

# 確率微分方程式の弱近似

中嶋 慧

2024年1月15日 (改訂: May 3, 2025)

## Abstract

本記事では確率微分方程式の2次の弱近似である Platen 法を解説する。確率微分方程式

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t \quad (0.1)$$

を以下のように数値的に解く方法が Platen 法である：

$$\begin{aligned} Y_{n+1} = & Y_n + \frac{1}{2}(a(\tilde{Y}_n) + a(Y_n))\Delta t \\ & + \frac{1}{4}[b(Y_n^+) + b(Y_n^-) + 2b(Y_n)]\Delta W_n \\ & + \frac{1}{4}[b(Y_n^+) - b(Y_n^-)][(\Delta W_n)^2 - \Delta t](\Delta t)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (0.2)$$

$$\tilde{Y}_n := Y_n + a(Y_n)\Delta t + b(Y_n)\Delta W_n, \quad (0.3)$$

$$Y_n^\pm := Y_n + a(Y_n)\Delta t \pm b(Y_n)\sqrt{\Delta t}. \quad (0.4)$$

$\Delta W_n$  はガウス分布  $N(0, \Delta t)$  に従って独立に選ぶ。このとき、 $g(x) \in C_p^6$  に対して、

$$|E(g(Y_N)) - E(g(X_{\Delta N}))| = O((\Delta t)^2) \quad (0.5)$$

である。ここで、 $C_p^n$  の元  $g$  は  $n$  階連続微分可能であり、 $g$  とその導関数が高々多項式的に増加する。

## Contents

1	伊藤テーラー展開	2
1.1	多重インデックスと多重伊藤積分	2
2	モーメント条件	5
3	Platen 法	7
4	弱近似	8
5	ある伊藤積分	9

文献 [1] を参考に Platen 法を解説する。

## 1 伊藤テーラー展開

$X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$  が確率微分方程式

$$dX_t^k = a^k(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^m b^{k,j}(t, X_t)dW_t^j \quad (k = 1, \dots, d) \quad (1.1)$$

に従うとする。 $W_t^j$  は Wiener 過程である。このとき、伊藤公式は以下で与えられる：

$$f(\tau, X_\tau) = f(\rho, X_\rho) + \int_\rho^\tau dt L^0 f(t, X_t) + \sum_{j=1}^m \int_\rho^\tau dt L^j f(t, X_t) dW_t^j, \quad (1.2)$$

$$L^0 := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d a^k \frac{\partial}{\partial X^k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \sum_{j=1}^m b^{k,j} b^{l,j} \frac{\partial^2}{\partial X^k \partial X^l}, \quad (1.3)$$

$$L^j := \sum_{k=1}^d b^{k,j} \frac{\partial}{\partial X^k}. \quad (1.4)$$

以下では次の公式を解説する：

—— 伊藤テーラー展開 ——

$$f(\tau, X_\tau) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha[f_\alpha(\rho, X_\rho)]_{\rho, \tau} + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A})} I_\alpha[f_\alpha(\bullet, X_\bullet)]_{\rho, \tau}. \quad (1.5)$$

### 1.1 多重インデックスと多重伊藤積分

$$\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l) \quad (j_i = 0, 1, \dots, m) \quad (1.6)$$

を多重インデックスという。その長さを

$$l(\alpha) := l \quad (1.7)$$

とする。 $v$  を長さ 0 の多重インデックスとする： $l(v) := 0$ 。全ての多重インデックスの集合を  $\mathcal{M}$  とする。 $l(\alpha) \geq 0$  の  $\alpha \in \mathcal{M}$  に対して、最初のインデックスを除いたものを  $\alpha-$ 、最後のインデックスを除いたものを  $\alpha-$  とする。例えば、

$$\begin{aligned} -(1) &= v = (1)-, \\ -(1, 0) &= (0), \quad (1, 0)- = (1) \\ -(0, 1, 2) &= (1, 2), \quad (0, 1, 2)- = (0, 1) \end{aligned}$$

である。2つの多重インデックス  $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_k)$  と  $\alpha' = (j'_1, j'_2, \dots, j'_l)$  に対して、

$$\alpha * \alpha' := (j_1, j_2, \dots, j_k, j'_1, j'_2, \dots, j'_l) \quad (1.8)$$

とする。

多重伊藤積分を定義する。  $v$  に対して、

$$I_v[f(\bullet, X_\bullet)]_{\rho, \tau} := f(\tau), \quad (1.9)$$

$$I_v[f(t, X_t)]_{\rho, \tau} := f(t) \quad (1.10)$$

とし、  $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l)$ ,  $l \geq 1$  に対して、

$$I_\alpha[f(\bullet, X_\bullet)]_{\rho, \tau} := \int_\rho^\tau dW_s^{j_l} I_{\alpha-}[f(\bullet, X_\bullet)]_{\rho, s}, \quad (1.11)$$

$$I_\alpha[f(t, X_t)]_{\rho, \tau} := \int_\rho^\tau dW_s^{j_l} I_{\alpha-}[f(t, X_t)]_{\rho, s} \quad (1.12)$$

とする。ただし、

$$dW_s^0 := ds \quad (1.13)$$

とする。例えば、

$$I_{(0,2,1)}[f(\bullet, X_\bullet)]_{\rho, \tau} = \int_\rho^\tau dW_{s_3}^1 \int_\rho^{s_3} dW_{s_2}^2 \int_\rho^{s_2} ds_1 f(s_1), \quad (1.14)$$

$$I_{(0,2,1)}[f(t, X_t)]_{\rho, \tau} = f(t, X_t) I_{(0,2,1)}, \quad (1.15)$$

$$I_{(0,2,1)} = \int_\rho^\tau dW_{s_3}^1 \int_\rho^{s_3} dW_{s_2}^2 \int_\rho^{s_2} ds_1 \quad (1.16)$$

である。一般に、

$$I_\alpha := I_\alpha[1]_{\rho, \tau} \quad (1.17)$$

とする。伊藤公式 (1.2) は、

$$\begin{aligned} f(\tau, X_\tau) &= f(\rho, X_\rho) + \sum_{j=1}^m I_{(j)}[L^j f(\bullet, X_\bullet)]_{\rho, \tau} \\ &= I_v[f_v(\rho, X_\rho)]_{\rho, \tau} + \sum_{j=1}^m I_{(j)}[f_{(j)}(\bullet, X_\bullet)]_{\rho, \tau} \end{aligned} \quad (1.18)$$

と書ける。ここで、  $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l)$ ,  $l \geq 1$  に対して、

$$f_\alpha := L^{j_1} f_{-\alpha} \quad (1.19)$$

であり、

$$f_v := f \quad (1.20)$$

である。

$\alpha, \alpha' \in \mathcal{M}$  の対して、以下の公式が成り立つ：

$$I_\alpha[f_{\alpha'}(\bullet, X_\bullet)]_{\rho, \tau} = I_\alpha[f_{\alpha'}(\rho, X_\rho)]_{\rho, \tau} + \sum_{j=0}^m I_{(j)*\alpha}[f_{(j)*\alpha'}(\bullet, X_\bullet)]_{\rho, \tau}. \quad (1.21)$$

(1.18), (1.21) より (1.5) が従う。ただし、 $\mathcal{A}$  は  $\mathcal{M}$  の (空でない) 部分集合であり、

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} l(\alpha) < \infty, \quad (1.22)$$

$$-\alpha \in \mathcal{A} \text{ for } \forall \alpha \in \mathcal{A} \setminus \{v\} \quad (1.23)$$

である。また、

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) := \{\alpha \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A} \mid -\alpha \in \mathcal{A}\} \quad (1.24)$$

である。特に  $\mathcal{A}$  として、

$$\Gamma_\beta := \{\alpha \in \mathcal{M} \mid l(\alpha) \leq \beta\} \quad (1.25)$$

が取れる。

なお、 $f(t, X) = X^k$  に対して、

$$f_{(0)} = a^k, \quad (1.26)$$

$$f_{(j)} = b^{k,j}, \quad (1.27)$$

$$f_{(0,0)} = L^0 a^k, \quad (1.28)$$

$$f_{(0,j)} = L^0 b^{k,j}, \quad (1.29)$$

$$f_{(j,0)} = L^j a^k, \quad (1.30)$$

$$f_{(j_1, j_2)} = L^{j_1} b^{k, j_2} \quad (1.31)$$

であるから、 $\mathcal{A} = \Gamma_2$  に対する (1.5) より、

$$\begin{aligned} X_\tau^k &= X_\rho^k + a^k I_{(0)} + \sum_{j=1}^m b^{k,j} I_{(j)} + L^0 a^k I_{(0,0)} \\ &+ \sum_{j=1}^m L^0 b^{k,j} I_{(0,j)} + \sum_{j=1}^m L^j a^k I_{(j,0)} + \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} I_{(j_1, j_2)} \\ &+ R \end{aligned} \quad (1.32)$$

となる。ここで、

$$R = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\Gamma_2)} I_\alpha[f_\alpha(\bullet, X_\bullet)]_{\rho, \tau} \quad (1.33)$$

は補正項である。特に、

$$dX_t^k = a^k(t, X_t)dt + b^k(t, X_t)dW_t \quad (1.34)$$

に対しては、

$$\begin{aligned}
X_\tau^k &= X_\rho^k + a^k I_{(0)} + b^k I_{(1)} + \left( \partial_t a^k + \sum_l a^l \partial_l a^k + \frac{1}{2} \sum_{l,m} b^l b^m \partial_l \partial_m a^k \right) I_{(0,0)} \\
&\quad + \left( \partial_t b^k + \sum_l a^l \partial_l b^k + \frac{1}{2} \sum_{l,m} b^l b^m \partial_l \partial_m b^k \right) I_{(0,1)} + \sum_l b^l \partial_l a^k I_{(1,0)} + \sum_l b^l \partial_l b^k I_{(1,1)} + R
\end{aligned} \tag{1.35}$$

となる。

## 2 モーメント条件

$$E(I_{\alpha_1} \cdots I_{\alpha_l}) := E\left(\prod_{k=1}^l I_{\alpha_k} \middle| \mathcal{A}_\rho\right), \quad \Delta := \tau - \rho \tag{2.1}$$

と置く (ここで  $\mathcal{A}_\rho$  は時刻  $\rho$  までの確率過程である)。このとき、

$$E(I_{(j)}) = 0, \tag{2.2}$$

$$E(I_{(0)}) = \Delta, \tag{2.3}$$

$$E(I_{(0,0)}) = \frac{1}{2} \Delta^2, \tag{2.4}$$

$$E(I_{(j_1)} I_{(j_2)}) = \Delta \delta_{j_1 j_2}, \tag{2.5}$$

$$E(I_{(j_1)} I_{(0, j_2)}) = \frac{1}{2} \Delta^2 \delta_{j_1 j_2} = E(I_{(j_1)} I_{(j_2, 0)}) \tag{2.6}$$

などである。 $\alpha$  の中の 0 の数を  $l_0(\alpha)$  とし、 $l_{>}(\alpha) := l(\alpha) - l_0(\alpha)$  とすると、

$$E(I_{\alpha_1} \cdots I_{\alpha_l}) = O(\Delta^\kappa), \quad \kappa = \sum_{k=1}^l \left[ \frac{1}{2} l_{>}(\alpha_k) + l_0(\alpha_k) \right] \tag{2.7}$$

である。

さて、確率変数  $\hat{I}_\alpha$  を導入し、

—— モーメント条件 ——

$$E(I_{\alpha_1} \cdots I_{\alpha_l}) - E(\hat{I}_{\alpha_1} \cdots \hat{I}_{\alpha_l}) = O(\Delta^{\beta+1}) \quad (l = 1, \dots, 2\beta + 1) \tag{2.8}$$

を  $\alpha_k \in \Gamma_\beta \setminus \{v\}$  に付いて課す。これをモーメント条件という。

$$U_\beta^k(\tau) := \sum_{\alpha \in \Gamma_\beta} f_\alpha^k(\rho, X_\rho) \hat{I}_\alpha, \quad f^k(t, X) := X^k \quad (2.9)$$

とする。任意の  $a^k, b^{k,j} \in C_P^{2(\beta+1)}$  であり、どちらも高々線形的に増加し、モーメント条件が成り立つとき、任意の  $g \in C_P^{2(\beta+1)}$  に対して、

$$E(g(X_\tau) - g(U_\beta(\tau)) | \mathcal{A}_\rho) = O(\Delta^{\beta+1}) \quad (2.10)$$

である。ここで、 $C_P^n$  の元  $g$  (ただし、 $g(X) \in \mathbb{R}$ ) は  $n$  階連続微分可能であり、 $g$  とその導関数が高々多項式的に増加する。また、 $X_t$  は時刻  $\rho$  で  $X_\rho$  からスタートとしたときの確率微分方程式の解である (これを  $X_t^{\rho, X_\rho}$  と書く)。

$\beta = 2$  に対して、以下のようにするとモーメント条件が成立する：

$$\hat{I}_{(j)} = \Delta \hat{W}^j, \quad (2.11)$$

$$\hat{I}_{(0,j)} = \Delta \hat{W}^j \Delta = \hat{I}_{(j,0)}, \quad (2.12)$$

$$\hat{I}_{(j_1, j_2)} = \frac{1}{2} (\Delta \hat{W}^{j_1} \Delta \hat{W}^{j_2} + V_{j_1 j_2}). \quad (2.13)$$

ここで  $\Delta \hat{W}^j$  は独立にガウス分布  $N(0, \Delta)$  から選ぶ。  $V_{j_1 j_2}$  は 2 値のランダム変数で、

$$P(V_{j_1 j_2} = \pm \Delta) = \frac{1}{2} \quad (j_2 = 1, \dots, j_1 - 1), \quad (2.14)$$

$$V_{jj} = -\Delta, \quad (2.15)$$

$$V_{j_2 j_1} = -V_{j_1 j_2} \quad (j_2 = j_1 + 1, \dots, m) \quad (2.16)$$

である。

これを (1.32), (1.35) に代入して、

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k &= Y_n^k + a^k \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j + \frac{1}{2} L^0 a^k \Delta^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (L^0 b^{k,j} + L^j a^k) \Delta W \Delta \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} \left( (\Delta W^{j_1} \Delta W^{j_2} + V_{j_1 j_2}) \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

および、

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k &= Y_n^k + a^k \Delta + b^k \Delta W + \frac{1}{2} \left( \partial_t a^k + \sum_l a^l \partial_l a^k + \frac{1}{2} \sum_{l,m} b^l b^m \partial_l \partial_m a^k \right) \Delta^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \partial_t b^k + \sum_l a^l \partial_l b^k + \frac{1}{2} \sum_{l,m} b^l b^m \partial_l \partial_m b^k + \sum_l b^l \partial_l a^k \right) \Delta W \Delta \\ &\quad + \sum_l b^l \partial_l b^k [(\Delta W)^2 - \Delta] \end{aligned} \quad (2.18)$$

を得る。ただし、時間を間隔  $\Delta$  で離散化した。

### 3 Platen 法

確率微分方程式

$$dX_t^k = a^k(t, X_t)dt + b^k(t, X_t)dW_t \quad (3.1)$$

に対して、

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k &= Y_n^k + \frac{1}{2}(a^k(t_{n+1}, \tilde{Y}_n) + a^k(t_n, Y_n))\Delta \\ &\quad + \frac{1}{4}[b^k(t_{n+1}, Y_n^+) + b^k(t_{n+1}, Y_n^-) + 2b^k(t_n, Y_n)]\Delta W_n \\ &\quad + \frac{1}{4}[b^k(t_n, Y_n^+) - b^k(t_n, Y_n^-)][(\Delta W_n)^2 - \Delta]\Delta^{-1/2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\tilde{Y}_n^k := Y_n^k + a^k(t_n, Y_n)\Delta + b^k(t_n, Y_n)\Delta W_n, \quad (3.3)$$

$$Y_n^{\pm, k} := Y_n^k + a^k(t_n, Y_n)\Delta \pm b^k(t_n, Y_n)\sqrt{\Delta} \quad (3.4)$$

とする。これを Platen 法という。(3.2) を

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + \gamma_n^k + \varepsilon_n^k + \theta_n^k, \quad (3.5)$$

$$\gamma_n^k := \frac{1}{2}(a^k(t_{n+1}, \tilde{Y}_n) + a^k(t_n, Y_n))\Delta, \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_n^k := \frac{1}{4}[b^k(t_{n+1}, Y_n^+) + b^k(t_{n+1}, Y_n^-) + 2b^k(t_n, Y_n)]\Delta W_n, \quad (3.7)$$

$$\theta_n^k := \frac{1}{4}[b^k(t_n, Y_n^+) - b^k(t_n, Y_n^-)][(\Delta W_n)^2 - \Delta]\Delta^{-1/2} \quad (3.8)$$

と置く。このとき、

$$\begin{aligned} \gamma_n^k &= a^k\Delta + \frac{1}{2}\partial_t a^k\Delta^2 + \frac{1}{2}\sum_l a^l\partial_l a^k\Delta^2 + \frac{1}{2}\sum_l b^l\partial_l a^k\Delta W_n\Delta \\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_{l,m} b^l b^m \partial_l \partial_m a^k (\Delta W_n)^2 \Delta + \delta\gamma_n^k, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^k &= b^k\Delta W_n + \frac{1}{2}\partial_t b^k\Delta W_n\Delta + \frac{1}{2}a^l\partial_l b^k\Delta W_n\Delta \\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_{l,m} b^l b^m \partial_l \partial_m b^k \Delta W_n \Delta + \delta\varepsilon_n^k, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\theta_n^k = \frac{1}{2}\sum_l b^l\partial_l b^k[(\Delta W_n)^2 - \Delta] + \delta\theta_n^k \quad (3.11)$$

である。よって、

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k &= Y_n^k + a^k\Delta + b^k\Delta W_n + \frac{1}{2}\left(\partial_t a^k + \sum_l a^l\partial_l a^k\right)\Delta^2 + \frac{1}{4}\sum_{l,m} b^l b^m \partial_l \partial_m a^k (\Delta W_n)^2 \Delta \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\partial_t b^k + \sum_l a^l\partial_l b^k + \frac{1}{2}\sum_{l,m} b^l b^m \partial_l \partial_m b^k + \sum_l b^l\partial_l a^k\right)\Delta W_n\Delta \\ &\quad + \sum_l b^l\partial_l b^k[(\Delta W_n)^2 - \Delta] + R_n, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$R_n := \delta\gamma_n^k + \delta\varepsilon_n^k + \delta\theta_n^k \quad (3.13)$$

となる。

確率微分方程式

$$dX_t^k = a^k(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^m b^{k,j}(t, X_t)dW_t^j \quad (k = 1, \dots, d) \quad (3.14)$$

の場合は、

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k &= Y_n^k + \frac{1}{2}(a^k(t_{n+1}, \tilde{Y}_n) + a^k(t_n, Y_n))\Delta \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \left( [b^{k,j}(t_{n+1}, R_+^j) + b^{k,j}(t_{n+1}, R_-^j) + 2b^{k,j}(t_n, Y_n)] \right. \\ &+ \left. \sum_{r(\neq j)} [b^{k,j}(t_n, U_+^r) + b^{k,j}(t_n, U_-^r) - 2b^{k,j}(t_n, Y_n)] \right) \Delta W_n^j \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \left( [b^{k,j}(t_n, R_+^j) - b^{k,j}(t_n, R_-^j)] [(\Delta W_n^j)^2 - \Delta] \right. \\ &+ \left. \sum_{r(\neq j)} [b^{k,j}(t_n, U_+^r) - b^{k,j}(t_n, U_-^r)] [\Delta W_n^j \Delta W_n^r + V_{rj}] \right) \Delta^{-1/2}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

とする<sup>1)</sup>。ここで、

$$\tilde{Y}_n^k := Y_n^k + a^k(t_n, Y_n)\Delta + \sum_j b^{k,j}(t_n, Y_n)\Delta W_n^j, \quad (3.16)$$

$$(R_{\pm}^j)^k := Y_n^k + a^k(t_n, Y_n)\Delta \pm b^{k,j}(t_n, Y_n)\sqrt{\Delta}, \quad (3.17)$$

$$(U_{\pm}^r)^k := Y_n^k \pm b^{k,r}(t_n, Y_n)\sqrt{\Delta} \quad (3.18)$$

である。

## 4 弱近似

定義：弱近似

任意の  $g \in C_P^{2(\beta+1)}$  に対して、

$$E(g(X_{N\Delta})) - E(g(Y_N)) = O(\Delta^\beta) \quad (4.1)$$

のとき、近似解  $Y_n$  は  $\beta$  次の弱近似という。

<sup>1)</sup>文献 [1] では  $b^{k,j}(t, X_t)$  が  $t$  に陽に依存しない場合が扱われていた。 $t$  依存性は間違っているかもしれない。

任意の  $a^k, b^{k,j} \in C_P^{2(\beta+1)}$  であり、どちらも高々線形的に増加するとする。このとき、条件

$$E\left(\prod_{h=1}^l (Y_{n+1}^{p_h} - Y_n^{p_h}) - \prod_{h=1}^l \delta Y_n^{p_h} | \mathcal{A}_{t_n}\right) = O(\Delta^{\beta+1}), \quad (4.2)$$

$$\delta Y_n^{p_h} := \sum_{\alpha \in \Gamma_\beta \setminus \{v\}} f_\alpha^{p_h}(t_n, Y_n) I_{\alpha, t_n, t_{n+1}}, \quad (4.3)$$

$$f^p(t, X) := X^p \quad (4.4)$$

が全ての  $n$  と  $(p_1, \dots, p_l) \in \{1, \dots, d\}^l$ ,  $l = 1, \dots, 2\beta + 1$  に対して満たされるなら、 $Y_n$  は  $\beta$  次の弱近似である。 $I_{\alpha, t_n, t_{n+1}}$  は以前の  $I_\alpha$  で  $\rho \rightarrow t_n$ ,  $\tau \rightarrow t_{n+1}$  としたものである。

(4.2) は、モーメント条件を満たす  $\hat{I}_{\alpha, t_n, t_{n+1}}$  を用いた

$$Y_{n+1}^k = \sum_{\alpha \in \Gamma_\beta} f_\alpha^k(t_n, Y_n) \hat{I}_{\alpha, t_n, t_{n+1}} \quad (4.5)$$

については成り立つ。また、プラテン法 (3.2), (3.15) は、 $\beta = 2$  に対して (4.2) を満たす。よってプラテン法は 2 次の弱近似である。

## 5 ある伊藤積分

確率微分方程式

$$dX_t^k = a^k(X_t, t) + \sum_{j=1}^m b^{k,j}(X_t, t) dW_t^j \quad (5.1)$$

に従う系に置いて、以下の  $S_\tau^\alpha$  を求めたい：

$$S_\tau^\alpha := E[Z_\tau^\alpha], \quad (5.2)$$

$$Z_\tau^\alpha := \int_0^\tau \sum_{j=1}^m c^{\alpha,j}(X_t, t) dW_t^j. \quad (5.3)$$

このとき、

$$dZ_t^\alpha = \sum_{j=1}^m c^{\alpha,j}(X_t, t) dW_t^j \quad (5.4)$$

であるから (本当?)、(5.1) と (5.4) とを連立して Platen 法で解いて、 $S_\tau^\alpha$  を求めればよい。

## References

- [1] Peter E. Kloeden and Eckhard Platen, “Numerical Solution of Stochastic Differential Equations”, Springer, 1992.