パフィアンと正準変換

中嶋 慧

December 1, 2021

1 パフィアンの定義

$2n$ 次の反対称行列 $\Omega = (\Omega_{ij})$ を考える。$\{\theta^i\}_{i=1}^{2n}$ を線形独立な 1 形式とし、

$$\eta := \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \cdots \wedge \theta^{2n} \tag{1.1}$$

とする。2 形式

$$\omega := \sum_{i<j} \Omega_{ij}\theta^i \wedge \theta^j \tag{1.2}$$

に対して、

$$\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega = n!\mathrm{Pf}(\Omega)\eta \tag{1.3}$$

で行列 Ω のパフィアン $\mathrm{Pf}(\Omega)$ を定義する。

2 $\mathrm{Pf}({}^tM\Omega M) = \det(M)\mathrm{Pf}(\Omega)$

$M = (M^i{}_j)$ を $2n$ 次の行列とし、

$$\tilde{\theta}^i := M^i{}_j\theta^j, \tag{2.1}$$

$$\tilde{\eta} := \tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\theta}^2 \wedge \cdots \wedge \tilde{\theta}^{2n}, \tag{2.2}$$

$$\tilde{\omega} := \sum_{i<j} \Omega_{ij}\tilde{\theta}^i \wedge \tilde{\theta}^j \tag{2.3}$$

とすると、行列式の性質より、

$$\tilde{\eta} = \det(M)\eta \tag{2.4}$$

である。また、

$$\tilde{\omega} = \sum_{i<j} \tilde{\Omega}_{ij}\theta^i \wedge \theta^j, \quad \tilde{\Omega} := {}^tM\Omega M \tag{2.5}$$

なので、

$$\mathrm{Pf}(\tilde{\Omega}) = \mathrm{Pf}({}^t M \Omega M) = \det(M)\mathrm{Pf}(\Omega) \tag{2.6}$$

を得る。

特に、$\tilde{\Omega} = \Omega$ なら $\det(M) = 1$ である。

正準変換では、$J = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix}$ に対して、${}^t MJM = J$ を満たす行列 M が現れる。これは $\det(M) = 1$ を満たす。