$\sum_{k=1}^{n} x_k > 1$となる最小のnの期待値

中嶋 慧

平成 29 年 1 月 22 日

1 解

$x_1, x_2, \cdots$ はそれぞれ 0 から 1 の間で一様分布する。

$$X_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k > 1 \tag{1.1}$$

となる最小の n の期待を求める。

上の n が N である確率 P_N を求める。$\chi[X]$ を X が真なら 1, 偽なら 0 の関数とすると、

$$\begin{aligned} P_n &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_n \ \chi[X_{n-1} \leq 1]\chi[X_n > 1] \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_{n-1} \ \chi[X_{n-1} \leq 1] X_{n-1}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

よって、

$$P_{n+1} = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n \ \chi[X_n \leq 1] X_n. \tag{1.3}$$

今、

$$y_k = \sqrt{x_k} \tag{1.4}$$

とすると、$X_n = y_1^2 + \cdots + y_n^2$

$$P_{n+1} = \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_n \ 2^n y_1 y_2 \cdots y_n \chi[y_1^2 + \cdots + y_n^2 \leq 1](y_1^2 + \cdots + y_n^2). \tag{1.5}$$

今、

$$r^2 \stackrel{\text{def}}{=} y_1^2 + \cdots + y_n^2 \tag{1.6}$$

とすると、

$$\begin{aligned} y_1 &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdots \sin\theta_{n-2} \cos\theta_0, && (1.7) \\ y_2 &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdots \sin\theta_{n-2} \sin\theta_0, && (1.8) \\ y_3 &= r \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdots \sin\theta_{n-2}, && (1.9) \\ y_4 &= r \cos\theta_2 \sin\theta_3 \cdots \sin\theta_{n-2}, && (1.10) \\ y_5 &= r \cos\theta_3 \cdots \sin\theta_{n-2}, && (1.11) \\ \cdots & \\ y_{n-1} &= r \cos\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2}, && (1.12) \\ y_n &= r \cos\theta_{n-2}, && (1.13) \\ 0 \leq \theta_0 &\leq 2\pi, \ 0 \leq \theta_i \leq \pi \ (i = 1, \cdots, n-2). && (1.14) \end{aligned}$$

よって、

$$\prod_{k=1}^{n} y_k = r^n \prod_{i=0}^{n-2} \sin^{i+1}\theta_i \cos\theta_i. \tag{1.15}$$

また、

$$\prod_{k=1}^{n} dy_k = r^{n-1} dr d\theta_0 \prod_{i=1}^{n-2} \sin^i \theta_i d\theta_i. \tag{1.16}$$

$0 \leq y_k \leq 1$ かつ $r \leq 1$ は、

$$0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}\ (i = 0, 1, \cdots, n-2) \tag{1.17}$$

に対応する。よって、

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= 2^n \int_0^1 dr\ r^{2n+1} \prod_{i=0}^{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_i\ \sin^{2i+1}\theta_i \cos\theta_i \\ &= 2^n \int_0^1 dr\ r^{2n+1} \prod_{i=0}^{n-2} \int_0^1 dz_i\ z_i^{2i+1} \\ &= 2^n \frac{1}{2(n+1)} \prod_{i=0}^{n-2} \frac{1}{2(i+1)} \\ &= \frac{n}{(n+1)!} \quad (n = 1, 2, \cdots). \end{aligned} \tag{1.18}$$

つまり、

$$P_n = \frac{n-1}{n!} \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P_n &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} \\ &= \frac{d}{dx} \frac{e^x - 1 - x}{x}\Big|_{x=1} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{1.20}$$

また、

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=2}^{\infty} n P_n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \\ &= e. \end{aligned} \tag{1.21}$$

モーメント母関数は、

$$\begin{aligned} G(\chi) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle e^{in\chi} \rangle \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} e^{in\chi}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

今、

$$g(\chi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{in\chi} = \exp(e^{i\chi}) \tag{1.23}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\frac{g(\chi)}{e^{i\chi}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{i(n-1)\chi}, && (1.24)\\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!} e^{i(n-1)\chi} &= \frac{d}{d(i\chi)} \frac{g(\chi)}{e^{i\chi}} \\
&= g(\chi) - g(\chi) e^{-i\chi}, && (1.25)\\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!} e^{in\chi} &= g(\chi) e^{i\chi} - g(\chi), && (1.26)\\
G(\chi) &= g(\chi) e^{i\chi} - g(\chi) + 1 \\
&= \exp(e^{i\chi})(e^{i\chi} - 1) + 1. && (1.27)
\end{aligned}$$

よって、$G(0) = 1$ および、

$$\begin{aligned}
\langle n \rangle &= \frac{d}{d(i\chi)}\bigg|_{\chi=0} \exp(e^{i\chi})(e^{i\chi} - 1) \\
&= \left[\exp(e^{i\chi})(e^{2i\chi} - e^{i\chi}) + \exp(e^{i\chi}) e^{i\chi}\right]_{\chi=0} \\
&= e. && (1.28)
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
\langle n^2 \rangle &= \frac{d^2}{d(i\chi)^2}\bigg|_{\chi=0} \exp(e^{i\chi})(e^{i\chi} - 1) \\
&= \frac{d}{d(i\chi)}\bigg|_{\chi=0} \left[\exp(e^{i\chi}) e^{2i\chi}\right] \\
&= \left[\exp(e^{i\chi}) e^{3i\chi} + 2\exp(e^{i\chi}) e^{2i\chi}\right]_{\chi=0} \\
&= 3e. && (1.29)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} \\
&= \sqrt{(3-e)e} = 0.87509\cdots. && (1.30)
\end{aligned}$$

2 似た問題

$x_1, x_2, \cdots$ はそれぞれ 0 から 1 の間で一様分布する。

$$r_n^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 1 \tag{2.1}$$

となる最小の n の期待を求める。

上の n が N である確率 P_N を求める。

$$\begin{aligned} P_n &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_n \ \chi[r_{n-1}^2 \le 1]\chi[r_n^2 > 1] \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_{n-1} \ \chi[r_{n-1}^2 \le 1] \int_0^1 dx_n \ \chi[1 - r_{n-1}^2 \le x_n^2 \le 1] \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_{n-1} \ \chi[r_{n-1}^2 \le 1](1 - \sqrt{1 - r_{n-1}^2}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

よって、

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_{n-1} \ \chi[r_n^2 \le 1](1 - \sqrt{1 - r_n^2}) \\ &= \int_0^1 dr \ r^{n-1}(1 - \sqrt{1 - r^2}) \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_0 \prod_{i=1}^{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_i \ \sin^i \theta_i. \end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで、

$$\int_0^1 dr \ r^{n-1}(1 - \sqrt{1 - r^2}) = \frac{1}{n} - \int_0^1 dr \ r^{n-1}\sqrt{1 - r^2}. \tag{2.4}$$

$r = \sin\theta$ とすると、$dr = \cos\theta d\theta$, $\sqrt{1 - r^2} = \cos\theta$ なので、

$$\begin{aligned} \int_0^1 dr \ r^{n-1}\sqrt{1 - r^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \ \sin^{n-1}\theta\cos^2\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \ (\sin^{n-1}\theta - \sin^{n+1}\theta) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big[\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma([n-1]/2+1)} - \frac{\Gamma(n/2+1)}{\Gamma([n+1]/2+1)}\Big] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma([n+1]/2)}\Big[1 - \frac{n}{n+1}\Big] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma([n+1]/2)}\frac{1}{n+1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \ \sin^n\theta \ = \ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(n/2+1/2)}{\Gamma(n/2+1)} \tag{2.6}$$

を用いた。また、

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_i \ \sin^i\theta_i &= \prod_{i=1}^{n-2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(i/2+1/2)}{\Gamma(i/2+1)} \\ &= \frac{\pi^{n/2-1}}{2^{n-2}}\frac{1}{\Gamma(n/2)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

よって、

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \Big[\frac{1}{n} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma([n+1]/2)}\frac{1}{n+1}\Big]\frac{\pi^{n/2}}{2^{n-1}}\frac{1}{\Gamma(n/2)} \\ &= \Big[\frac{\pi^{n/2}}{2^{n-1}}\frac{1}{n\Gamma(n/2)} - \frac{\pi^{n/2+1/2}}{2^n}\frac{1}{(n+1)\Gamma([n+1]/2)}\Big] \\ &= \Big[\frac{\pi^{n/2}}{2^n}\frac{1}{\Gamma(n/2+1)} - \frac{\pi^{n/2+1/2}}{2^{n+1}}\frac{1}{\Gamma([n+1]/2+1)}\Big] \ (n = 1, 2, \cdots). \end{aligned} \tag{2.8}$$

また、$P_1 = 0$. 今、

$$q_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi^{n/2}}{2^n}\frac{1}{\Gamma(n/2+1)} \tag{2.9}$$

とすると、

$$P_n = q_{n-1} - q_n. \tag{2.10}$$

よって、

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_n = q_1 = \frac{\pi^{1/2}}{2}\frac{1}{\Gamma(3/2)} = \pi^{1/2}\frac{1}{\Gamma(1/2)} = 1. \tag{2.11}$$

Mathematica によると、

$$\langle n \rangle = e^{\frac{\pi}{4}}(1 + \mathrm{Erf}(\frac{\sqrt{\pi}}{2})) = 3.92577. \tag{2.12}$$

ここで、

$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x dt\ e^{-t^2}. \tag{2.13}$$

また、

$$\sigma = 1.68738. \tag{2.14}$$