{L}_S\rho_S + \mathcal{D}^{\text{Poisson}}\rho_S, \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\text{Poisson}}\bullet := \int_0^\infty da\ \frac{e^{-a/\mu}}{\mu}\Big(&\Gamma_2^+\big\{\mathcal{D}[L(a)](\bullet) + \mathcal{D}[N(a)](\bullet)\big\} \\ &+ \Gamma_1^+\big\{\mathcal{D}[L(a)^\dagger](\bullet) + \mathcal{D}[M(a)](\bullet)\big\}\Big)\end{aligned} \tag{2.48}$$

を得る。μ^2 が小さいときは、

$$\mathcal{D}^{\text{Poisson}}\bullet = 2\mu^2\Gamma_2^+\mathcal{D}[L](\bullet) + 2\mu^2\Gamma_1^+\mathcal{D}[L^\dagger](\bullet) + O(\mu^4) \tag{2.49}$$

となる。

なお、

$$L(\lambda\tau) = \langle e_1, g_2|e^{-iH_1\tau}|g_1, e_2\rangle, \tag{2.50}$$

$$N(\lambda\tau) = \langle e_1, g_2|e^{-iH_1\tau}|e_1, g_2\rangle - 1, \tag{2.51}$$

$$M(\lambda\tau) = \langle g_1, e_2|e^{-iH_1\tau}|g_1, e_2\rangle - 1 \tag{2.52}$$

である。

3　ラプラス変換

(1.91) は、

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}_S\rho_S + \sum_{l_0,l_1}\sum_{k_0,k_1}\int_0^t du_1\ (-i)^{l_0+l_1}\chi_2^{k_0,k_1,l_0,l_1}(u_1)\mathcal{S}_{l_0}^{k_0}\hat{W}_S(t,t-u_1)\mathcal{S}_{l_1}^{k_1}\rho_S(t-u_1)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l_0,\cdots,,l_{n+1}=\pm}\sum_{k_0,\cdots,k_{n+1}}\int_0^t du_1\int_0^{u_1}du_2\cdots\int_0^{u_n}du_{n+1}\ (-i)^{l_0+\cdots+l_{n+1}}$$
$$\times\chi_{n+2}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(u_1,\cdots,u_{n+1},0)\mathcal{S}_{l_0}^{k_0}\hat{W}_S(t,t-u_1+u_2)\mathcal{S}_{l_1}^{k_1}\hat{W}_S(t-u_1+u_2,t-u_1+u_3)\cdots$$
$$\times\mathcal{S}_{l_n}^{k_n}\hat{W}_S(t-u_1+u_{n+1},t-u_1)\mathcal{S}_{l_{n+1}}^{k_{n+1}}\rho_S(t-u_1) \tag{3.1}$$

であった。いま、$\mathcal{L}_S$ が時間に依らないとすると、

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}_S\rho_S + \sum_{l_0,l_1}\sum_{k_0,k_1}\int_0^t du_1\ (-i)^{l_0+l_1}\chi_2^{k_0,k_1,l_0,l_1}(u_1)\mathcal{S}_{l_0}^{k_0}\hat{W}_S(u_1)\mathcal{S}_{l_1}^{k_1}\rho_S(t-u_1)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l_0,\cdots,,l_{n+1}=\pm}\sum_{k_0,\cdots,k_{n+1}}\int_0^t du_1\int_0^{u_1}du_2\cdots\int_0^{u_n}du_{n+1}\ (-i)^{l_0+\cdots+l_{n+1}}$$
$$\times\chi_{n+2}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(u_1,\cdots,u_{n+1},0)\mathcal{S}_{l_0}^{k_0}\hat{W}_S(u_1-u_2)\mathcal{S}_{l_1}^{k_1}\hat{W}_S(u_2-u_3)\cdots$$
$$\times\mathcal{S}_{l_n}^{k_n}\hat{W}_S(u_{n+1})\mathcal{S}_{l_{n+1}}^{k_{n+1}}\rho_S(t-u_1) \tag{3.2}$$

となる。

ラプラス変換 $X(t)$ のラプラス変換を、

$$\tilde{X}(s) := \int_0^\infty dt\ e^{-st}X(t) =: \mathfrak{L}[X(t)] \tag{3.3}$$

とすると、

$$\mathfrak{L}\Big[\int_0^t du\ X(t-u)Y(u)\Big] = \tilde{X}(s)\tilde{Y}(s) \tag{3.4}$$

となる。また、

$$\mathfrak{L}[\frac{d}{dt}X(t)] = s\tilde{X}(s) - X(0) \tag{3.5}$$

である。(3.2) をラプラス変換する。まず、

$$\mathfrak{L}[\frac{d}{dt}\rho_S(t)] = s\tilde{\rho}_S(s) - \rho(0) \tag{3.6}$$

である。また、

$$\mathfrak{L}\Big[\int_0^t du_1\ \chi_2^{k_0,k_1,l_0,l_1}(u_1)\mathcal{S}_{l_0}^{k_0}\hat{W}_S(u_1)\mathcal{S}_{l_1}^{k_1}\rho_S(t-u_1)\Big] = \mathcal{S}_{l_0}^{k_0}\mathfrak{L}[\chi_2^{k_0,k_1,l_0,l_1}(t)\hat{W}_S(t)]\mathcal{S}_{l_1}^{k_1}\tilde{\rho}_S(s) \tag{3.7}$$

となる。いま、

$$\chi_{n+2}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(u_1,\cdots,u_{n+1},0) = \kappa_{n+2}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(u_1-u_2,u_2-u_3,\cdots,u_n-u_{n+1},u_{n+1}) \tag{3.8}$$

と書く。また、

$$\int_0^\infty du_{n+1}\ e^{-su_{n+1}}\hat{W}_S(u_{n+1})\mathcal{S}_{l_{n+1}}^{k_{n+1}}\kappa_{n+2}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(u_1-u_2,u_2-u_3,\cdots,u_n,u_{n+1})$$
$$=:\hat{\kappa}_{n+2,1}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(u_1-u_2,u_2-u_3,\cdots,u_{n-1}-u_n,u_n;s) \tag{3.9}$$

とし、同様に、

$$\int_0^\infty du_n\ e^{-su_n}\hat{W}_S(u_n)\mathcal{S}_{l_n}^{k_n}\hat{\kappa}_{n+2,1}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(u_1-u_2,u_2-u_3,\cdots,u_{n-1},u_n;s)$$
$$=:\hat{\kappa}_{n+2,2}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(u_1-u_2,u_2-u_3,\cdots,u_{n-1};s) \tag{3.10}$$

とし、再帰的に $\hat{\kappa}_{n+2,n+1}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(s)$ を定義すると、

$$\mathfrak{L}\Big[\int_0^t du_1\int_0^{u_1}du_2\cdots\int_0^{u_n}du_{n+1}$$
$$\chi_{n+2}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(u_1,\cdots,u_{n+1},0)\mathcal{S}_{l_0}^{k_0}\hat{W}_S(u_1-u_2)\mathcal{S}_{l_1}^{k_1}\hat{W}_S(u_2-u_3)\cdots\mathcal{S}_{l_n}^{k_n}\hat{W}_S(u_{n+1})\mathcal{S}_{l_{n+1}}^{k_{n+1}}\rho_S(t-u_1)\Big]$$
$$=\hat{\kappa}_{n+2,n+1}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(s)\tilde{\rho}_S(s) \tag{3.11}$$

となる。よって、(3.2) のラプラス変換は、

$$s\tilde{\rho}_S(s)-\rho(0)=\mathcal{L}_S\tilde{\rho}_S(s)+\sum_{l_0,l_1}\sum_{k_0,k_1}(-i)^{l_0+l_1}\mathcal{S}_{l_0}^{k_0}\mathfrak{L}[\chi_2^{k_0,k_1,l_0,l_1}(t)\hat{W}_S(t)]\mathcal{S}_{l_1}^{k_1}\tilde{\rho}_S(s)$$
$$+\sum_{n=1}^\infty\sum_{l_0,\cdots,,l_{n+1}=\pm}\sum_{k_0,\cdots,k_{n+1}}(-i)^{l_0+\cdots+l_{n+1}}\hat{\kappa}_{n+2,n+1}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(s)\tilde{\rho}_S(s)$$
$$=:[\mathcal{L}_S+\hat{D}(s)]\tilde{\rho}_S(s) \tag{3.12}$$

となる。よって、

$$[s-\mathcal{L}_S-\hat{D}(s)]\tilde{\rho}_S(s)=\rho(0), \tag{3.13}$$
$$\tilde{\rho}_S(s)=[s-\mathcal{L}_S-\hat{D}(s)]^{-1}\rho(0) \tag{3.14}$$

となる。

A　古典的ポアソンノイズ

$$\frac{d\rho_z}{dt}=-i[H_S+z(t)X,\rho_z(t)] \tag{A.1}$$

を考える [2]。ここで、X はエルミート演算子, $z(t)$ はノイズである。ノイズ平均を $\langle\bullet\rangle$ とし、

$$\rho(t):=\langle\rho_z(t)\rangle \tag{A.2}$$

とすると、

$$\frac{d\rho}{dt}=-i[H_S,\rho(t)]-i[X,\langle z\rho_z\rangle] \tag{A.3}$$

となる。

$z(t)$ をポアソン・ホワイトノイズとする。これは、

$$z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i \delta(t - t_i) \tag{A.4}$$

であり、$N(t)$ の確率分布は、

$$P[N(t) = n] = \frac{(\gamma t)^n e^{-\gamma t}}{n!} \tag{A.5}$$

である。ξ_i は確率分布 $p(\xi)$ から選ばれる。また、

$$\langle z(t) \rangle = \gamma \langle \xi \rangle, \tag{A.6}$$

$$\langle z(t) z(s) \rangle - \langle z(t) \rangle \langle z(s) \rangle = \gamma \langle \xi^2 \rangle \delta(t - s) \tag{A.7}$$

である。このとき、

$$\langle z(t) M_t[z] \rangle = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; p(\xi) \int_0^{\xi} d\eta \; \langle \exp(\eta \frac{\delta}{\delta z(t)}) M_t[z] \rangle \tag{A.8}$$

が成り立つ。ここで、

$$\frac{\delta \rho_z}{\delta z(t)} = -i[X, \rho_z] \tag{A.9}$$

なので、

$$\exp(\eta \frac{\delta}{\delta z(t)}) \rho_z = e^{-i\eta X} \rho_z e^{i\eta X} \tag{A.10}$$

となり、

$$\langle z(t) \rho_z \rangle = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; p(\xi) \int_0^{\xi} d\eta \; e^{-i\eta X} \rho e^{i\eta X} \tag{A.11}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -i[H_S, \rho(t)] - i\gamma \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; p(\xi) \int_0^{\xi} d\eta \; [X, e^{-i\eta X} \rho e^{i\eta X}] \\ &= -i[H_S, \rho(t)] + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; p(\xi) (e^{-i\xi X} \rho e^{i\xi X} - \rho) \end{aligned} \tag{A.12}$$

となる。

ここで、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; p(\xi) e^{-i\xi X} \rho e^{i\xi X} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; p(\xi) [\cos(\xi X) \rho \cos(\xi X) + \sin(\xi X) \rho \sin(\xi X)] \\ &\quad + i \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; p(\xi) [-\sin(\xi X) \rho \cos(\xi X) + \cos(\xi X) \rho \sin(\xi X)] \end{aligned} \tag{A.13}$$

であり、$p(\xi)$ が偶関数なら、第 2 行は消える。このとき、

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H_S, \rho(t)] + \gamma \int_0^{\infty} d\xi \; \tilde{p}(\xi) (\cos(\xi X) \rho \cos(\xi X) + \sin(\xi X) \rho \sin(\xi X) - \rho) \tag{A.14}$$

となる。ただし、$\tilde{p}(\xi) := 2p(\xi)$ である。

(2.47) で $L = X = L^\dagger$ とすると、

$$\frac{d\rho_S}{dt} = -i[H_S, \rho(t)] + (\Gamma_1^+ + \Gamma_2^+) \int_0^{\infty} d\xi \; \frac{e^{-\xi/\mu}}{\mu} (\cos(\xi X) \rho \cos(\xi X) + \sin(\xi X) \rho \sin(\xi X) - \rho) \tag{A.15}$$

となる。よって (2.47) は量子ポアソンノイズの量子マスター方程式と言える。

B　(1.75) の証明

まず、

$$
\begin{aligned}
&\kappa_{n+2}^{\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}2}(t,v_1,\cdots,v_n,s)\\
&\quad=-\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,v_1)\mathcal{I}_{\alpha_1}(v_1)\hat{W}(v_1,v_2)\mathcal{I}_{\alpha_2}(v_2)\cdots\mathcal{P}\mathcal{L}_S(v_n)\mathcal{P}\hat{W}(v_n,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\Big)\\
&\quad=-\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,v_1)\mathcal{I}_{\alpha_1}(v_1)\hat{W}(v_1,v_2)\mathcal{I}_{\alpha_2}(v_2)\cdots\mathcal{P}\mathcal{L}_S(v_n)\mathcal{P}\hat{W}(v_n,s)\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\Big)\\
&\quad=-\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,v_1)\mathcal{I}_{\alpha_1}(v_1)\hat{W}(v_1,v_2)\mathcal{I}_{\alpha_2}(v_2)\cdots\mathcal{P}\mathcal{L}_S(v_n)\rho_B\Big)\,\mathrm{Tr}_B\Big(\hat{W}_S(v_n,s)\hat{W}_B(v_n,s)\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\Big)\\
&\quad=-\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,v_1)\mathcal{I}_{\alpha_1}(v_1)\hat{W}(v_1,v_2)\mathcal{I}_{\alpha_2}(v_2)\cdots\mathcal{P}\mathcal{L}_S(v_n)\rho_B\Big)\hat{W}_S(v_n,s)\,\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{L}_1(s)\rho_B\Big)\rho_S(s)\\
&\quad=0
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

である。ここで、

$$
\frac{d}{dt}\hat{W}_x(t)=\mathcal{L}_x(t)\hat{W}_x(t),\quad \hat{W}_x(0)=1\ \ (x=S,B),
\tag{B.2}
$$

$$
\hat{W}_x(t,s):=\hat{W}_x(t)\hat{W}_x(s)^{-1}
\tag{B.3}
$$

である。$\mathrm{Tr}_B[\mathcal{L}_B\bullet]=0$ より、$\mathrm{Tr}_B[\hat{W}_B(t)\bullet]=\mathrm{Tr}_B[\bullet]$ である。また、

$$
\begin{aligned}
&\kappa_{n+2}^{2\alpha_2\cdots\alpha_n}(t,v_1,\cdots,v_n,s)\\
&\quad=-\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,v_1)\mathcal{P}\mathcal{L}_S(v_1)\mathcal{P}\hat{W}(v_1,v_2)\mathcal{I}_{\alpha_2}(v_2)\cdots\mathcal{I}_{\alpha_n}(v_n)\hat{W}(v_n,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\Big)\\
&\quad=-\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,v_1)\rho_B\Big)\mathcal{L}_S(v_1)\,\mathrm{Tr}_B\Big(\hat{W}(v_1,v_2)\mathcal{I}_{\alpha_2}(v_2)\cdots\mathcal{I}_{\alpha_n}(v_n)\hat{W}(v_n,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\Big)\\
&\quad=-\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}_B(t,v_1)\rho_B\Big)\hat{W}_S(t,v_1)\mathcal{L}_S(v_1)\,\mathrm{Tr}_B\Big(\hat{W}(v_1,v_2)\mathcal{I}_{\alpha_2}(v_2)\cdots\mathcal{I}_{\alpha_n}(v_n)\hat{W}(v_n,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\Big)\\
&\quad=-\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{L}_1(t)\rho_B\Big)\hat{W}_S(t,v_1)\mathcal{L}_S(v_1)\,\mathrm{Tr}_B\Big(\hat{W}(v_1,v_2)\mathcal{I}_{\alpha_2}(v_2)\cdots\mathcal{I}_{\alpha_n}(v_n)\hat{W}(v_n,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\Big)\\
&\quad=0
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

である。また、例えば $n=2$ の場合は、

$$
\begin{aligned}
&\kappa_5^{\alpha_1 2\alpha_3}(t,v_1,v_2,v_3,s)\\
&\quad=-\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,v_1)\mathcal{I}_{\alpha_1}(v_1)\hat{W}(v_1,v_2)\mathcal{P}\mathcal{L}_S(v_2)\mathcal{P}\hat{W}(v_2,v_3)\mathcal{I}_{\alpha_3}(v_3)\hat{W}(v_3,s)\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\Big)\\
&\quad=-\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,v_1)\mathcal{I}_{\alpha_1}(v_1)\hat{W}(v_1,v_2)\rho_B\Big)\,\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{L}_S(v_2)\mathcal{P}\hat{W}(v_2,v_3)\mathcal{I}_{\alpha_3}(v_3)\hat{W}(v_3,s)\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\Big)\\
&\quad=-\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,v_1)\mathcal{I}_{\alpha_1}(v_1)\hat{W}(v_1,v_2)\rho_B\Big)\mathcal{L}_S(v_2)\,\mathrm{Tr}_B\Big(\hat{W}(v_2,v_3)\mathcal{I}_{\alpha_3}(v_3)\hat{W}(v_3,s)\mathcal{L}_1(s)\rho_S(s)\rho_B\Big)\\
&\quad=-\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{L}_1(t)\hat{W}(t,v_1)\mathcal{I}_{\alpha_1}(v_1)\rho_B\Big)\hat{W}_S(v_1,v_2)\mathcal{L}_S(v_2)\hat{W}_S(v_2,v_3)\,\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{I}_{\alpha_3}(v_3)\hat{W}(v_3,s)\mathcal{L}_1(s)\rho_B\Big)\rho_S(s)
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

である。ここで、$\alpha_3=1$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{I}_1(v_3)\hat{W}(v_3,s)\mathcal{L}_1(s)\rho_B\Big)&=\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(v_3)\mathcal{Q}\hat{W}(v_3,s)\mathcal{L}_1(s)\rho_B\Big)\\
&=\mathrm{Tr}_B\Big(\mathcal{Q}\mathcal{L}_1(v_3)\hat{W}(v_3,s)\mathcal{L}_1(s)\rho_B\Big)\\
&=0
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

であるから、

$$\kappa_5^{\alpha_1 21}(t, v_1, v_2, v_3, s) = 0 \tag{B.7}$$

を得る。また、$\alpha_1 = 1$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_B \left(\mathcal{L}_1(t) \hat{W}(t, v_1) \mathcal{I}_1(v_1) \rho_B \right) &= \mathrm{Tr}_B \left(\mathcal{L}_1(t) \hat{W}(t, v_1) \mathcal{Q} \mathcal{L}_1(v_1) \mathcal{Q} \rho_B \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{B.8}$$

であるので、

$$\kappa_5^{12\alpha_3}(t, v_1, v_2, v_3, s) = 0 \tag{B.9}$$

を得る。同様にして、α_i に 1 つ以上の 2 が含まれる場合は、

$$\kappa_{n+2}^{\boldsymbol{\alpha}}(t, v_1, \cdots, v_n, s) = 0 \tag{B.10}$$

となる。

C　(2.7) の導出

(2.7) を導出する。以下では、

$$S^- = L, \tag{C.1}$$
$$S^+ = L^\dagger, \tag{C.2}$$
$$B^\pm = \lambda \sigma_1^\mp \sigma_2^\pm \tag{C.3}$$

とする。

$\mathcal{L}_B \rho_B = 0$ で定まる定常状態は、

$$\rho_B = \rho_B^1 \otimes \rho_B^2, \tag{C.4}$$
$$\rho_B^i = \frac{\Gamma_i^-}{\gamma_i} |g_i\rangle\langle g_i| + \frac{\Gamma_i^+}{\gamma_i} |e_i\rangle\langle e_i|, \tag{C.5}$$
$$\gamma_i := \Gamma_i^- + \Gamma_i^+ \tag{C.6}$$

である。

以下では、

$$\chi_{n+2}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}(t_0, t_1, \cdots, t_{n+1}) = \mathrm{Tr}_B [\mathcal{B}_{l_0}^{k_0} e^{\mathcal{L}_B (t_0 - t_1)} \mathcal{Q} \mathcal{B}_{l_1}^{k_1} e^{\mathcal{L}_B (t_1 - t_2)} \mathcal{Q} \cdots \mathcal{Q} \mathcal{B}_{l_n}^{k_n} e^{\mathcal{L}_B (t_n - t_{n+1})} \mathcal{Q} \mathcal{B}_{l_{n+1}}^{k_{n+1}} \rho_B] \tag{C.7}$$

を求める。まず、

$$\mathcal{B}_{l_1}^{k_1} e^{\mathcal{L}_B t} \mathcal{Q} \mathcal{B}_{l_2}^{k_2} \rho_B = \mathcal{B}_{l_1}^{k_1} e^{\mathcal{L}_B t} \mathcal{B}_{l_2}^{k_2} \rho_B \tag{C.8}$$

であり、

$$\mathcal{B}_+^{k_1} e^{\mathcal{L}_B t} \mathcal{B}_{l_2}^{k_2} \rho_B = B^{k_1} (e^{\mathcal{L}_B t} \mathcal{B}_{l_2}^{k_2} \rho_B), \tag{C.9}$$
$$\mathcal{B}_-^{k_1} e^{\mathcal{L}_B t} \mathcal{B}_{l_2}^{k_2} \rho_B = (e^{\mathcal{L}_B t} \mathcal{B}_{l_2}^{k_2} \rho_B) B^{k_1} \tag{C.10}$$

である。そこで、

$$b_l^k(t) := e^{\mathcal{L}_B t}\mathcal{B}_l^k \rho_B \tag{C.11}$$

を求める。まず、

$$b_+^+(t) = e^{\mathcal{L}_B t}(B^+\rho_B), \tag{C.12}$$
$$b_+^-(t) = e^{\mathcal{L}_B t}(B^-\rho_B), \tag{C.13}$$
$$b_-^+(t) = e^{\mathcal{L}_B t}(\rho_B B^+), \tag{C.14}$$
$$b_-^-(t) = e^{\mathcal{L}_B t}(\rho_B B^-) \tag{C.15}$$

である。ここで、

$$b_+^+(t) = \lambda e^{\mathcal{L}_B^1 t}(\sigma_1^-\rho_B^1) \otimes e^{\mathcal{L}_B^2 t}(\sigma_2^+\rho_B^2) \tag{C.16}$$

である。ただし、

$$\mathcal{L}_B^i \bullet = -i[\frac{\omega_i}{2}\sigma_i^z, \bullet] + \Big(\Gamma_i^+\mathcal{D}[\sigma_i^+](\bullet) + \Gamma_i^-\mathcal{D}[\sigma_i^-](\bullet)\Big) \tag{C.17}$$

である。B 系の i 番目の系の演算子 b_i に対して、

$$b_i(t) := e^{\mathcal{L}_B^i t} b_i \tag{C.18}$$

とする。特に、$b_i = \sigma_i^+,\ \sigma_i^-,\ \sigma_i^z,\ 1_i$ を調べれば良い。

さて、

$$\frac{db_i(t)}{dt} = \mathcal{L}_B^i b_i(t) \tag{C.19}$$

である。いま、

$$b_i(t) = \alpha_1(t) + \alpha_+(t)\sigma_i^+ + \alpha_-(t)\sigma_i^- + \alpha_z(t)\sigma_i^z \tag{C.20}$$

と展開すると、

$$\begin{aligned}&\frac{d\alpha_1(t)}{dt} + \frac{d\alpha_+(t)}{dt}\sigma_i^+ + \frac{d\alpha_-(t)}{dt}\sigma_i^- + \frac{d\alpha_z(t)}{dt}\sigma_i^z \\ &= \alpha_1(t)\mathcal{L}_B^i 1 + \alpha_+(t)\mathcal{L}_B^i\sigma_i^+ + \alpha_-(t)\mathcal{L}_B^i\sigma_i^- + +\alpha_z(t)\mathcal{L}_B^i\sigma_i^z\end{aligned} \tag{C.21}$$

である。ここで、

$$\mathcal{L}_B^i 1 = (\Gamma_i^+ - \Gamma_i^-)\sigma_i^z, \tag{C.22}$$
$$\mathcal{L}_B^i\sigma_i^+ = -i\omega_i\sigma_i^+ - \frac{1}{2}\gamma_i\sigma^+, \tag{C.23}$$
$$\mathcal{L}_B^i\sigma_i^- = i\omega_i\sigma_i^- - \frac{1}{2}\gamma_i\sigma^-, \tag{C.24}$$
$$\mathcal{L}_B^i\sigma_i^z = -\gamma_i\sigma_i^z \tag{C.25}$$

である。よって、

$$\frac{d\alpha_1(t)}{dt} = 0, \tag{C.26}$$
$$\frac{d\alpha_+(t)}{dt} = \Big[-i\omega_i - \frac{1}{2}\gamma_i\Big]\alpha_+(t), \tag{C.27}$$
$$\frac{d\alpha_-(t)}{dt} = \Big[i\omega_i - \frac{1}{2}\gamma_i\Big]\alpha_-(t), \tag{C.28}$$
$$\frac{d\alpha_z(t)}{dt} = -\gamma_i\alpha_z(t) + (\Gamma_i^+ - \Gamma_i^-)\alpha_1(t) \tag{C.29}$$

となる。これより、

$$\alpha_1(t) = \alpha_1(0), \tag{C.30}$$

$$\alpha_z(t) = \alpha_z(0)e^{-\gamma_i t} + \frac{\Gamma_i^- - \Gamma_i^+}{\gamma_i}[e^{-\gamma_i t} - 1]\alpha_1(0) \tag{C.31}$$

となる。よって、

$$1_i(t) = 1 + \frac{\Gamma_i^- - \Gamma_i^+}{\gamma_i}[e^{-\gamma_i t} - 1]\sigma_i^z, \tag{C.32}$$

$$\sigma_i^+(t) = e^{-i\omega_i t - \frac{1}{2}\gamma_i t}\sigma_i^+, \tag{C.33}$$

$$\sigma_i^-(t) = e^{i\omega_i t - \frac{1}{2}\gamma_i t}\sigma_i^-, \tag{C.34}$$

$$\sigma_i^z(t) = e^{-\gamma_i t}\sigma_i^z \tag{C.35}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{L}_B^i t}(|g_i\rangle\langle g_i|) &= \frac{1}{2}[1_i(t) - \sigma_i^z(t)] \\ &= \frac{1}{2}\Big[1 + \frac{\Gamma_i^- - \Gamma_i^+}{\gamma_i}[e^{-\gamma_i t} - 1]\sigma_i^z - e^{-\gamma_i t}\sigma_i^z\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[1 + \frac{\Gamma_i^+ - \Gamma_i^-}{\gamma_i}\sigma_i^z\Big] - \frac{\Gamma_i^+}{\gamma_i}e^{-\gamma_i t}\sigma_i^z \\ &= \rho_B^i - \frac{\Gamma_i^+}{\gamma_i}e^{-\gamma_i t}\sigma_i^z \end{aligned} \tag{C.36}$$

および、

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{L}_B^i t}(|e_i\rangle\langle e_i|) &= \frac{1}{2}[1_i(t) + \sigma_i^z(t)] \\ &= \frac{1}{2}\Big[1 + \frac{\Gamma_i^- - \Gamma_i^+}{\gamma_i}[e^{-\gamma_i t} - 1]\sigma_i^z + e^{-\gamma_i t}\sigma_i^z\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[1 + \frac{\Gamma_i^+ - \Gamma_i^-}{\gamma_i}\sigma_i^z\Big] + \frac{\Gamma_i^-}{\gamma_i}e^{-\gamma_i t}\sigma_i^z \\ &= \rho_B^i + \frac{\Gamma_i^-}{\gamma_i}e^{-\gamma_i t}\sigma_i^z \end{aligned} \tag{C.37}$$

を得る。

さて、

$$b_+^+(t) = \lambda e^{\mathcal{L}_B^1 t}(\sigma_1^-\rho_B^1) \otimes e^{\mathcal{L}_B^2 t}(\sigma_2^+\rho_B^2), \tag{C.38}$$

$$b_+^-(t) = \lambda e^{\mathcal{L}_B^1 t}(\sigma_1^+\rho_B^1) \otimes e^{\mathcal{L}_B^2 t}(\sigma_2^-\rho_B^2), \tag{C.39}$$

$$b_-^+(t) = \lambda e^{\mathcal{L}_B^1 t}(\rho_B^1\sigma_1^-) \otimes e^{\mathcal{L}_B^2 t}(\rho_B^2\sigma_2^+), \tag{C.40}$$

$$b_-^-(t) = \lambda e^{\mathcal{L}_B^1 t}(\rho_B^1\sigma_1^+) \otimes e^{\mathcal{L}_B^2 t}(\rho_B^2\sigma_2^-) \tag{C.41}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \sigma_i^+\rho_B^i &= |e_i\rangle\langle g_i|\Big(\frac{\Gamma_i^-}{\gamma_i}|g_i\rangle\langle g_i| + \frac{\Gamma_i^+}{\gamma_i}|e_i\rangle\langle e_i|\Big) \\ &= \frac{\Gamma_i^-}{\gamma_i}|e_i\rangle\langle g_i| = \frac{\Gamma_i^-}{\gamma_i}\sigma_i^+, \end{aligned} \tag{C.42}$$

$$\rho_B^i\sigma_i^+ = \Big(\frac{\Gamma_i^-}{\gamma_i}|g_i\rangle\langle g_i| + \frac{\Gamma_i^+}{\gamma_i}|e_i\rangle\langle e_i|\Big)|e_i\rangle\langle g_i|$$
$$= \frac{\Gamma_i^+}{\gamma_i}\sigma_i^+, \tag{C.43}$$
$$\sigma_i^-\rho_B^i = |g_i\rangle\langle e_i|\Big(\frac{\Gamma_i^-}{\gamma_i}|g_i\rangle\langle g_i| + \frac{\Gamma_i^+}{\gamma_i}|e_i\rangle\langle e_i|\Big)$$
$$= \frac{\Gamma_i^+}{\gamma_i}\sigma_i^-, \tag{C.44}$$
$$\rho_B^i\sigma_i^- = \Big(\frac{\Gamma_i^-}{\gamma_i}|g_i\rangle\langle g_i| + \frac{\Gamma_i^+}{\gamma_i}|e_i\rangle\langle e_i|\Big)|g_i\rangle\langle e_i|$$
$$= \frac{\Gamma_i^-}{\gamma_i}\sigma_i^- \tag{C.45}$$

である。従って、

$$b_+^+(t) = \lambda\frac{\Gamma_1^+\Gamma_2^-}{\gamma_1\gamma_2}e^{i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}\sigma_1^-\sigma_2^+, \tag{C.46}$$
$$b_+^-(t) = \lambda\frac{\Gamma_1^-\Gamma_2^+}{\gamma_1\gamma_2}e^{-i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}\sigma_1^+\sigma_2^-, \tag{C.47}$$
$$b_-^+(t) = \lambda\frac{\Gamma_1^-\Gamma_2^+}{\gamma_1\gamma_2}e^{i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}\sigma_1^-\sigma_2^+, \tag{C.48}$$
$$b_-^-(t) = \lambda\frac{\Gamma_1^+\Gamma_2^-}{\gamma_1\gamma_2}e^{-i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}\sigma_1^+\sigma_2^- \tag{C.49}$$

を得る。

いま、

$$\mathfrak{B}_{l_1l_2}^{k_1k_2}(t) := \mathcal{B}_{l_1}^{k_1}e^{\mathcal{L}_B t}\mathcal{Q}\mathcal{B}_{l_2}^{k_2}\rho_B \tag{C.50}$$

とすると、

$$\mathfrak{B}_{+l_2}^{k_1k_2}(t) = B^{k_2}b_{l_2}^{k_2}(t), \tag{C.51}$$
$$\mathfrak{B}_{-l_2}^{k_1k_2}(t) = b_{l_2}^{k_2}(t)B^{k_2} \tag{C.52}$$

である。まず、

$$\mathfrak{B}_{l_1l_2}^{k_1k_2} = 0 \quad (k_1 = k_2) \tag{C.53}$$

である。0 でない成分は、

$$\mathfrak{B}_{++}^{-+}(t) = \lambda^2\frac{\Gamma_1^+\Gamma_2^-}{\gamma_1\gamma_2}e^{i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}\sigma_1^+\sigma_1^-\sigma_2^-\sigma_2^+, \tag{C.54}$$
$$\mathfrak{B}_{++}^{+-}(t) = \lambda^2\frac{\Gamma_1^-\Gamma_2^+}{\gamma_1\gamma_2}e^{-i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}\sigma_1^-\sigma_1^+\sigma_2^+\sigma_2^-, \tag{C.55}$$
$$\mathfrak{B}_{+-}^{-+}(t) = \lambda^2\frac{\Gamma_1^-\Gamma_2^+}{\gamma_1\gamma_2}e^{i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}\sigma_1^+\sigma_1^-\sigma_2^-\sigma_2^+, \tag{C.56}$$
$$\mathfrak{B}_{+-}^{+-}(t) = \lambda^2\frac{\Gamma_1^+\Gamma_2^-}{\gamma_1\gamma_2}e^{-i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}\sigma_1^-\sigma_1^+\sigma_2^+\sigma_2^-, \tag{C.57}$$

$$\mathfrak{B}^{-+}_{-+}(t) = \lambda^2 \frac{\Gamma_1^+\Gamma_2^-}{\gamma_1\gamma_2} e^{i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}\sigma_1^-\sigma_1^+\sigma_2^+\sigma_2^-, \tag{C.58}$$

$$\mathfrak{B}^{+-}_{-+}(t) = \lambda^2 \frac{\Gamma_1^-\Gamma_2^+}{\gamma_1\gamma_2} e^{-i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}\sigma_1^+\sigma_1^-\sigma_2^-\sigma_2^+, \tag{C.59}$$

$$\mathfrak{B}^{-+}_{--}(t) = \lambda^2 \frac{\Gamma_1^-\Gamma_2^+}{\gamma_1\gamma_2} e^{i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}\sigma_1^-\sigma_1^+\sigma_2^+\sigma_2^-, \tag{C.60}$$

$$\mathfrak{B}^{+-}_{--}(t) = \lambda^2 \frac{\Gamma_1^+\Gamma_2^-}{\gamma_1\gamma_2} e^{-i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}\sigma_1^+\sigma_1^-\sigma_2^-\sigma_2^+ \tag{C.61}$$

である。これらは、以下のようにまとめられる：

$$\mathfrak{B}^{k_1k_2}_{l_1l_2}(t) = \psi_B^{l_1k_1}\,\mathrm{Tr}_B[\mathfrak{B}^{k_1k_2}_{l_1l_2}(t)], \tag{C.62}$$

$$\psi_B^+ := |g_1e_2\rangle\langle g_1e_2|, \tag{C.63}$$

$$\psi_B^- := |e_1g_2\rangle\langle e_1g_2|. \tag{C.64}$$

$(n+2)$ 点関数

$$\chi^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}_{n+2}(t_0,t_1,\cdots,t_{n+1}) = \mathrm{Tr}_B[\mathcal{B}^{k_0}_{l_0}e^{\mathcal{L}_B(t_0-t_1)}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_B(t_1-t_2)}\mathcal{Q}\cdots\mathcal{Q}\mathcal{B}^{k_n}_{l_n}e^{\mathcal{L}_B(t_n-t_{n+1})}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{k_{n+1}}_{l_{n+1}}\rho_B] \tag{C.65}$$

において、

$$\mathcal{B}^{k_n}_{l_n}e^{\mathcal{L}_Bt}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{k_{n+1}}_{l_{n+1}}\rho_B = \psi_B^{l_nk_n}\,\mathrm{Tr}_B[\mathfrak{B}^{k_nk_{n+1}}_{l_nl_{n+1}}(t)] \tag{C.66}$$

であった。次に、

$$\mathfrak{C}^{k_1k_2,\pm}_{l_1l_2}(t,s) := \mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_Bt}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}e^{\mathcal{L}_Bs}\mathcal{Q}\psi_B^\pm \tag{C.67}$$

を求める。まず、

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}^{k_1k_2,\pm}_{l_1l_2}(t,s) &= \mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_Bt}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}e^{\mathcal{L}_Bs}\psi_B^\pm - \mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_Bt}\mathcal{Q}\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}e^{\mathcal{L}_Bs}\mathcal{P}\psi_B^\pm \\
&= \mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_Bt}\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}e^{\mathcal{L}_Bs}\psi_B^\pm - \mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_Bt}\rho_B\,\mathrm{Tr}_B[\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}e^{\mathcal{L}_Bs}\psi_B^\pm] \\
&\quad - \mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_Bt}\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}\rho_B + \mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_Bt}\mathcal{P}\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}\rho_B \\
&= \mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_Bt}\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}e^{\mathcal{L}_Bs}\psi_B^\pm - \mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_Bt}\rho_B\,\mathrm{Tr}_B[\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}e^{\mathcal{L}_Bs}\psi_B^\pm] - \mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_Bt}\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}\rho_B
\end{aligned} \tag{C.68}$$

である。ここで、

$$e^{\mathcal{L}_Bs}\psi_B^+ = e^{\mathcal{L}_B^1s}|g_1\rangle\langle g_1| \otimes e^{\mathcal{L}_B^2s}|e_2\rangle\langle e_2|, \tag{C.69}$$

$$e^{\mathcal{L}_Bs}\psi_B^- = e^{\mathcal{L}_B^1s}|e_1\rangle\langle e_1| \otimes e^{\mathcal{L}_B^2s}|g_2\rangle\langle g_2| \tag{C.70}$$

である。これは、

$$e^{\mathcal{L}_Bs}\psi_B^+ = \Big(\rho_B^1 - \frac{\Gamma_1^+}{\gamma_1}e^{-\gamma_1s}\sigma_1^z\Big)\Big(\rho_B^2 + \frac{\Gamma_2^-}{\gamma_2}e^{-\gamma_2s}\sigma_2^z\Big), \tag{C.71}$$

$$e^{\mathcal{L}_Bs}\psi_B^- = \Big(\rho_B^1 + \frac{\Gamma_1^-}{\gamma_1}e^{-\gamma_1s}\sigma_1^z\Big)\Big(\rho_B^2 - \frac{\Gamma_2^+}{\gamma_1}e^{-\gamma_2s}\sigma_2^z\Big) \tag{C.72}$$

となる。よって、

$$\mathrm{Tr}_B[\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}e^{\mathcal{L}_Bs}\psi_B^\pm] = 0 \tag{C.73}$$

となり、

$$\mathfrak{C}^{k_1k_2,\pm}_{l_1l_2}(t,s)=\mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_Bt}\Big(\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}e^{\mathcal{L}_Bs}\psi^{\pm}_B-\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}\rho_B\Big) \tag{C.74}$$

を得る。$\mathfrak{B}^{k_1k_2}_{l_1l_2}(t)$ の計算と同様にして、

$$\mathfrak{C}^{k_1k_2,\pm}_{l_1l_2}(t,s)=\psi^{l_1k_1}_B\,\mathrm{Tr}_B[\mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_Bt}\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}e^{\mathcal{L}_Bs}\mathcal{Q}\psi^{\pm}_B] \tag{C.75}$$

となる。また、

$$\mathfrak{C}^{k_1k_2,\pm}_{l_1l_2}(t,s)=0\ \ (k_1=k_2) \tag{C.76}$$

である。これより、

$$\begin{aligned}\chi^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}_{2n}(t_1,\cdots,t_{2n})=&\Big(\prod_{j=1}^{n-1}\mathrm{Tr}_B[\mathcal{B}^{k_{2j-1}}_{l_{2j-1}}e^{\mathcal{L}_B(t_{2j-1}-t_{2j})}\mathcal{B}^{k_{2j}}_{l_{2j}}e^{\mathcal{L}_B(t_{2j}-t_{2j+1})}\mathcal{Q}\psi^{l_{2j+1}k_{2j+1}}_B]\Big)\\&\times\mathrm{Tr}_B[\mathcal{B}^{k_{2n-1}}_{l_{2n-1}}e^{\mathcal{L}_B(t_{2n-1}-t_{2n})}\mathcal{B}^{k_{2n}}_{l_{2n}}\rho_B]\end{aligned} \tag{C.77}$$

および、$\chi^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}_{2n+1}(t_1,\cdots,t_{2n+1})=0$ を得る。いま、

$$C^{k_1k_2,\pm}_{l_1l_2}(t,s):=\mathrm{Tr}_B[\mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_Bt}\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}e^{\mathcal{L}_Bs}\mathcal{Q}\psi^{\pm}_B], \tag{C.78}$$

$$D^{k_1k_2}_{l_1l_2}(t):=\mathrm{Tr}_B[\mathcal{B}^{k_1}_{l_1}e^{\mathcal{L}_B(t)}\mathcal{B}^{k_2}_{l_2}\rho_B] \tag{C.79}$$

とすると、

$$\chi^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}_{2n}(t_1,\cdots,t_{2n})=D^{k_{2n-1}k_{2n}}_{l_{2n-1}l_{2n}}(t_{2n-1}-t_{2n})\prod_{j=1}^{n-1}C^{k_{2j-1}k_{2j},l_{2j+1}k_{2j+1}}_{l_{2j-1}l_{2j}}(t_{2j-1}-t_{2j},t_{2j}-t_{2j+1}) \tag{C.80}$$

である。

以下では、$C^{k_1k_2,\pm}_{l_1l_2}(t,s)$ を求める。いま、

$$c^{k,\pm}_l(s):=\mathcal{B}^k_le^{\mathcal{L}_Bs}\psi^{\pm}_B-\mathcal{B}^k_l\rho_B=\mathcal{B}^k_le^{\mathcal{L}_Bs}\psi^{\pm}_B-b^k_l(0) \tag{C.81}$$

とすると、

$$\begin{aligned}c^{+,+}_+(s)&=\lambda\sigma^-_1\Big(\rho^1_B-\frac{\Gamma^+_1}{\gamma_1}e^{-\gamma_1s}\sigma^z_1\Big)\sigma^+_2\Big(\rho^2_B+\frac{\Gamma^-_2}{\gamma_2}e^{-\gamma_2s}\sigma^z_2\Big)-b^+_+(0)\\&=\frac{\lambda}{\gamma_1\gamma_2}\Gamma^+_1\Gamma^-_2\Big[(1-e^{-\gamma_1s})(1-e^{-\gamma_2s})-1\Big]\sigma^-_1\sigma^+_2,\end{aligned} \tag{C.82}$$

$$\begin{aligned}c^{-,+}_+(s)&=\lambda\sigma^+_1\Big(\rho^1_B-\frac{\Gamma^+_1}{\gamma_1}e^{-\gamma_1s}\sigma^z_1\Big)\sigma^-_2\Big(\rho^2_B+\frac{\Gamma^-_2}{\gamma_2}e^{-\gamma_2s}\sigma^z_2\Big)-b^-_+(0)\\&=\frac{\lambda}{\gamma_1\gamma_2}\Big[(\Gamma^-_1+\Gamma^+_1e^{-\gamma_1s})(\Gamma^+_2+\Gamma^-_2e^{-\gamma_2s})-\Gamma^-_1\Gamma^+_2\Big]\sigma^+_1\sigma^-_2,\end{aligned} \tag{C.83}$$

$$\begin{aligned}c^{+,+}_-(s)&=\lambda\Big(\rho^1_B-\frac{\Gamma^+_1}{\gamma_1}e^{-\gamma_1s}\sigma^z_1\Big)\sigma^-_1\Big(\rho^2_B+\frac{\Gamma^-_2}{\gamma_2}e^{-\gamma_2s}\sigma^z_2\Big)\sigma^+_2-b^+_-(0)\\&=\frac{\lambda}{\gamma_1\gamma_2}\Big[(\Gamma^-_1+\Gamma^+_1e^{-\gamma_1s})(\Gamma^+_2+\Gamma^-_2e^{-\gamma_2s})-\Gamma^-_1\Gamma^+_2\Big]\sigma^-_1\sigma^+_2,\end{aligned} \tag{C.84}$$

$$
\begin{aligned}
c_{-}^{-,+}(s) &= \lambda\Big(\rho_B^1 - \frac{\Gamma_1^+}{\gamma_1}e^{-\gamma_1 s}\sigma_1^z\Big)\sigma_1^+\Big(\rho_B^2 + \frac{\Gamma_2^-}{\gamma_2}e^{-\gamma_2 s}\sigma_2^z\Big)\sigma_2^- - b_-^-(0) \\
&= \frac{\lambda}{\gamma_1\gamma_2}\Gamma_1^+\Gamma_2^-\Big[(1-e^{-\gamma_1 s})(1-e^{-\gamma_2 s})-1\Big]\sigma_1^+\sigma_2^-, \qquad \text{(C.85)} \\
c_{+}^{+,-}(s) &= \lambda\sigma_1^-\Big(\rho_B^1 + \frac{\Gamma_1^-}{\gamma_1}e^{-\gamma_1 s}\sigma_1^z\Big)\sigma_2^+\Big(\rho_B^2 - \frac{\Gamma_2^+}{\gamma_1}e^{-\gamma_2 s}\sigma_2^z\Big) - b_+^+(0) \\
&= \frac{\lambda}{\gamma_1\gamma_2}\Big[(\Gamma_1^+ + \Gamma_1^- e^{-\gamma_1 s})(\Gamma_2^- + \Gamma_2^+ e^{-\gamma_2} s) - \Gamma_1^+\Gamma_2^-\Big]\sigma_1^-\sigma_2^+, \qquad \text{(C.86)} \\
c_{+}^{-,-}(s) &= \lambda\sigma_1^+\Big(\rho_B^1 + \frac{\Gamma_1^-}{\gamma_1}e^{-\gamma_1 s}\sigma_1^z\Big)\sigma_2^-\Big(\rho_B^2 - \frac{\Gamma_2^+}{\gamma_1}e^{-\gamma_2 s}\sigma_2^z\Big) - b_+^-(0) \\
&= \frac{\lambda}{\gamma_1\gamma_2}\Gamma_1^-\Gamma_2^+\Big[(1-e^{-\gamma_1 s})(1-e^{-\gamma_2 s})-1\Big]\sigma_1^+\sigma_2^-, \qquad \text{(C.87)} \\
c_{-}^{+,-}(s) &= \lambda\Big(\rho_B^1 + \frac{\Gamma_1^-}{\gamma_1}e^{-\gamma_1 s}\sigma_1^z\Big)\sigma_1^-\Big(\rho_B^2 - \frac{\Gamma_2^+}{\gamma_1}e^{-\gamma_2 s}\sigma_2^z\Big)\sigma_2^+ - b_-^+(0) \\
&= \frac{\lambda}{\gamma_1\gamma_2}\Gamma_1^-\Gamma_2^+\Big[(1-e^{-\gamma_1 s})(1-e^{-\gamma_2 s})-1\Big]\sigma_1^-\sigma_2^+, \qquad \text{(C.88)} \\
c_{-}^{-,-}(s) &= \lambda\Big(\rho_B^1 + \frac{\Gamma_1^-}{\gamma_1}e^{-\gamma_1 s}\sigma_1^z\Big)\sigma_1^+\Big(\rho_B^2 - \frac{\Gamma_2^+}{\gamma_1}e^{-\gamma_2 s}\sigma_2^z\Big)\sigma_2^- - b_-^-(0) \\
&= \frac{\lambda}{\gamma_1\gamma_2}\Big[(\Gamma_1^+ + \Gamma_1^- e^{-\gamma_1 s})(\Gamma_2^- + \Gamma_2^+ e^{-\gamma_2 s}) - \Gamma_1^+\Gamma_2^-\Big]\sigma_1^+\sigma_2^- \qquad \text{(C.89)}
\end{aligned}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
C_{l_1+}^{-+,+}(t,s) &= \frac{\lambda^2}{\gamma_1\gamma_2}\Gamma_1^+\Gamma_2^-\Big[(1-e^{-\gamma_1 s})(1-e^{-\gamma_2 s})-1\Big]e^{i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}, \qquad \text{(C.90)} \\
C_{l_1+}^{+-,+}(t,s) &= \frac{\lambda^2}{\gamma_1\gamma_2}\Big[(\Gamma_1^- + \Gamma_1^+ e^{-\gamma_1 s})(\Gamma_2^+ + \Gamma_2^- e^{-\gamma_2 s}) - \Gamma_1^-\Gamma_2^+\Big]e^{-i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}, \qquad \text{(C.91)} \\
C_{l_1-}^{-+,+}(t,s) &= \frac{\lambda^2}{\gamma_1\gamma_2}\Big[(\Gamma_1^- + \Gamma_1^+ e^{-\gamma_1 s})(\Gamma_2^+ + \Gamma_2^- e^{-\gamma_2 s}) - \Gamma_1^-\Gamma_2^+\Big]e^{i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}, \qquad \text{(C.92)} \\
C_{l_1-}^{+-,+}(t,s) &= \frac{\lambda^2}{\gamma_1\gamma_2}\Gamma_1^+\Gamma_2^-\Big[(1-e^{-\gamma_1 s})(1-e^{-\gamma_2 s})-1\Big]e^{-i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}, \qquad \text{(C.93)} \\
C_{l_1+}^{-+,-}(t,s) &= \frac{\lambda^2}{\gamma_1\gamma_2}\Big[(\Gamma_1^+ + \Gamma_1^- e^{-\gamma_1 s})(\Gamma_2^- + \Gamma_2^+ e^{-\gamma_2 s}) - \Gamma_1^+\Gamma_2^-\Big]e^{i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}, \qquad \text{(C.94)} \\
C_{l_1+}^{+-,-}(t,s) &= \frac{\lambda^2}{\gamma_1\gamma_2}\Gamma_1^-\Gamma_2^+\Big[(1-e^{-\gamma_1 s})(1-e^{-\gamma_2 s})-1\Big]e^{-i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}, \qquad \text{(C.95)} \\
C_{l_1-}^{-+,-}(t,s) &= \frac{\lambda^2}{\gamma_1\gamma_2}\Gamma_1^-\Gamma_2^+\Big[(1-e^{-\gamma_1 s})(1-e^{-\gamma_2 s})-1\Big]e^{i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}, \qquad \text{(C.96)} \\
C_{l_1-}^{+-,-}(t,s) &= \frac{\lambda^2}{\gamma_1\gamma_2}\Big[(\Gamma_1^+ + \Gamma_1^- e^{-\gamma_1 s})(\Gamma_2^- + \Gamma_2^+ e^{-\gamma_2 s}) - \Gamma_1^+\Gamma_2^-\Big]e^{-i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2} \qquad \text{(C.97)}
\end{aligned}
$$

を得る。なお、

$$
\begin{aligned}
D_{l_1+}^{-+}(t) &= \lambda^2\frac{\Gamma_1^+\Gamma_2^-}{\gamma_1\gamma_2}e^{i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}, \qquad \text{(C.98)} \\
D_{l_1+}^{+-}(t) &= \lambda^2\frac{\Gamma_1^-\Gamma_2^+}{\gamma_1\gamma_2}e^{-i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}, \qquad \text{(C.99)}
\end{aligned}
$$

$$D^{-+}_{l_1-}(t) = \lambda^2 \frac{\Gamma_1^- \Gamma_2^+}{\gamma_1\gamma_2} e^{i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2}, \tag{C.100}$$

$$D^{+-}_{l_1-}(t) = \lambda^2 \frac{\Gamma_1^+ \Gamma_2^-}{\gamma_1\gamma_2} e^{-i(\omega_1-\omega_2)t-(\gamma_1+\gamma_2)t/2} \tag{C.101}$$

である。

極限

$$\Gamma_1^- = \Gamma_2^- =: \Gamma \to \infty\,, \quad \lambda \to \infty\,, \quad \mu := \lambda/\Gamma = \text{fixed} \tag{C.102}$$

を考える。公式

$$be^{-b|t|} \to 2\delta(t) \tag{C.103}$$

より、

$$D^{-+}_{l_1+}(t) = 2\frac{\lambda^2\Gamma_1^+}{\Gamma^2}\delta(t), \tag{C.104}$$

$$D^{+-}_{l_1+}(t) = 2\frac{\lambda^2\Gamma_2^+}{\Gamma^2}\delta(t),, \tag{C.105}$$

$$D^{-+}_{l_1-}(t) = 2\frac{\lambda^2\Gamma_2^+}{\Gamma^2}\delta(t), \tag{C.106}$$

$$D^{+-}_{l_1-}(t) = 2\frac{\lambda^2\Gamma_1^+}{\Gamma^2}\delta(t) \tag{C.107}$$

となる。また、

$$C^{-+,+}_{l_1+}(t,s) = 0, \tag{C.108}$$

$$C^{+-,+}_{l_1+}(t,s) = 4\frac{\lambda^2}{\Gamma^2}\delta(s)\delta(t), \tag{C.109}$$

$$C^{-+,+}_{l_1-}(t,s) = 4\frac{\lambda^2}{\Gamma^2}\delta(s)\delta(t), \tag{C.110}$$

$$C^{+-,+}_{l_1-}(t,s) = 0, \tag{C.111}$$

$$C^{-+,-}_{l_1+}(t,s) = 4\frac{\lambda^2}{\Gamma^2}\delta(s)\delta(t), \tag{C.112}$$

$$C^{+-,-}_{l_1+}(t,s) = 0, \tag{C.113}$$

$$C^{-+,-}_{l_1-}(t,s) = 0, \tag{C.114}$$

$$C^{+-,-}_{l_1-}(t,s) = 4\frac{\lambda^2}{\Gamma^2}\delta(s)\delta(t) \tag{C.115}$$

となる。まとめると、

$$D^{k_1k_2}_{l_1l_2}(t) = 2\mu^2\Gamma^+_{\kappa(l_2k_2)}\delta_{k_1,-k_2}\delta(t)\,, \quad \kappa(+) := 1\,, \quad \kappa(-) = 2, \tag{C.116}$$

$$C^{k_1k_2,l_3k_3}_{l_1l_2}(t,s) = 4\mu^2\delta_{k_1,-k_2}\delta_{l_2k_2,-l_3k_3}\delta(t)\delta(s) \tag{C.117}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_S(t) &= \mathcal{L}_S\rho_S + \mu^2\sum_{l_0,l_1}\sum_{k_0,k_1}(-i)^{l_0+l_1}\delta_{k_0,-k_1}\Gamma^+_{\kappa(l_1k_1)}\mathcal{S}^{k_0}_{l_0}\mathcal{S}^{k_1}_{l_1}\rho_S(t)\\ &+\sum_{n=2}^{\infty}\mu^{2n}\sum_{l_1,\cdots,l_{2n}=\pm}\sum_{k_1,\cdots,k_{2n}}(-i)^{l_1+\cdots+l_{2n}}\Delta_n(\boldsymbol{l},\boldsymbol{k})\Gamma^+_{\kappa(l_{2n}k_{2n})}\mathcal{S}^{k_1}_{l_1}\cdots\mathcal{S}^{k_{2n}}_{l_{2n}}\rho_S(t)\end{aligned} \tag{C.118}$$

となる。ここで、

$$\Delta_n(\boldsymbol{l},\boldsymbol{k}) := \delta_{k_{2n-1},-k_{2n}} \prod_{j=1}^{n-1} \delta_{k_{2j-1},-k_{2j}} \delta_{l_{2j}k_{2j},-l_{2j+1}k_{2j+1}} \tag{C.119}$$

である。いま、

$$\mathcal{D}_n \bullet := \sum_{l_1,\cdots,l_{2n}=\pm} \sum_{k_1,\cdots,k_{2n}} (-i)^{l_1+\cdots+l_{2n}} \Delta_n(\boldsymbol{l},\boldsymbol{k}) \Gamma^+_{\kappa(l_{2n}k_{2n})} \mathcal{S}^{k_1}_{l_1} \cdots \mathcal{S}^{k_{2n}}_{l_{2n}} \bullet \tag{C.120}$$

と置くと、

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 \bullet &= \sum_{l_0,l_1} \sum_{k_0,k_1} (-i)^{l_0+l_1} \delta_{k_0,-k_1} \Gamma^+_{\kappa(l_1k_1)} \mathcal{S}^{k_0}_{l_0} \mathcal{S}^{k_1}_{l_1} \bullet \\
&= (-i)^{1+1} \Gamma^+_{\kappa(+)} \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_+ \bullet + (-i)^{1+1} \Gamma^+_{\kappa(-)} \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_+ \bullet \\
&\quad + (-i)^{-1+1} \Gamma^+_{\kappa(+)} \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_+ \bullet + (-i)^{-1+1} \Gamma^+_{\kappa(-)} \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^-_+ \bullet \\
&\quad + (-i)^{1-1} \Gamma^+_{\kappa(-)} \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_- \bullet + (-i)^{1-1} \Gamma^+_{\kappa(+)} \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_- \bullet \\
&\quad + (-i)^{-1-1} \Gamma^+_{\kappa(+)} \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^-_- \bullet + (-i)^{-1-1} \Gamma^+_{\kappa(-)} \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_- \bullet \\
&= -\Gamma^+_1 L L^\dagger \bullet - \Gamma^+_2 L^\dagger L \bullet + \Gamma^+_1 L^\dagger \bullet L + \Gamma^+_2 L \bullet L^\dagger \\
&\quad + \Gamma^+_2 L \bullet L^\dagger + \Gamma^+_1 L^\dagger \bullet L - \Gamma^+_1 \bullet L L^\dagger - \Gamma^+_2 \bullet L^\dagger L \\
&= 2\Gamma^+_2 \mathcal{D}[L](\bullet) + 2\Gamma^+_1 \mathcal{D}[L^\dagger](\bullet)
\end{aligned} \tag{C.121}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
\Delta_2(\boldsymbol{l},\boldsymbol{k}) &= \delta_{k_3,-k_4} \delta_{k_1,-k_2} \delta_{l_2k_2,-l_3k_3} \\
&= \delta_{k_3,-k_4} \delta_{k_1,-k_2} \delta_{l_2k_1,l_3k_3} \\
&= \delta_{k_3,-k_4} \delta_{k_2,-k_1} \delta_{k_1,-l_2l_3k_4}
\end{aligned} \tag{C.122}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_2 &= \sum_{l_1,l_2,l_3,l_4=\pm} \sum_{k_4=\pm} (-i)^{l_1+l_2+l_3+l_4} \Gamma^+_{\kappa(l_4k_4)} \mathcal{S}^{-l_2l_3k_4}_{l_1} \mathcal{S}^{l_2l_3k_4}_{l_2} \mathcal{S}^{-k_4}_{l_3} \mathcal{S}^{k_4}_{l_4} \\
&= \sum_{l_1,l_2,l_3,l_4=\pm} \sum_{l_5=\pm} (-i)^{l_1+l_2+l_3+l_4} \Gamma^+_{\kappa(l_5)} \mathcal{S}^{-l_2l_3l_4l_5}_{l_1} \mathcal{S}^{l_2l_3l_4l_5}_{l_2} \mathcal{S}^{-l_4l_5}_{l_3} \mathcal{S}^{l_4l_5}_{l_4} \\
&= \sum_{l_1,l_2,l_3,l_4=\pm} (-i)^{l_1+l_2+l_3+l_4} [\Gamma^+_1 \mathcal{S}^{-l_2l_3l_4}_{l_1} \mathcal{S}^{l_2l_3l_4}_{l_2} \mathcal{S}^{-l_4}_{l_3} \mathcal{S}^{l_4}_{l_4} + \Gamma^+_2 \mathcal{S}^{l_2l_3l_4}_{l_1} \mathcal{S}^{-l_2l_3l_4}_{l_2} \mathcal{S}^{l_4}_{l_3} \mathcal{S}^{-l_4}_{l_4}]
\end{aligned} \tag{C.123}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
&\sum_{l_1,l_2,l_3,l_4=\pm} (-i)^{l_1+l_2+l_3+l_4} \mathcal{S}^{-l_2l_3l_4}_{l_1} \mathcal{S}^{l_2l_3l_4}_{l_2} \mathcal{S}^{-l_4}_{l_3} \mathcal{S}^{l_4}_{l_4} \\
&= \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_+ - \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_- - \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_+ + \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^-_- \\
&\quad - \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_+ + \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_- + \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_+ - \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^-_- \\
&\quad - \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_+ + \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_- + \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_+ - \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^-_- \\
&\quad + \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_+ - \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_- - \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_+ + \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^-_- \\
&= \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_+ - 4\mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_- + 6\mathcal{S}^-_+ \mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^-_- - 4\mathcal{S}^+_+ \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^-_- + \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^-_- \mathcal{S}^+_- \mathcal{S}^-_-
\end{aligned} \tag{C.124}$$

である。同様にして (2.7) が得られるはずである (数値計算で $n = 6$ まで確かめた)。

参考文献

[1] Ken Funo and Akihito Ishizaki, "Dynamics of a Quantum System Interacting with White Non-Gaussian Baths: Poisson Noise Master Equation", Phys. Rev. Lett. **132**, 170402 (2024).

[2] A. Kiely, "Exact classical noise master equations:Applications and connections", Europhys. Lett. **134**, 10001 (2021).