Parametrized post newtonian(PPN) 展開：入門

中嶋 慧

November 16, 2019

Abstract

この記事では、ポスト・ニュートン近似と Parametrized post newtonian 展開についてまとめる。

Contents

1 ポスト・ニュートン近似

このノートでは $c = 1$ とする。

1.1 方針

質点の運動方程式は、

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \tag{1.1}$$

である。ここで、τ は固有時であり、

$$
\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} := g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\sigma\mu\nu}, \tag{1.2}
$$

$$
\Gamma_{\lambda\mu\nu} := \frac{1}{2}\big[-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu}\big] \tag{1.3}
$$

である。非相対論的場合は、重力ポテンシャル U と $v^2 := \sum_{i=1}^{3}(dx^i/dt)^2$ は同程度

$$
v^2 \sim U(= GM/r) \tag{1.4}
$$

の大きさである。ここで、r は半径で M は質量, G は重力定数である。そこで、

$$
\varepsilon := v^2 \sim U \tag{1.5}
$$

とする。量 X のうち、ε^n の大きさの部分を ${}^{(n)}X$ と書く。また、$v^i := dx^i/dt$ とする。
(1.1) は ε の 1 次の近似で、

$$
\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -{}^{(1)}\Gamma^i_{00} \approx \frac{1}{2}\partial_i{}^{(1)}g_{00} = \partial_i U \tag{1.6}
$$

となる。ここで、

$$
{}^{(1)}g_{00} = 2U \tag{1.7}
$$

である。(1.1) を ε^2 まで考えよう。これをポスト・ニュートン近似という。
さて、

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x^i}{dt^2} &= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}\frac{d}{d\tau}\left[\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}\frac{dx^i}{d\tau}\right] \\
&= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-2}\frac{d^2x^i}{d\tau^2} - \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-3}\frac{d^2t}{d\tau^2}\frac{dx^i}{d\tau}
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

であり、これに (1.1) を代入して、

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x^i}{dt^2} &= -\Gamma^i{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} + \Gamma^0{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^i}{dt} \\
&= -\Gamma^i{}_{00} - 2\Gamma^i{}_{0k}\frac{dx^k}{dt} - \Gamma^i{}_{kl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} \\
&\quad + \left[\Gamma^0{}_{00} + 2\Gamma^0{}_{0k}\frac{dx^k}{dt} + \Gamma^0{}_{kl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}\right]\frac{dx^i}{dt}
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

を得る。よって、ε^2 までの近似では、

$$
\Gamma^i{}_{00} \approx {}^{(1)}\Gamma^i{}_{00} + {}^{(2)}\Gamma^i{}_{00}, \tag{1.10}
$$

$$
\Gamma^i{}_{0k} \approx {}^{(1.5)}\Gamma^i{}_{0k}, \tag{1.11}
$$

$$
\Gamma^i{}_{kl} \approx {}^{(1)}\Gamma^i{}_{kl}, \tag{1.12}
$$

$$
\Gamma^0{}_{00} \approx {}^{(1.5)}\Gamma^0{}_{00}, \tag{1.13}
$$

$$
\Gamma^0{}_{0k} \approx {}^{(1)}\Gamma^0{}_{0k}, \tag{1.14}
$$

$$
\Gamma^0{}_{kl} \approx 0 \tag{1.15}
$$

と近似する必要がある。なお、一般には、

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = {}^{(1)}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + {}^{(2)}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + {}^{(3)}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \cdots \quad (\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{i}{}_{kl}, \Gamma^{i}{}_{00}, \Gamma^{0}{}_{0k}), \tag{1.16}$$

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = {}^{(1.5)}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + {}^{(2.5)}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + {}^{(3.5)}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \cdots \quad (\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{i}{}_{0k}, \Gamma^{0}{}_{00}, \Gamma^{0}{}_{kl}) \tag{1.17}$$

である。ポスト・ニュートン近似では、

$$\begin{aligned}\frac{dx^i}{dt^2} &\approx \partial_i U - {}^{(2)}\Gamma^{i}{}_{00} - 2\cdot {}^{(1.5)}\Gamma^{i}{}_{0k}\frac{dx^k}{dt} - {}^{(1)}\Gamma^{i}{}_{kl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} \\ &+\left[{}^{(1.5)}\Gamma^{0}{}_{00} + 2\cdot {}^{(1)}\Gamma^{0}{}_{0k}\frac{dx^k}{dt}\right]\frac{dx^i}{dt}\end{aligned} \tag{1.18}$$

となる。

さて、計量の展開は、

$$g_{00} = -1 + 2U + {}^{(2)}g_{00} + \cdots \quad ({}^{(1)}g_{00} = 2U), \tag{1.19}$$

$$g_{ik} = \delta_{ik} + {}^{(1)}g_{ik} + {}^{(2)}g_{ik} + \cdots, \tag{1.20}$$

$$g_{0k} = {}^{(1.5)}g_{0k} + {}^{(2.5)}g_{0k} + \cdots \tag{1.21}$$

となる。g_{0k} は時間反転で符号を変えるべきなので、v^k の奇数べきである。また、$g^{\mu\nu}$ の展開は、

$$g^{00} = -1 - {}^{(1)}g_{00} + \cdots \quad , \tag{1.22}$$

$$g^{ik} = \delta_{ik} - {}^{(1)}g_{ik} + \cdots, \tag{1.23}$$

$$g^{0k} = {}^{(1.5)}g_{0k} + \cdots \tag{1.24}$$

となる。一般に、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} := \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \tag{1.25}$$

とすると、

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu}{}_{\lambda}h^{\lambda\nu} \tag{1.26}$$

である。$h_{\mu\nu}$ の添え字は、$\eta^{\mu\nu}$ で上げた。この式より、例えば、

$$g^{0k} = -\eta^{00}\cdot {}^{(1.5)}g_{0k} + \cdots = {}^{(1.5)}g_{0k} + \cdots$$

を得る。

これより、$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ として以下の表式を得る：

$${}^{(1)}\Gamma^{i}{}_{00} = -\frac{1}{2}\partial_i {}^{(1)}g_{00}, \tag{1.27}$$

$${}^{(2)}\Gamma^{i}{}_{00} = -\frac{1}{2}\partial_i {}^{(2)}g_{00} + \partial_0 {}^{(1.5)}g_{0i} + \frac{1}{2}{}^{(1)}g_{ik}\partial_k {}^{(1)}g_{00}, \tag{1.28}$$

$${}^{(1.5)}\Gamma^{i}{}_{0k} = \frac{1}{2}[\partial_k {}^{(1.5)}g_{0i} + \partial_0 {}^{(1)}g_{ik} - \partial_i {}^{(1.5)}g_{0k}], \tag{1.29}$$

$${}^{(1)}\Gamma^{i}{}_{kl} = \frac{1}{2}[\partial_l {}^{(1)}g_{ik} + \partial_k {}^{(1)}g_{il} - \partial_i {}^{(1)}g_{kl}], \tag{1.30}$$

$${}^{(1.5)}\Gamma^{0}{}_{00} = -\frac{1}{2}\partial_0 {}^{(1)}g_{00}, \tag{1.31}$$

$${}^{(1)}\Gamma^{0}{}_{0k} = -\frac{1}{2}\partial_k {}^{(1)}g_{00}. \tag{1.32}$$

ここで、

$$\partial_0 X = \mathcal{O}(v)X = \mathcal{O}(\varepsilon^{0.5})X \tag{1.33}$$

と考えた。

ここまではアインシュタイン方程式を使っていない。以下では、

$$^{(2)}g_{00}\,, \quad ^{(1.5)}g_{0k}\,, \quad ^{(1)}g_{ik} \tag{1.34}$$

をアインシュタイン方程式を用いて求める。これをポスト・ニュートン近似と呼ぶ。また、$g_{\mu\nu}$ を決定する別の理論では、上の量は一般相対論とは異なるものになる。そのような理論でも、10 個のパラメーターを導入することで、全ての可能な (1.34) の表式を書き下すことができる。それを Parametrized post newtonian(PPN) 展開と呼ぶ。

1.2 準備：エネルギー運動量テンソル

完全流体のエネルギー運動量テンソルは、

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \rho u^\mu u^\nu + p(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) \\ &= (\rho_0 + \rho_0 \Pi) u^\mu u^\nu + p(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) \end{aligned} \tag{1.35}$$

である。ここで、u^μ は速度場, ρ は質量およびエネルギー密度であり、ρ_0, Π は、

$$\rho_0 := n\mu_0, \tag{1.36}$$

$$\Pi := \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \tag{1.37}$$

である。n はバリオンの数密度で、μ_0 はバリオン 1 つあたりの質量である。$\rho_0 \Pi$ は内部エネルギー密度である。p は圧力である。さて、太陽系では、

$$|U| \lesssim 10^{-6}, \tag{1.38}$$

$$v^2 \lesssim 10^{-7}, \tag{1.39}$$

$$p/\rho_0 \lesssim 10^{-6}, \tag{1.40}$$

$$\Pi \lesssim 10^{-6} \tag{1.41}$$

である。つまり、

$$p/\rho_0 \sim \varepsilon \sim \Pi \tag{1.42}$$

である。また、v^i を dx^i_n/dt (n はバリオンのラベル) の平均とすると、

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = 1 + U + \frac{1}{2}v^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{1.43}$$

$$u^i = v^i \frac{dt}{d\tau} = v^i + \mathcal{O}(\varepsilon^{1.5}) \tag{1.44}$$

となる。ここで、$\frac{dt}{d\tau}$ は $\frac{dt}{d\tau_n}$ の平均値である。なお、

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\tau_n}{dt}\right)^2 &= -g_{00} - 2g_{0k}v_n^k - g_{ik}v_n^i v_n^k \\ &= 1 - 2U - v_n^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{1.45}$$

となる。

よって、

$$^{(0)}T^{00} = \rho_0, \tag{1.46}$$

$$^{(1)}T^{00} = \rho_0(\Pi + v^2 + 2U), \tag{1.47}$$

$$^{(0.5)}T^{0k} = \rho_0 v^i, \tag{1.48}$$

$$^{(1)}T^{ik} = \rho_0 v^i v^k + p\delta_{ik} \tag{1.49}$$

となる。

なお、粘性の効果を考えると、T^{ik} に以下の項が加わる：

$$s^{ik} = -\lambda\Big(\partial_i v^k + \partial_k v^i - \frac{2}{3}\delta_{ik}\partial_l v^l\Big) - \chi\delta_{ik}\partial_l v^l \quad (\lambda, \chi \geq 0). \tag{1.50}$$

今、

$$S^{ik} := s^{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}s\,, \quad s := s^{ll} \tag{1.51}$$

とすると、

$$S^{ik} = -\lambda\Big(\partial_i v^k + \partial_k v^i - \frac{2}{3}\delta_{ik}\partial_l v^l\Big), \tag{1.52}$$

$$s = -3\chi\partial_l v^l \tag{1.53}$$

となる。今、

$$D := \int d^3x' \; \frac{S^{ik}(\boldsymbol{x}', t)(x - x')_i(x - x')_k}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3}, \tag{1.54}$$

$$E := \int d^3x' \; \frac{s(\boldsymbol{x}', t)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \tag{1.55}$$

と置くと、ポスト・ニュートン近似では E が g_{00} に現れる。PPN では、D も g_{00} に現れ得る。太陽系では、これらの項は無視できる。

以下の量を定義する：

$$\Phi_1 := G\int d^3x'\ \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)v^2(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \tag{1.56}$$

$$\Phi_2 := G\int d^3x'\ \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)U(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \tag{1.57}$$

$$\Phi_3 := G\int d^3x'\ \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)\Pi(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \tag{1.58}$$

$$\Phi_4 := G\int d^3x'\ \frac{p(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \tag{1.59}$$

$$A := G\int d^3x'\ \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}, \tag{1.60}$$

$$B := G\int d^3x'\ \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)\partial_0\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \tag{1.61}$$

$$\Phi_W := G^2\int d^3x'd^3x''\ \rho_0(\boldsymbol{x}',t)\rho_0(\boldsymbol{x}'',t)\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''|}-\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|^3}\right). \tag{1.62}$$

また、

$$V_i := G\int d^3x'\ \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)v^i(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \tag{1.63}$$

$$W_i := G\int d^3x'\ \frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)(x-x')_i\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} \tag{1.64}$$

とする。

1.3 アインシュタイン方程式の展開

今、

$$R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} := \partial_\alpha\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta}-\partial_\beta\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha}+\Gamma^{\mu}{}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\beta}-\Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\alpha}, \tag{1.65}$$

$$R_{\mu\nu} := R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}, \tag{1.66}$$

$$R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{1.67}$$

とすると、アインシュタイン方程式は、

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\kappa T_{\mu\nu} \tag{1.68}$$

である。$\kappa=8\pi G$ はアインシュタイン定数である。アインシュタイン方程式は、

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \kappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \quad T := T^{\mu}{}_{\mu} \\ &\equiv \kappa\mathcal{T}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{1.69}$$

とも書ける。エネルギー運動量テンソルは、

$$T^{00} = {}^{(0)}T^{00}+{}^{(1)}T^{00}+\mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{1.70}$$

$$T^{0k} = {}^{(0.5)}T^{0k}+{}^{(1.5)}T^{0k}+\mathcal{O}(\varepsilon^{2.5}), \tag{1.71}$$

$$T^{ik} = {}^{(1)}T^{ik}+{}^{(2)}T^{ik}+\mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{1.72}$$

と展開される。よって、

$$T=-{}^{(0)}T^{00}-{}^{(1)}T^{00}+{}^{(1)}g_{00}{}^{(0)}T^{00}+{}^{(1)}T^{ii}+\mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{1.73}$$

であり、

$$
\begin{aligned}
{}^{(0)}\mathcal{T}_{00}&=\frac{1}{2}{}^{(0)}T^{00}, &(1.74)\\
{}^{(1)}\mathcal{T}_{00}&=\frac{1}{2}{}^{(0)}T^{00}+\frac{1}{2}{}^{(0)}T^{ii}-{}^{(1)}g_{00}{}^{(0)}T^{00}, &(1.75)\\
{}^{(0.5)}\mathcal{T}_{0k}&=-{}^{(0.5)}T^{0k}, &(1.76)\\
{}^{(0)}\mathcal{T}_{ik}&=\frac{1}{2}\delta_{ik}{}^{(0)}T^{00} &(1.77)
\end{aligned}
$$

となる。アインシュタイン方程式は、

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}R_{00}&=\kappa\cdot{}^{(0)}\mathcal{T}_{00}, &(1.78)\\
{}^{(2)}R_{00}&=\kappa\cdot{}^{(1)}\mathcal{T}_{00}, &(1.79)\\
{}^{(1.5)}R_{0k}&=\kappa\cdot{}^{(0.5)}\mathcal{T}_{0k}, &(1.80)\\
{}^{(1)}R_{ik}&=\kappa\cdot{}^{(0)}\mathcal{T}_{ik} &(1.81)
\end{aligned}
$$

となる。
　リッチテンソル

$$R_{\mu\nu}=\partial_\rho\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}-\partial_\nu\Gamma^\rho{}_{\mu\rho}+\Gamma^\sigma{}_{\rho\sigma}\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}-\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu}\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} \tag{1.82}$$

は、以下のようになる：

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}R_{00}&=\partial_i{}^{(1)}\Gamma^i{}_{00}, &(1.83)\\
{}^{(2)}R_{00}&=\partial_i{}^{(2)}\Gamma^i{}_{00}-\partial_0{}^{(1.5)}\Gamma^i{}_{0i}+(-{}^{(1)}\Gamma^0{}_{0i}+{}^{(1)}\Gamma^k{}_{ik}){}^{(1)}\Gamma^i{}_{00}, &(1.84)\\
{}^{(1.5)}R_{0k}&=\partial_i{}^{(1.5)}\Gamma^i{}_{0k}-\partial_0{}^{(1)}\Gamma^i{}_{ki}, &(1.85)\\
{}^{(1)}R_{ik}&=\partial_l{}^{(1)}\Gamma^l{}_{ik}-\partial_k{}^{(1)}\Gamma^l{}_{il}-\partial_k{}^{(1)}\Gamma^0{}_{i0}. &(1.86)
\end{aligned}
$$

計量で書くと、

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}R_{00}&=-\frac{1}{2}\triangle{}^{(1)}g_{00}, &(1.87)\\
{}^{(2)}R_{00}&=-\frac{1}{2}\triangle{}^{(2)}g_{00}+\frac{1}{2}{}^{(1)}g_{ik}\partial_i\partial_k{}^{(1)}g_{00}+\partial_i\partial_0{}^{(1.5)}g_{0i}-\frac{1}{2}\partial_0\partial_0{}^{(1)}g_{ii}\\
&\quad+\Big[\frac{1}{2}\partial_k{}^{(1)}g_{ik}-\frac{1}{4}\partial_i{}^{(1)}g_{00}-\frac{1}{4}\partial_i{}^{(1)}g_{kk}\Big]\partial_i{}^{(1)}g_{00}, &(1.88)\\
{}^{(1.5)}R_{0k}&=\frac{1}{2}\Big[-\triangle{}^{(1.5)}g_{0k}+\partial_0\partial_i{}^{(1)}g_{ki}+\partial_k\partial_i{}^{(1.5)}g_{0i}-\partial_0\partial_k{}^{(1)}g_{ii}\Big], &(1.89)\\
{}^{(1)}R_{ik}&=\frac{1}{2}\Big[-\triangle{}^{(1)}g_{ik}+\partial_k\partial_l{}^{(1)}g_{li}+\partial_i\partial_l{}^{(1)}g_{kl}-\partial_i\partial_k{}^{(1)}g_{ll}+\partial_i\partial_k{}^{(1)}g_{00}\Big] &(1.90)
\end{aligned}
$$

となる。

1.4　調和条件

今、

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\lambda\mu}) = 0 \tag{1.91}$$

という座標変換を選ぶ。これを調和条件という。上式は、

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.92}$$

とも書ける。実際、

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = -g^{\lambda\sigma}\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\sigma g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\partial_\mu g_{\nu\sigma} \tag{1.93}$$

であり、

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\sigma g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma\sqrt{-g}, \tag{1.94}$$

$$g^{\lambda\sigma}\partial_\mu g_{\nu\sigma} = -g_{\nu\sigma}\partial_\mu g^{\lambda\sigma} \tag{1.95}$$

なので、

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma(\sqrt{-g}g^{\lambda\sigma}) \tag{1.96}$$

となる。よって、(1.91) と (1.92) とは等価である。

(1.92) より、

$${}^{(1.5)}(g^{\mu\nu}\Gamma^0{}_{\mu\nu}) = 0, \tag{1.97}$$

$${}^{(1)}(g^{\mu\nu}\Gamma^i{}_{\mu\nu}) = 0 \tag{1.98}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
{}^{(1.5)}(g^{\mu\nu}\Gamma^0{}_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}\partial_0{}^{(1)}g_{00} + \delta_{ik}{}^{(1.5)}\Gamma^0{}_{ik} \\
&= \frac{1}{2}\partial_0{}^{(1)}g_{00} + \delta_{ik}\frac{1}{2}(\partial_0{}^{(1)}g_{ik} - \partial_i{}^{(1.5)}g_{0k} - \partial_k{}^{(1.5)}g_{0i}) \\
&= \frac{1}{2}\partial_0{}^{(1)}g_{00} + \frac{1}{2}\partial_0{}^{(1)}g_{ii} - \partial_i{}^{(1.5)}g_{0i},
\end{aligned} \tag{1.99}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}(g^{\mu\nu}\Gamma^i{}_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}\partial_i{}^{(1)}g_{00} + \frac{1}{2}[2\partial_k{}^{(1)}g_{ik} - \partial_i{}^{(1)}g_{ll}] \\
&= \frac{1}{2}\partial_i{}^{(1)}g_{00} + \partial_k{}^{(1)}g_{ik} - \frac{1}{2}\partial_i{}^{(1)}g_{ll}
\end{aligned} \tag{1.100}$$

である。よって、

$$\frac{1}{2}\partial_0{}^{(1)}g_{00} + \frac{1}{2}\partial_0{}^{(1)}g_{ii} - \partial_i{}^{(1.5)}g_{0i} = 0, \tag{1.101}$$

$$\frac{1}{2}\partial_i{}^{(1)}g_{00} + \partial_k{}^{(1)}g_{ik} - \frac{1}{2}\partial_i{}^{(1)}g_{ll} = 0 \tag{1.102}$$

となる。(1.101) を t で微分して、

$$\frac{1}{2}\partial_0\partial_0{}^{(1)}g_{00}+\frac{1}{2}\partial_0\partial_0{}^{(1)}g_{ii}-\partial_0\partial_i{}^{(1.5)}g_{0i}=0 \tag{1.103}$$

を得る。(1.101) を x^k で微分して、

$$\frac{1}{2}\partial_0\partial_k{}^{(1)}g_{00}+\frac{1}{2}\partial_0\partial_k{}^{(1)}g_{ii}-\partial_i\partial_k{}^{(1.5)}g_{0i}=0 \tag{1.104}$$

であり、これに (1.101) を代入して、

$$\partial_0\partial_k{}^{(1)}g_{ii}-\partial_0\partial_i{}^{(1)}g_{ik}-\partial_i\partial_k{}^{(1.5)}g_{0i}=0 \tag{1.105}$$

を得る。(1.102) を k で微分して、

$$\frac{1}{2}\partial_k\partial_i{}^{(1)}g_{00}+\partial_k\partial_l{}^{(1)}g_{il}-\frac{1}{2}\partial_k\partial_i{}^{(1)}g_{ll}=0 \tag{1.106}$$

であり、上式に、上式で i, k を入れ換えたものを足して、

$$\partial_k\partial_i{}^{(1)}g_{00}+\partial_k\partial_l{}^{(1)}g_{il}+\partial_i\partial_l{}^{(1)}g_{kl}-\partial_k\partial_i{}^{(1)}g_{ll}=0 \tag{1.107}$$

を得る。

(1.103), (1.105), (1.107) より、リッチテンソルは、

$$\begin{aligned}
{}^{(2)}R_{00} &= -\frac{1}{2}\triangle\,{}^{(2)}g_{00}+\frac{1}{2}{}^{(1)}g_{ik}\partial_i\partial_k{}^{(1)}g_{00}+\frac{1}{2}\partial_0\partial_0{}^{(1)}g_{00}-\frac{1}{2}\Big[\partial_i{}^{(1)}g_{00}\Big]^2, && (1.108)\\
{}^{(1.5)}R_{0k} &= -\frac{1}{2}\triangle\,{}^{(1.5)}g_{0k}, && (1.109)\\
{}^{(1)}R_{ik} &= -\frac{1}{2}\triangle\,{}^{(1)}g_{ik} && (1.110)
\end{aligned}$$

となる。ここで、$(a_i)^2=a_ia_i$ という記法を用いた。

1.5 計量の決定

以上より、調和条件の下でのアインシュタイン方程式は、

$$\triangle^{(1)}g_{00}=-\kappa\cdot{}^{(0)}T^{00}=-8\pi G\rho_0 \tag{1.111}$$

および、

$$\begin{aligned}
\triangle^{(1)}g_{ik} &= -\kappa\delta_{ik}{}^{(0)}T^{00}=-8\pi G\rho_0, && (1.112)\\
\triangle^{(1.5)}g_{0k} &= 2\kappa\cdot{}^{(0.5)}T^{0k}=16\pi G\rho_0 v^i && (1.113)
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}
\triangle^{(2)}g_{00} = {}&{}^{(1)}g_{ik}\partial_i\partial_k{}^{(1)}g_{00}+\partial_0\partial_0{}^{(1)}g_{00}-\Big[\partial_i{}^{(1)}g_{00}\Big]^2\\
&+\kappa\Big[-{}^{(0)}T^{00}-{}^{(0)}T^{ii}+2{}^{(1)}g_{00}{}^{(0)}T^{00}\Big] && (1.114)
\end{aligned}$$

となる。

(1.111) より、

$$
{}^{(1)}g_{00} \;=\; 2U, \tag{1.115}
$$
$$
U \;:=\; G\int d^3x'\;\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{1.116}
$$

を得る。(1.112) より、

$$
{}^{(1)}g_{ik} = \delta_{ik}2U \tag{1.117}
$$

となる。(1.113) より、

$$
{}^{(1.5)}g_{0k} = -4V_k \tag{1.118}
$$

となる。

これより、(1.114) の右辺において、

$$
{}^{(1)}g_{ik}\partial_i\partial_k{}^{(1)}g_{00} = 4U\bigtriangleup U, \tag{1.119}
$$
$$
\begin{aligned}
-\Big[\partial_i{}^{(1)}g_{00}\Big]^2 &= -\frac{1}{2}\bigtriangleup[({}^{(1)}g_{00})^2] + {}^{(1)}g_{00}\bigtriangleup{}^{(1)}g_{00} \\
&= -2\bigtriangleup(U^2) + 4U\bigtriangleup U,
\end{aligned} \tag{1.120}
$$
$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}g_{ik}\partial_i\partial_k{}^{(1)}g_{00} - \Big[\partial_i{}^{(1)}g_{00}\Big]^2 &= -2\bigtriangleup(U^2) + 8U\bigtriangleup U \\
&= -2\bigtriangleup(U^2) - 16\pi G^{(1)}g_{00}{}^{(0)}T^{00}
\end{aligned} \tag{1.121}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
\bigtriangleup{}^{(2)}g_{00} &= -2\bigtriangleup(U^2) + \partial_0\partial_0{}^{(1)}g_{00} + 8\pi G\Big[-{}^{(0)}T^{00} - {}^{(0)}T^{ii}\Big] \\
&= -2\bigtriangleup(U^2) + 2\partial_0\partial_0 U - 8\pi G\Big[\rho_0(2v^2 + 2U + \Pi) + 3p\Big]
\end{aligned} \tag{1.122}
$$

となる。これより、

$$
{}^{(2)}g_{00} \;=\; -2U^2 + 4\Phi_1 + 4\Phi_2 + 2\Phi_3 + 6\Phi_4 + \Psi, \tag{1.123}
$$
$$
\Psi \;:=\; -\frac{1}{2\pi}\int d^3x'\;\frac{\partial_0\partial_0 U(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{1.124}
$$

を得る。(1.6) で示すように、

$$
\Psi = A + B - \Phi_1 \tag{1.125}
$$

である。粘性の効果がある場合、

$$
{}^{(2)}g_{00} = -2U^2 + 4\Phi_1 + 4\Phi_2 + 2\Phi_3 + 6\Phi_4 + \Psi + 2E \tag{1.126}
$$

である。

ここまでは主に [1] を参考にした。

1.6 公式

(1.125) を示そう。
エネルギー・運動量保存則は、

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \tag{1.127}$$

である。$\mu = 0$ 成分より、

$$\partial_\nu T^{0\nu} = \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{1.128}$$

である。また、

$$\partial_\nu T^{0\nu} = \partial_0 \rho_0 + \partial_i(\rho_0 v^i) + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{1.129}$$

なので、

$$\partial_0 \rho_0 + \partial_i(\rho_0 v^i) = \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{1.130}$$

を得る。よって、

$$\partial_0 \int d^3x'\ \rho(\boldsymbol{x}', t) f(\boldsymbol{x}') \approx -\int d^3x'\ \partial'_k[\rho(\boldsymbol{x}', t) v^k(\boldsymbol{x}', t)] f(\boldsymbol{x}') \tag{1.131}$$

となる。よって、

$$\partial_0 U(\boldsymbol{x}', t) \approx -G \int d^3x''\ \frac{\partial''_k[\rho(\boldsymbol{x}'', t) v^k(\boldsymbol{x}'', t)]}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''|} \tag{1.132}$$

であり、

$$\Psi = \frac{G}{2\pi} \partial_0 \int d^3x'\ \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \int d^3x''\ \frac{\partial''_k[\rho(\boldsymbol{x}'', t) v^k(\boldsymbol{x}'', t)]}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''|} \tag{1.133}$$

となる。今、

$$I_\delta[f^k] := \int d^3x'\ \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \int d^3x''\ \frac{\partial''_k f^k(\boldsymbol{x}'', t)}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''|} \exp(-\delta|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''|) \quad (\delta \geq 0) \tag{1.134}$$

とすると、

$$\Psi = \frac{G}{2\pi} \partial_0 \lim_{\delta \to +0} I_\delta[\rho v^k] \tag{1.135}$$

である。さて、$\delta > 0$ に対して、

$$I_\delta[f^k] = \int d^3x''\ \partial''_k f^k(\boldsymbol{x}'', t) K_\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}''), \tag{1.136}$$

$$\begin{aligned} K_\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'') &:= \int d^3x'\ \frac{\exp(-\delta|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''|)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'||\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''|} \\ &= \int d^3r\ \frac{\exp(-\delta|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{r}|}, \end{aligned} \tag{1.137}$$

$$\boldsymbol{a} := \boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x} \tag{1.138}$$

である。今、

$$a := |\boldsymbol{a}|, \quad r := |\boldsymbol{r}| \tag{1.139}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
K_\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'') &= \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \ \frac{r \sin\theta e^{-\delta r}}{\sqrt{r^2 + 2ra\cos\theta + a^2}} \\
&= \frac{2\pi}{a} \int_0^\infty dr \ e^{-\delta r} \int_0^\pi d\theta \Big[-\frac{\partial}{\partial\theta} \sqrt{r^2 + 2ra\cos\theta + a^2} \Big] \\
&= \frac{2\pi}{a} \int_0^\infty dr \ e^{-\delta r} (|r + a| - |r - a|) \\
&= \frac{2\pi}{a} \int_0^a dr \ e^{-\delta r} 2r + 4\pi \int_a^\infty dr \ e^{-\delta r} \\
&\equiv K_\delta^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'') + K_\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}''), \qquad (1.140) \\
K_\delta^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'') &= 2\pi a + \mathcal{O}(\delta), \qquad (1.141) \\
K_\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'') &= \frac{4\pi}{\delta} e^{-\delta a} \qquad (1.142)
\end{aligned}$$

となる。さて、

$$\begin{aligned}
I_\delta[f^k] &= \int d^3x' \ \partial'_k f^k(\boldsymbol{x}', t) K_\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \\
&= -\int d^3x' \ f^k(\boldsymbol{x}', t) \partial'_k K_\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \qquad (1.143)
\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \to +0} I_\delta[f^k] &= 2\pi \int d^3x' \ f^k(\boldsymbol{x}', t) \partial'_k |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}| \\
&= 2\pi \int d^3x' \ f^k(\boldsymbol{x}', t) \frac{(x' - x)_k}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|} \qquad (1.144)
\end{aligned}$$

となる。
　よって、

$$\begin{aligned}
\Psi &= \partial_0 \chi_0, \qquad (1.145) \\
\chi_0 &:= G \int d^3x' \ \rho_0(\boldsymbol{x}', t) v^k(\boldsymbol{x}', t) \frac{(x' - x)_k}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|} \qquad (1.146)
\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\Psi &= G \int d^3x' \ \rho_0(\boldsymbol{x}', t) \partial_0 v^k(\boldsymbol{x}', t) \frac{(x' - x)_k}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|} + G \int d^3x' \ \partial_0 \rho_0(\boldsymbol{x}', t) v^k(\boldsymbol{x}', t) \frac{(x' - x)_k}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|} \\
&\equiv \Psi_1 + \Psi_2, \qquad (1.147) \\
\Psi_1 &= B \qquad (1.148)
\end{aligned}$$

となる。Ψ_2 は、

$$
\begin{aligned}
\Psi_2 &\approx G\int d^3x'\ (-1)\partial'_i[\rho_0(\boldsymbol{x}',t)v^i(\boldsymbol{x}',t)]v^k(\boldsymbol{x}',t)\frac{(x'-x)_k}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|} \\
&= G\int d^3x'\ \rho_0(\boldsymbol{x}',t)v^i(\boldsymbol{x}',t)\partial'_i\Big[v^k(\boldsymbol{x}',t)\frac{(x'-x)_k}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}\Big] \\
&= A-\Phi_1+G\int d^3x'\ \rho_0(\boldsymbol{x}',t)v^i(\boldsymbol{x}',t)\partial'_i v^k(\boldsymbol{x}',t)\frac{(x'-x)_k}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}
\end{aligned}
\tag{1.149}
$$

となる。最後の項が無視できれば ([3] によると無視できる)(1.125) を得る。

1.7 座標変換

微小な座標変換

$$
x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad \xi^\mu = \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{1.150}
$$

を考えると、

$$
\begin{aligned}
g'_{\mu\nu}(x') &\approx g_{\alpha\beta}(x)(\delta^\alpha_\mu - \partial_\mu\xi^\alpha)(\delta^\beta_\nu - \partial_\nu\xi^\beta) \\
&\approx g_{\alpha\beta}(x) - g_{\alpha\nu}\partial_\mu\xi^\alpha - g_{\mu\beta}\partial_\nu\xi^\beta \\
&= g_{\alpha\beta}(x') - \nabla_\mu\xi_\alpha - \nabla_\nu\xi_\beta \\
&\approx g_{\alpha\beta}(x') - \partial_\mu\xi_\alpha - \partial_\nu\xi_\beta
\end{aligned}
\tag{1.151}
$$

となる。今、

$$
\xi_0 \;=\; \lambda\partial_0\chi(x), \quad \xi_k = 0, \tag{1.152}
$$

$$
\chi(x) := -G\int d^3x'\ \rho_0(\boldsymbol{x}',t)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \tag{1.153}
$$

とする。このとき、

$$
g'_{00}(x') \approx g_{00}(x') - 2\lambda\partial_0\partial_0\chi, \tag{1.154}
$$

$$
g'_{0k}(x') \approx g_{0k}(x') - \lambda\partial_k\partial_0\chi, \tag{1.155}
$$

$$
g'_{ik}(x') \approx g_{ik}(x') \tag{1.156}
$$

となる。まず、

$$
\begin{aligned}
\partial_0\chi &\approx -G\int d^3x'\ \rho_0(\boldsymbol{x}',t)v^i(\boldsymbol{x}',t)\partial'_i|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \\
&= G\int d^3x'\ \rho_0(\boldsymbol{x}',t)v^i(\boldsymbol{x}',t)\frac{(x-x')_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \\
&= -\chi_0
\end{aligned}
\tag{1.157}
$$

となる。よって、

$$
\partial_0\partial_0\chi = -\Psi \tag{1.158}
$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\partial_k\partial_0\chi &= G\int d^3x'\ \rho_0(\boldsymbol{x}',t)v^k(\boldsymbol{x}',t)\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} - G\int d^3x'\ \rho_0(\boldsymbol{x}',t)v^i(\boldsymbol{x}',t)\frac{(x-x')_i(x-x')_k}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} \\ &= V_k - W_k \end{aligned} \tag{1.159}$$

である。従って、

$$g'_{00}(x') \approx g_{00}(x') + 2\lambda\Psi, \tag{1.160}$$

$$g'_{0k}(x') \approx g_{0k}(x') - \lambda(V_k - W_k), \tag{1.161}$$

$$g'_{ik}(x') \approx g_{ik}(x') \tag{1.162}$$

を得る。$\lambda = -\frac{1}{2}$ として、$'$ を取ると、

$${}^{(2)}g_{00} = -2U^2 + 4\Phi_1 + 4\Phi_2 + 2\Phi_3 + 6\Phi_4, \tag{1.163}$$

$${}^{(1.5)}g_{0k} = -\frac{7}{2}V_k - \frac{1}{2}W_k \tag{1.164}$$

となる。

2 Parametrized post newtonian 展開

2.1 PPN パラメーター

ポスト・ニュートン近似では、

$${}^{(2)}g_{00} = -2U^2 + 4\Phi_1 + 4\Phi_2 + 2\Phi_3 + 6\Phi_4, \tag{2.1}$$

$${}^{(1.5)}g_{0k} = -\frac{7}{2}V_k - \frac{1}{2}W_k, \tag{2.2}$$

$${}^{(1)}g_{ik} = \delta_{ik}2U \tag{2.3}$$

であった。PPN では、

$${}^{(2)}g_{00} = -2\beta U^2 + 4\beta_1\Phi_1 + 4\beta_2\Phi_2 + 2\beta_3\Phi_3 + 6\beta_4\Phi_4 - \zeta A - 2\xi\Phi_W - \eta D, \tag{2.4}$$

$${}^{(1.5)}g_{0k} = -\frac{7}{2}\Delta_1 V_k - \frac{1}{2}\Delta_2 W_k, \tag{2.5}$$

$${}^{(1)}g_{ik} = \delta_{ik}2\gamma U \tag{2.6}$$

とする ([2])。一般相対論は、

$$\beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \gamma = \Delta_1 = \Delta_2 = 1\,, \quad \zeta = \xi = \eta = 0 \tag{2.7}$$

に対応する。ηD は 0 とされることが多い。以下では $\eta D = 0$ とする。上の展開に B は現れない。B が現れた場合は、§ 1.7 の座標変換で B の項を消すことができる。

また、別のパラメーターでは、

$$
\begin{aligned}
{}^{(2)}g_{00} &= -2\beta U^2 + (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)\Phi_1 + 2(3\gamma - 2 - \beta + 1 + \zeta_2 + \xi)\Phi_2 \\
&\quad +2(1 + \zeta_3)\Phi_3 + 2(3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi)\Phi_4 - (\zeta_1 - 2\xi)A - 2\xi\Phi_W, \qquad (2.8) \\
{}^{(1.5)}g_{0k} &= -\frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi)\Delta_1 V_k - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)W_k, \qquad (2.9) \\
{}^{(1)}g_{ik} &= \delta_{ik}2\gamma U \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

である。一般相対論は、

$$\beta = \gamma = 1, \quad \xi = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0 \tag{2.11}$$

である ([3])。

2.2 太陽系での実験

太陽による光の屈折の大きさ δ は、一般相対論の値を δ_{GR} として、

$$\delta = \frac{1+\gamma}{2}\delta_{\mathrm{GR}} \tag{2.12}$$

となる ([3])。

近日点移動の大きさ $\Delta\omega$ は、一般相対論の値 ($J_2 = 0$ の場合) を $(\Delta\omega)_{\mathrm{GR}}$ として、

$$\Delta\omega = (\Delta\omega)_{\mathrm{GR}}\left[\frac{2-\beta+2\gamma}{3} + \frac{2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 2\zeta_2}{6}\frac{\mu}{m} + CJ_2\right] \tag{2.13}$$

である ([3])。J_2 は太陽の無次元化 4 重極モーメントであり、

$$m = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m}, \quad m_2 \ll m_1 \tag{2.14}$$

である。m_1 は太陽質量で、m_2 は惑星の質量である。C は定数で、$C \approx 3 \times 10^3$ である。つまり、

$$CJ_2 \approx 3 \times 10^{-4}\frac{J_2}{10^{-7}} \tag{2.15}$$

である。

References

[1] Steven Weinberg, "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", Wiley (1972).

[2] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, "Gravitation", W. H. Freeman and Company (1973).

[3] Clifford M. Will, "Theory and Experiment in Gravitational Physics", Cambridge University Press (Revised edition, 1993).